

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

# 玻色-爱因斯坦凝聚中的非正则涡旋态及其动力学\*

邢健崇<sup>1)</sup> 张文静<sup>2)</sup> 杨涛<sup>1)2)3)†</sup>

1) (西北大学现代物理研究所, 陕西省理论物理前沿重点实验室, 西安 710127)

2) (西北大学物理学院, 西安 710127)

3) (彭桓武高能基础理论研究中心(西安), 西安 710127)

(2022年12月1日收到; 2023年1月29日收到修改稿)

玻色-爱因斯坦凝聚中由于非线性相互作用引起的涡旋激发态一直是超冷原子研究的热点. 然而相关研究都集中在具有整数拓扑荷的正则涡旋态. 本文研究了具有幂指数、新型幂指数和振荡型三种相位分布的非正则涡旋光与凝聚体相互作用而产生的非正则涡旋态凝聚体的动力学性质. 研究表明非正则涡旋具有动力学不稳定性, 其密度分布显著依赖于光场相位结构参数. 不同非正则涡旋衰变形成具有不同分布的正则涡旋簇, 展现出丰富的动力学激发斑图. 特别是新型幂指数非正则涡旋态衰变后会在凝聚体内形成稳定的正多边形正则涡旋簇结构. 由于非正则涡旋光的相位结构破坏了凝聚体的旋转对称性, 凝聚体的角动量不再是量子化的, 且其随光场方位角幂次或振荡频率的变化与相应的非正则涡旋光场自身演化具有明显差别. 在动力学演化过程中, 具有新型幂指数相位的非正则涡旋态凝聚体质心保持不变, 而对于具有幂指数和振荡型相位的非正则涡旋态凝聚体, 两者的质心轨迹是一个中心为坐标原点的非标准椭圆.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, 非正则涡旋态, 正则涡旋簇, 角动量, 质心轨迹**PACS:** 03.75.Kk, 05.30.Jp, 05.45.-a**DOI:** 10.7498/aps.72.20222289

## 1 引言

近年来, 由于理论与实验的大力协同, 光涡旋物理这一分支领域得到了迅速发展. 光学涡旋因具有螺旋形的相位结构、空心核强度分布和有趣的轨道角动量<sup>[1-3]</sup>等特征而大有用武之地, 如光阱<sup>[4,5]</sup>和光镊<sup>[6]</sup>. 一般来说, 正则涡旋光具有随方位角均匀变化的螺旋相位, 其角动量是量子化的. 然而, 近些年光学中引入了具有特殊相位结构的新型光场, 其相位不随方位角均匀变化, 被称为非正则涡

旋光. 其中幂指数相位涡旋 (power-exponent-phase vortex, PEPV)<sup>[7]</sup>以及新型幂指数相位涡旋 (new type power-exponent-phase vortex, NPEPV)<sup>[8]</sup>这两种相位结构在实验上都可以通过空间光调制器来实现. 非正则光涡旋角动量不再是量子化的, 并且在空间中传播时也不稳定. 一般正则涡旋光的轴向角动量仅与涡旋荷有关, 然而对于非正则涡旋光, 其角动量还依赖于其他参数.

过去二十多年里, 中性超冷原子气体已经发展成为研究和模拟基本量子效应的重要平台. 随着磁光阱技术的发展, 玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 可以

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12175180, 11934015)、瞬态光学与光子技术国家重点实验室开放基金 (批准号: SKLST202010)、陕西省重大基础研究计划 (批准号: 2017KCT-12, 2017ZDJC-32) 和陕西基础科学 (数学、物理学) 研究院项目 (批准号: 22JSZ005) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yangt@nwu.edu.cn

提供几乎完全与外界隔绝的实验环境. 作为一种宏观量子态, 由于其独特的物质波属性、宏观量子相干性以及人工可调控性, 成为物理学中前所未有的全新量子态物质, 也成为研究光与物质相互作用的重要对象. 通过光束的组合可以构造不同形式的光阱来束缚凝聚体<sup>[9,10]</sup>. 光晶格已成为利用超冷原子进行量子模拟和量子计算研究不可或缺的工具<sup>[11]</sup>, 在其基础上已成功实现了不同维度冷原子系统的自旋-轨道耦合<sup>[12–16]</sup>. 光势垒在研究超冷原子动力学方面发挥着重要的作用<sup>[17–20]</sup>. 利用高斯光束搅拌凝聚体可在凝聚体中产生涡旋激发<sup>[21]</sup>或环流<sup>[22,23]</sup>. 利用光场费希巴赫共振方法控制激光束的功率和失谐, 可以在很宽范围内改变原子散射长度, 从而调节原子间相互作用强度<sup>[24]</sup>. 特别是相位印记技术<sup>[25]</sup>的发展, 使得利用光场可控地在凝聚体中生成涡旋、涡旋簇、暗孤子和扭结等具有特殊拓扑结构的激发成为可能<sup>[26–36]</sup>.

BEC 中正则涡旋的行为已被广泛研究, 而非正则涡旋却尚未被详细研究. 通过相位印记技术, 将非正则涡旋光的相位结构引入到凝聚体中, 探讨非正则光涡旋束与凝聚体的相互作用. 在 PEPV 和 NPEPV 的基础上, 构造了随方位角具有振荡变化的相位结构 (oscillating-phase vortex, OSCPV). 非正则涡旋态凝聚体的密度分布和动力学行为是否与涡旋光束及其传播具有类似之处, 凝聚体中非正则涡旋退化后形成的涡旋簇具有的构型、保持时间及其演化形式是本工作研究的问题.

## 2 理论模型

考虑一个束缚在简谐势阱  $V$  中的  $^{87}\text{Rb}$  冷原子体系, 其粒子数为  $N$ , 质量为  $M$ . 在极低的温度下, 形成玻色-爱因斯坦凝聚体, 系统的动力学性质可以用平均场近似下的 Gross-Pitaevskii 方程 (GP 方程) 进行描述:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V + NU|\psi|^2\right]\psi, \quad (1)$$

其中,  $\psi$  表示凝聚体的序参量, 满足归一化条件  $\int |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1$ ,  $U = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{M}$  为原子间相互作用强度. 原子的  $s$  波散射长度  $a_s$  可以通过费希巴赫共振来调制. 通过调节简谐势阱的频率, 让其轴向频率 ( $\omega_z$ ) 远大于径向频率 ( $\omega_r$ ), 则系统可以退化到准二维

体系. 数值求解时将时间、长度和能量单位分别定义为  $t_0 = 1/\omega_r$ ,  $x_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_r}$  和  $\epsilon_0 = \hbar\omega_r$ , 则可以将二维 GP 方程无量纲化:

$$i\partial_t\phi = \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 + Ng|\phi|^2\right]\phi, \quad (2)$$

其中,  $g = \sqrt{8\pi}a_s/a_z$  为二维体系原子相互作用强度,  $a_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$  是简谐势阱在  $z$  方向上的散射长度. 凝聚体的波函数可以写成  $\phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)} \times \exp[i\theta(\mathbf{r}, t)]$ , 其中  $\rho$  和  $\theta$  分别为凝聚体的密度和相位分布.

通过将涡旋光束作用在凝聚体上, 可以将光场的相位传递给凝聚体, 这种方法叫做相位印记法. 被广泛研究的正则高斯-拉盖尔涡旋光束相位的数学形式为

$$\theta(y, x) = m \arctan(y/x), \quad (3)$$

式中, 整数  $m$  称为涡旋的拓扑荷, 方位角  $\varphi = \arctan(y/x) \in [0, 2\pi)$ . 正则涡旋光束相位空间分布如图 1(a) 所示. 结合最新的光学技术的发展, 选 3 种不同的非正则光学相位场, 来研究其与凝聚体相互作用的情况. 这 3 种相位场的数学形式分别为

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2m\pi \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^n, \\ \theta_2 &= 2\pi \left[\frac{\text{rem}(m\varphi, 2\pi)}{2\pi}\right]^n, \\ \theta_3 &= m\varphi \frac{[\cos(\omega\varphi) + 3]}{4}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  和  $\theta_3$  分别对应 PEPV, NPEPV 以及 OSCPV 的相位,  $m$  为拓扑荷,  $n$  为 PEPV 和 NPEPV 的幂次,  $\omega$  为 OSCPV 的角频率, 这几个量都为整数. 函数  $\text{rem}(x, y)$  表示  $x$  对  $y$  的求余.

很显然, 由方程 (4) 可知当  $n = 1$  时, PEPV 和 NPEPV 的相位结构均退化到正则涡旋相位结构. 而对于 OSCPV 的相位结构, 当  $\omega = 0$  时, 其会退化到正则的涡旋相位结构. 当  $m = 1$  时, NPEPV 会退化成 PEPV. 在图 1(b)–(d) 中给出了在特定参数条件下 3 种非正则涡旋相位结构的空分布. 与正则涡旋相比, 幂次  $n$  使 PEPV 的相位随  $\varphi$  的变化逐渐加剧. 同样, NPEPV 的相位也是随  $\varphi$  变化逐渐加剧. 有所不同的是, NPEPV 的相位结构还具有  $C_m$  对称性. 虽然 OSCPV 的相位结构随角频率  $\omega$  周期性振荡, 但其也不具有旋转对称性. 将这些非正则的涡旋相位结构作用于凝聚体, 会使得凝

聚体中的原子产生相应的速度场, 从而影响凝聚体的密度分布. 为研究非正则涡旋光对凝聚体动力学的影响, 将这些相位信息代入 GP 方程 (2), 采用分步 Crank-Nicolson 方法进行数值求解, 通过虚时演化可以得到系统的初态, 并在实时演化过程中研究系统的动力学性质.

### 3 结果与讨论

通过相位印记技术, 可以在凝聚体中产生相应的物质波涡旋. 正则涡旋光会使凝聚体的相位产生一个奇点, 围绕这个奇点形成从  $0$  到  $2\pi$  的整数倍变化的相位场. 由于凝聚体的超流特性, 其密度会在奇点处形成密度为零的区域. 正则涡旋在凝聚体中表现为一个圆形的密度缺陷 (涡旋核), 其尺度与拓扑荷的大小成正比. 在具有均匀密度  $\rho$  的凝聚

体中, 单位涡旋 ( $m = \pm 1$ ) 的涡旋核的大小正比于凝聚体的愈合长度  $\xi = 1/\sqrt{8\pi\rho a_s}$ . 相比于正则涡旋光, 非正则涡旋具有拓扑荷  $m$ , 幂次  $n$  和角频率  $\omega$  等更多的可调控参数, 其与凝聚体的相互作用会在凝聚体中产生不同类型的物质波涡旋态. 同样, 非正则涡旋核的尺度也依赖于拓扑荷大小和凝聚体密度, 不过其形状却强烈依赖于其他参数.

#### 3.1 凝聚体中的非正则涡旋态

如图 2(a)–(c) 所示, 对于 PEPV 型涡旋, 其涡旋核已经不再是圆形. 涡旋核随拓扑荷  $m$  和幂次  $n$  的增大而增大, 形状也愈发偏离圆形, 凝聚体从右侧逐步被撕裂, 密度分布呈 “C” 形结构. 这是由于  $\nabla\theta_1$  对方位角  $\varphi \in [0, 2\pi)$  是连续的, 仅在  $\varphi = 0$  处附近有跃变 ( $\nabla\theta_1$  在  $\varphi = 0$  处最小, 在  $\varphi = 0$  处最大), 而通过虚时演化得到的态是能量最低的态, 相

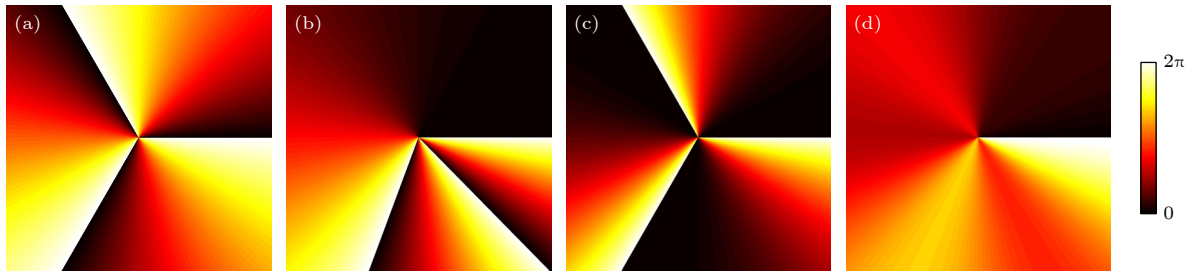


图 1 涡旋场相位空间分布图 (a) 拓扑荷  $m = 3$  的正则涡旋场相位分布; (b) 拓扑荷和幂次分别为  $m = 3, n = 3$  的 PEPV 型涡旋场相位分布; (c) 拓扑荷和幂次分别为  $m = 3, n = 3$  的 NPEPV 型涡旋场相位分布; (d) 拓扑荷和角频率分别为  $m = 1, \omega = 3$  的 OSCPV 型涡旋场相位分布

Fig. 1. Phase distributions of vortex fields: (a) Phase distribution of the canonical vortex with topological charge  $m = 3$ ; (b) phase distribution of PEPV vortex with the topological charge and power being  $m = 3$  and  $n = 3$ , respectively; (c) phase distribution of NPEPV vortex with the topological charge and power being  $m = 3$  and  $n = 3$ , respectively; (d) phase distribution of OSCPV vortex with topological charge and angular frequency being  $m = 1$  and  $\omega = 3$ , respectively.

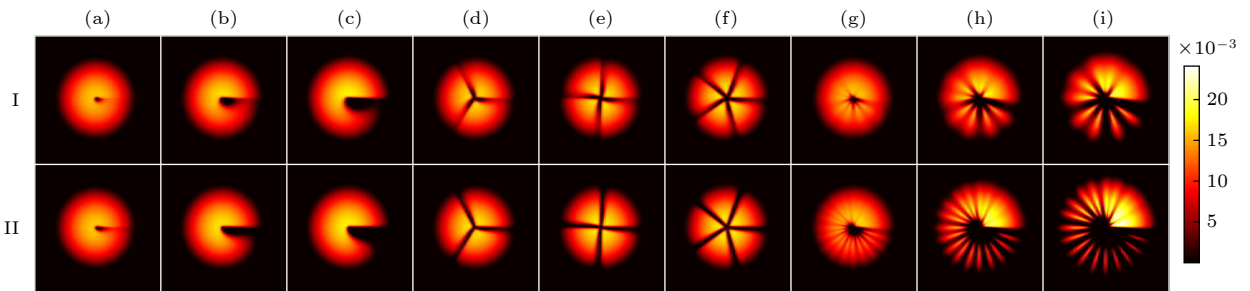


图 2 通过相位印记获得的非正则涡旋态凝聚体密度分布 PEPV 态: (a)–(c) 分别对应拓扑荷  $m = 1, 3, 5$ ; I 和 II 行分别对应幂次  $n = 5$  和  $n = 10$ . NPEPV 态: (d)–(f) 分别对应拓扑荷  $m = 3, 4, 5$ ; I 和 II 行分别对应幂次  $n = 5$  和  $n = 10$ . OSCPV 态: (g)–(i) 分别对应拓扑荷  $m = 1, 3, 5$ ; I 和 II 行分别对应角频率  $\omega = 5$  和  $\omega = 10$

Fig. 2. Density distributions of the condensates in noncanonical vortex states. PEPV states: (a)–(c) Density distributions with the topological charge  $m = 1, 3, 5$ , respectively. In row I and II, the powers are  $n = 5$  and  $10$ , respectively. NPEPV states: (d)–(f) Density distributions with the topological charge  $m = 3, 4, 5$ , respectively. In row I and II, the powers are  $n = 5$  and  $10$ , respectively. OSCPV state: (g)–(i) Density distributions with the topological charge  $m = 1, 3, 5$ , respectively. In row I and II, the angular frequencies are  $\omega = 5$  and  $10$ , respectively.

位梯度越大 (能量越大) 的地方粒子数密度越小, 因此凝聚体会从方位角  $\varphi = 0$  处开始撕裂. 再者, BEC 属于低能物理范畴, 其最大速度不能超过其低能激发声子的速度  $c$ , 而为了不引起物理上的奇异性, 系统会自动通过粒子数密度来调节, 在速度大于声速  $c$  的区域, 其密度会降低为零, 随着拓扑荷  $m$  的增大, 凝聚体表现出明显的撕裂.

对于 NPEPV 涡旋光, 其所对应的凝聚体密度分布呈“扇叶”形状, 如图 2(d)—(f) 所示, 其涡旋核结构也相应呈“扇叶”形状. 扇叶的数目等于拓扑荷数  $m$ . 这是因为  $\theta_2$  中  $m\varphi$  对  $2\pi$  求余的原因,  $\nabla\theta_2$  绕方位角一圈会有  $m$  个跃变点, 凝聚体会在这些跃变点处发生分裂, 所以凝聚体会分裂成  $m$  个部分. 而随着  $n$  的增大,  $n$  跃变点两端  $\nabla\theta_2$  的差值增加, 使得扇叶间的分界也越发清晰. 这种扇叶结构类似于利用激光掩模技术生成的分块凝聚体 [32,37,38]. 然而, 非正则涡旋相位场会使凝聚体具有初始角动量, 这是前述研究中的系统所没有的, 这也导致了系统的动力学过程的差异.

对于 OSCPV 型涡旋, 如图 2(g)—(i) 所示, 其所对应凝聚体密度分布变化更加复杂, 呈现出不连续的“C”形, 类似于“菊石”的结构. 其密度绕方位角一圈振荡变化并逐渐减小, 凝聚体随方位角的增大被分割得越来越显著, 且从方位角  $\varphi = 0$  处开

始计算, 每相邻两团凝聚体为一组, 刚好分为  $\omega$  组. 凝聚体中涡旋核的尺度随拓扑荷  $m$  的增加而增大, 凝聚体被分割的趋势也越明显. 我们知道  $\omega = 2\pi/T$ , 因此方位角  $\varphi$  绕一圈有  $\omega$  个周期, 凝聚体被分成  $\omega$  组. 另外其相位梯度在每个周期内会有两个极值点, 而凝聚体在极值点附近被割裂, 所以每组被分成两团, 通过计算可以知道, 随着  $\varphi$  的增大,  $\nabla\theta_3$  的振荡幅度变大, 即凝聚体被分割得越显著.

### 3.2 凝聚体中非正则涡旋态的动力学演化

波函数相位给凝聚体提供了一个速度场  $\mathbf{v} = \hbar\nabla\theta/M$ , 凝聚体的密度分布演化由相位场驱动. 位于二维圆盘状凝聚体中心的正则涡旋 (相位奇点与凝聚体中心重合) 由于具有旋转对称性, 在没有扰动的情况下是可以稳定存在的. 高拓扑荷的正则涡旋动力学不稳定, 会分裂成为整数个基本正则涡旋 [39]. 研究表明, 凝聚体中的非正则涡旋态是不稳定的, 其在动力学演化过程中会衰变成正则涡旋, 接着按照正则涡旋的动力学行为继续演化, 衰变行为受相位结构参数  $m$ ,  $n$  或  $\omega$  的支配.

对于 PEPV 态凝聚体, 如图 3 所示, 凝聚体在初始相位的驱动下产生围绕奇点的旋转粒子流, 粒子流在穿过低密度区时会发生干涉. 接着, 非正则涡旋衰变成相应拓扑荷数目的正则涡旋簇. 由于其

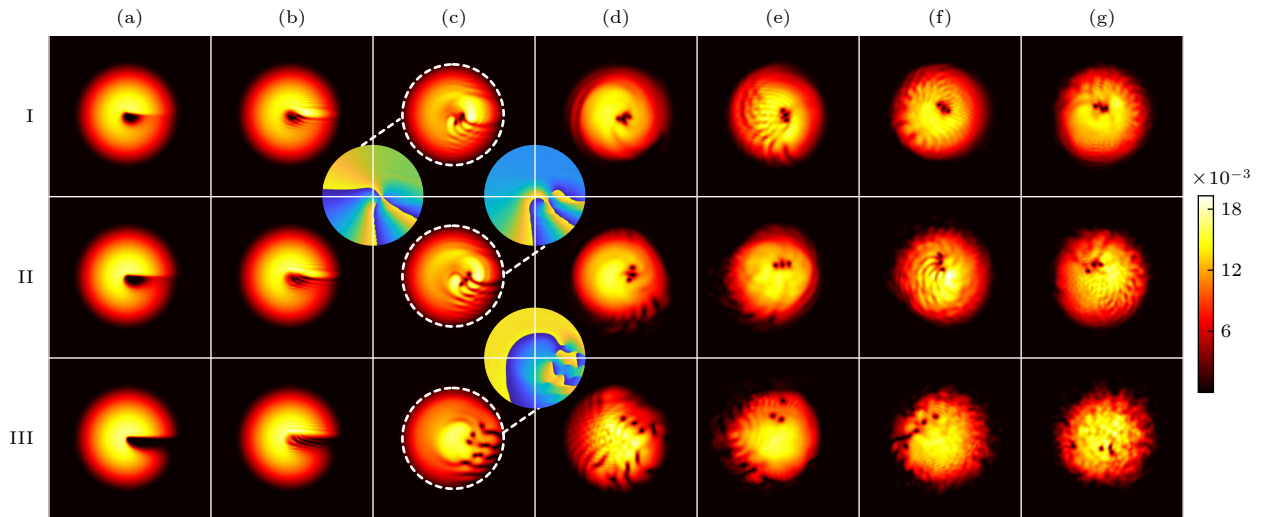


图 3 拓扑荷  $m = 3$  的 PEPV 型非正则涡旋态凝聚体的动力学演化, 其中 I 到 III 行分别对应幂次  $n = 3, 5, 10$ . I(a)—I(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 0.1, 0.4, 1.5, 3.5, 6.5, 9.5$ ; II(a)—II(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 0.1, 0.5, 2.5, 5.5, 8.5, 10$ ; III(a)—III(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 0.1, 0.9, 3.5, 6.0, 9.5, 14.5$ . 其中子图表示与白色虚线包围部分凝聚体密度分布对应的相位分布

Fig. 3. Dynamic evolution of condensates in PEPV state, where the topological charge is  $m = 3$ , and the corresponding powers from row I to row III are  $n = 3, 5, 10$ , respectively: I(a)—I(g) Times are  $t/t_0 = 0, 0.1, 0.4, 1.5, 3.5, 6.5, 9.5$ ; II(a)—II(g) times are  $t/t_0 = 0, 0.1, 0.5, 2.5, 5.5, 8.5, 10$ ; III(a)—III(g) times are  $t/t_0 = 0, 0.1, 0.9, 3.5, 6.0, 9.5, 14.5$ . Here, the subgraphs represent the corresponding phase distributions of the density distributions surrounded by the white dashed circles.

相位不具有旋转对称性, 所以该正则涡旋簇会整体偏离中心并做逆时针旋转 ( $m > 0$ ). 期间, 正则涡旋簇所包含的涡旋会相互缠绕, 由于凝聚体自干涉以及涡旋簇运动所引起的表面密度波激发相互叠加, 并弥散至整个凝聚体. 当幂次  $n$  较小时, 拓扑荷为  $m$  的非正则涡旋会劈裂成  $m$  个单荷的正则涡旋簇, 如图 3I 所示. 随着幂次  $n$  的增大, 非正则涡旋劈裂形成的涡旋簇偏离凝聚体中心的距离越远, 涡旋簇里的涡旋间距也越大. 当  $m = 3$  时, 涡旋簇以涡旋链的形式存在, 如图 3I 和图 3II 所示. 随着  $n$  的增大, 凝聚体在相位奇点位置分离得越来越明显 (见图 3(a)), 其自身的干涉也会变得越来越强 (见图 3(c)), 从而产生暗孤子. 由于原子间的非线性相互作用<sup>[40]</sup>, 暗孤子会衰变为由两个拓扑荷相反的正则涡旋构成的正则涡旋对<sup>[32]</sup>, 如图 3III(c), (d) 所示. 产生涡旋对的数目与孤子的长度有关. 而这些涡旋对在运动过程中又会经历重组、湮灭、再生的过程, 直至在凝聚体的边缘形成鬼涡旋结构并最终消失, 如图 3III(e)—III(g) 所示. 在此过程中, 由非正则涡旋衰变形成的涡旋簇结构会受到由于干涉条纹衰变产生的涡旋对的影响, 不能像无涡旋对激

发时一样, 再保持相对稳定的结构. 同时, 这一过程会在凝聚体中产生强烈的表面密度波激发, 如图 3III(g) 所示. 当  $m > 3$  时, 涡旋簇中涡旋会呈现更加复杂的运动轨迹.

对于 NPEPV 态凝聚体, 其动力学过程也表现为受相位场驱动的不同分块间干涉的过程. 若拓扑荷  $m = 1$ , 则其退化到 PEPV 态  $m = 1$  的情形. 如图 4(a) 所示, 与 PEPV 态不同的是, NPEPV 并没有完全破坏旋转对称性, 仍具有  $C_m$  对称性. 由于动力学不稳定性, 拓扑荷为  $m$  的非正则涡旋会衰变成由  $m$  个基本正则涡旋组成的涡旋簇,  $m = 2$  个单荷组成互相缠绕的同荷涡旋对,  $m \geq 3$  个单荷正则涡旋会形成围绕凝聚体中心旋转的正  $m$  多边形结构. 如图 4I 和图 4II 所示, 若初始非正则涡旋幂次  $n$  较小, 这一结构相当稳定, 能够抵抗表面密度波和孤子及涡旋对激发的影响. 如图 4I(b) 所示, 5 个涡旋由暗孤子连接形成正五边形孤子-涡旋复合结构. 暗孤子进一步收缩 (如图 4I(c) 所示), 再扩张演化为环状孤子 (如图 4I(d) 所示), 并与涡旋簇再次相互作用 (如图 4I(e) 所示) 后, 最终形成稳定的正五边形涡旋簇结构 (如图 4I(f) 所示). 类似于文

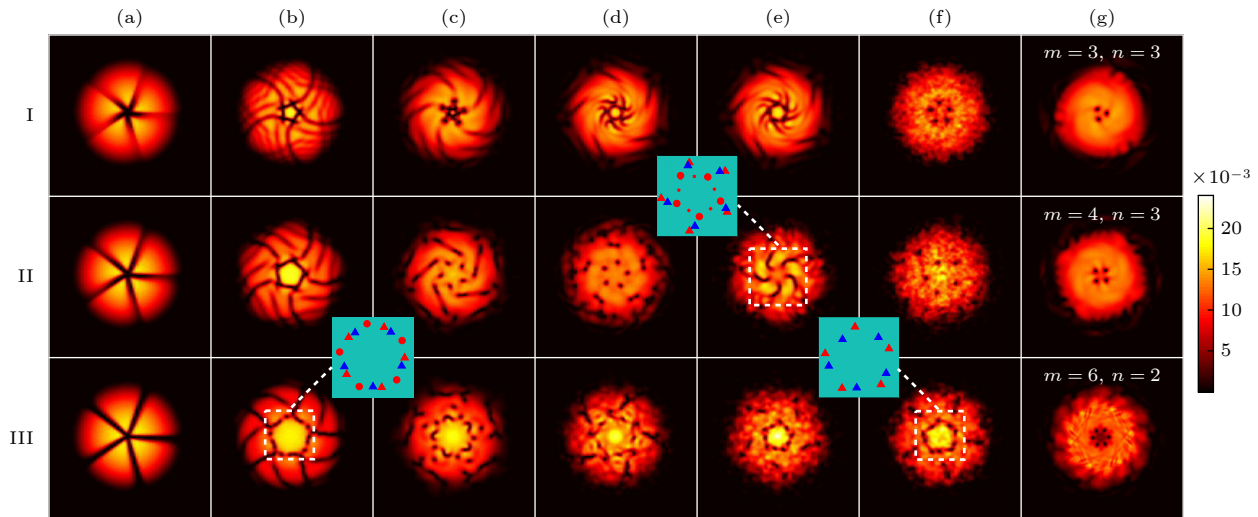


图 4 NPEPV 型非正则涡态凝聚体的动力学演化 (a)—(f) 拓扑荷  $m = 5$ , I 到 III 行分别对应幂次  $n = 3, 5, 10$ ; I(a)—I(f) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 0.55, 1.25, 1.55, 1.65, 16$ ; II(a)—II(f) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 0.85, 1.8, 2.5, 5, 16$ ; III(a)—III(f) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 1.1, 1.8, 4.95, 8.2, 8.9$ ; I(g)—III(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 2.5, 2.5, 3.1$ . 其中子图表示涡旋核的位置, 圆点表示非正则涡旋衰变形成的正则涡旋核, 三角表示干涉形成的涡旋对. 红色表示涡旋荷为正, 蓝色表示涡旋荷为负

Fig. 4. Dynamic evolution of condensates in NPEPV states. The topological charge in (a)—(f) is  $m = 5$ , the powers from row I to row III are  $n = 3, 5, 10$ , respectively: I(a)—I(f) Time are  $t/t_0 = 0, 0.55, 1.25, 1.55, 1.65, 16$ , respectively; II(a)—II(f) times are  $t/t_0 = 0, 0.85, 1.8, 2.5, 5, 16$ , respectively; III(a)—III(f) times are  $t/t_0 = 0, 1.1, 1.8, 4.95, 8.2, 8.9$ , respectively; I(g)—III(g) times are  $t/t_0 = 2.5, 2.5, 3.1$ , respectively. The subgraphs show the positions of the vortex cores. The solid dots represent the canonical vortices evolved from the decay of NPEPVs. The solid triangles represent vortex pairs evolved from the interference of condensates. The vortices with positive and negative topological charge are labeled in red and blue color, respectively.

献 [10] 中由淬灭动力学形成的环状暗孤子的演化过程. 而在这一过程中, 正五边形涡旋簇结构始终保持稳定. 随着幂次  $n$  的增大, 系统动力学过程中的拓扑激发更加强烈, 凝聚体干涉过程中产生了更多的涡旋对激发.

图 4II 给出了  $n = 5$  的 NPEPV 态的动力学过程, 可以看到涡旋对主要在正则涡旋簇的外部产生, 在某些时刻会与正则涡旋簇组合形成特殊结构 (见图 4II(c)—II(e)). 子图给出了图 4II(e) 星形斑图结构中的涡旋排布. 在此种情况下, 涡旋对的产生未对涡旋簇结构产生明显影响. 当  $n = 10$  时, 干涉产生的涡旋对会与非正则涡旋衰变形成的涡旋簇结合, 形成更加丰富的动力学斑图, 如图 4III(b) 中的涡旋-涡旋对嵌套结构, 图 4III(c) 中涡旋-孤子-涡旋嵌套结构. 正则涡旋簇和涡旋对组成的嵌套结构的面积不再保持稳定, 而是会随着涡旋斑图的变化扩张收缩. 特别值得注意的是, 在正则涡旋簇与涡旋对相互作用的过程中, 正则涡旋簇会俘获涡旋对中与之拓扑荷相反的涡旋, 组成涡旋对, 并形成涡旋对构成的正五边形结构, 如图 4III(e), III(f) 所示, 这也再一次显示了由非正则涡旋衰变形成的正涡旋簇结构的鲁棒性. 对于同一种正  $m$  多边形, 其面积随幂次的增大而增大, 与此同时, 整

个凝聚体的密度分布轮廓也呈现出  $m$  多边形结构, 如图 4(f) 所示. 在整个动力学演化过程中, 类似的涡旋斑图会循环出现多次, 正则涡旋簇正  $m$  多边形结构会逐渐变形, 直到被破坏. 图 4(g) 给出了拓扑荷分别为 3, 4, 6 的非正则涡旋衰变形成的涡旋簇结构.

对于 OSCPV 态凝聚体, 其相位结构不仅完全破坏了旋转对称性, 而且  $\theta$  在  $[0, 2\pi)$  上是振荡的, 即失去单调性, 形成不均匀的分块凝聚体. 与 PEPV 态凝聚体类似, 当角频率  $\omega$  较小时, 凝聚体各部分间干涉没有在凝聚体内部形成拓扑激发, 非正则涡旋衰变为偏离中心的由  $m$  个基本正则涡旋组成的涡旋簇, 其在凝聚体中运动的过程中不能形成固定有序的结构 (图 5I). 随着角频率  $\omega$  增大, 凝聚体分块增多, 且块间分离更加明显, 导致更剧烈的干涉. 然而, 由干涉产生的大量涡旋对形成的涡旋湍流会在很短的时间内湮灭, 在凝聚体内只留下由非正则涡旋衰变形成的正则涡旋簇. 由于涡旋湍流的影响, 剩余的可观测的正则涡旋数目不一定等于  $m$ , 如图 5II 和图 5III 所示. 在图 5III(f) 中, 仅剩余两个可观测涡旋. 图 5III 的子图给出了与凝聚体密度分布相对应的相位分布, 可以明显看出, 随着时间演化, 凝聚体出现了整体的速度分布.

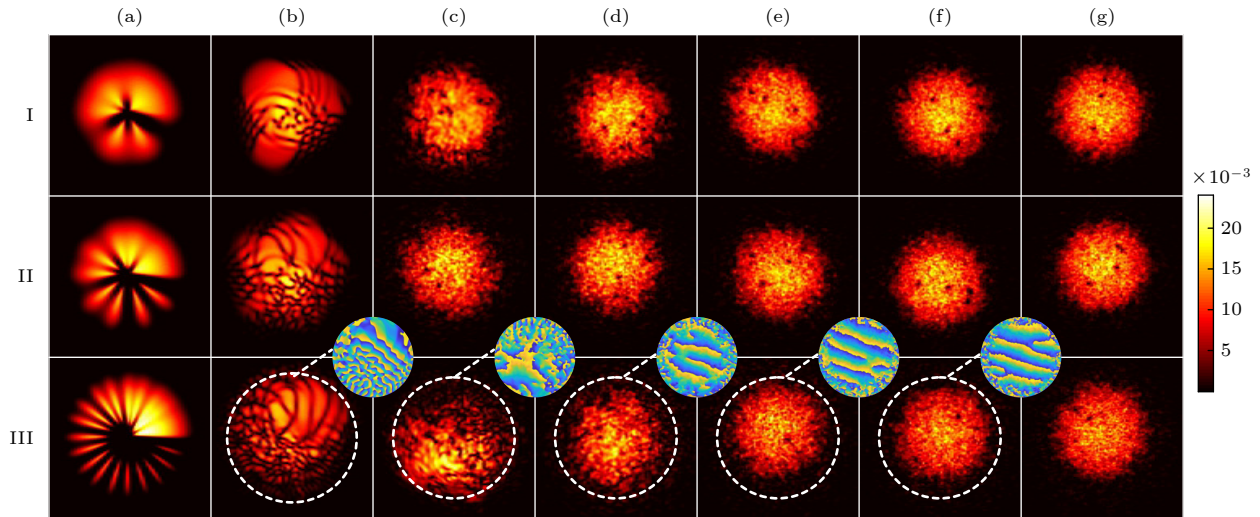


图 5 拓扑荷为  $m = 5$  的 OSCPV 型非正则涡旋态凝聚体的动力学演化, 其中 I—III 行分别对应角频率  $\omega = 3, 5, 10$ . I(a)—I(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 1, 9.2, 16.2, 25.8, 35.75, 45.65$ ; II(a)—II(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 1, 20, 25.1, 36.5, 47.6, 50$ ; III(a)—III(g) 分别对应时间  $t/t_0 = 0, 1, 4, 11, 26.5, 36.5, 45.5$ . II—III 之间的子图表示与白色虚线包围部分凝聚体密度分布对应的相位分布

Fig. 5. Dynamic evolution of condensates in OSCPV states with topological charge  $m = 5$ . The angular frequencies from row I to row III are  $\omega = 3, 5, 10$ , respectively: I(a)—I(g) times are  $t/t_0 = 0, 0.35, 2.6, 10.38, 12.02, 12.84$ , respectively; II(a)—II(g) times are  $t/t_0 = 0, 0.3, 7.56, 10.14, 11.7, 12.7, 14.26$ , respectively; III(a)—III(g) times are  $t/t_0 = 0, 0.4, 9.48, 12.04, 15.82, 18.42, 19.5$ , respectively. The subgraphs between row II and III represent the corresponding phase distributions of the density distributions surrounded by the white dashed circles.

### 3.3 凝聚体的角动量和质心运动

轴向角动量  $L_z$  是描述二维凝聚体中涡旋性质的一个重要物理量. 若外势具有旋转对称性, 则  $L_z$  守恒.

$$\langle L_z \rangle = \iint \psi^*(x, y) \hat{l}_z \psi(x, y) dx dy, \quad (5)$$

其中,  $\hat{l}_z = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$ . 我们知道, 位于凝聚体中心的正则涡旋, 角动量是  $\hbar$  的整数倍, 即  $\langle L_z \rangle = m\hbar$ , 随着涡旋奇点偏离中心而逐渐减小. 这里计算了 3 种非正则涡旋态凝聚体的角动量, 发现 PEPV 态和 NPEPV 态的角动量与非正则涡旋光束本身角动量 [7,8] 随幂次  $n$  的变化明显不同 (如图 6(a) 所示). 结果显示, 当幂次  $n = 1$  时, 凝聚体为正则涡旋态, 角动量  $\langle L_z \rangle = m\hbar$ . 而随着  $n$  的增大, 角动量逐渐减小, 这也表明由非正则涡旋态退化的正则涡旋簇必然会偏离中心,  $n$  越大偏离越显著. 比较 PEPV 态和 NPEPV 态的角动量, 发现对于相同的  $n \neq 1$  的幂次, NPEPV 态的角动量 (图 6(a) 中实线所示) 大于 PEPV 态的角动量 (图 6(a) 中虚线所示), 这是因为 PEPV 态完全破坏了旋转对称性, 而 NPEPV 态虽然破坏了连续旋转对称性, 但其仍遗留有  $C_m$  对称性. 图 6(b) 为 OSCPV 态的角动量, 它随角频率  $\omega$  的增大而减小. 当  $\omega = 1$  时, 随着拓扑荷  $m$  的增大, 非正则涡旋核越发偏离凝聚体中心, 同时凝聚体的分块也越发显著, 且下半平面 (高速区, 见图 1(d)) 凝聚体密度占比不断降低 (见图 2I(g)—I(i)), 导致凝聚体的  $L_z$  小于  $m\hbar$ ,  $m$  越大, 向下偏离量越大. 对于给定的拓扑荷, 当  $\omega$

增大时, 涡旋核的扩张和凝聚体的分裂更为明显; 当  $\omega$  较小时,  $L_z$  下降较为剧烈, 当  $\omega$  进一步增大时, 下半平面密度已经较低, 占比变化趋于平缓, 因此  $L_z$  的变化趋势也趋缓.

相位印记以及凝聚体中的动力学激发均会影响凝聚体的质心运动 [13,35]. 作为一种整体激发模式, 凝聚体的质心运动对于理解束缚凝聚体的物理性质及多体系统非线性相互作用的本质有着重要的意义. 最后用以下方程来计算凝聚体的质心轨迹:

$$x_{jc}(t) = \iint x_j |\psi(x, y, t)|^2 dx dy. \quad (6)$$

由于 NPEPV 型非正则涡旋态凝聚体具有  $C_m$  对称性, 且当  $n$  较小时, 其激发斑图也具有  $C_m$  对称性, 因此其质心应保持不变. 经过计算可得到其质心轨迹是  $x$ - $y$  平面上的一个点, 如图 6(c) 所示. 尽管凝聚体内表面密度波激发和涡旋激发及运动看似没有规律, 但是 PEPV 和 OSCPV 非正则涡旋态凝聚体的质心运动呈现出很强的规律性. 研究表明, 涡旋对或涡旋环会引起凝聚体质心在其运动方向上的振荡. 这种偶极振荡由三角函数描述, 频率为束缚势阱频率, 恰好是凝聚体的第一激发态 [35]. 较强的开尔文波扰动会影响凝聚体质心的振荡频率. 研究发现, 非正则涡旋动力学导致凝聚体在  $x$  和  $y$  方向上的运动分别是具有不同振幅的偶极振荡, 其振荡频率为势阱的径向束缚频率  $\omega_r$ . PEPV 和 OSCPV 型非正则涡旋态凝聚体的质心轨迹如图 6(c) 所示, 是中心为坐标原点 (凝聚体初始中心) 的椭圆. 以椭圆的长轴  $a$ , 面积  $S$  和长轴与  $x$  轴正方向的夹角  $\alpha$  为凝聚体质心轨迹的特征量.

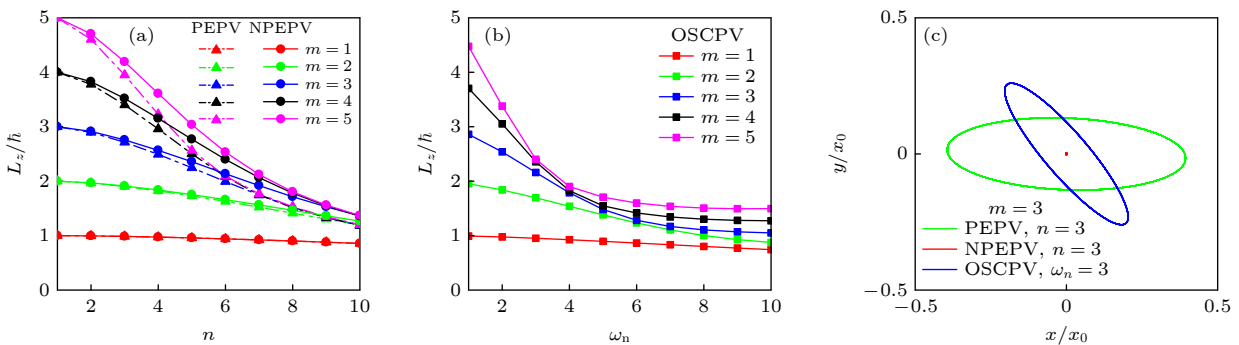


图 6 凝聚体的轴向角动量与非正则涡旋幂次及角频率的关系, 以及非正则涡旋的质心轨迹. (a) 实心三角和实心圆点分别代表 PEPV 和 NPEPV 型非正则涡旋的轴向角动量; (b) OSCPV 型非正则涡旋的轴向角动量; (c) 凝聚体的质心轨迹

Fig. 6. The axial angular momenta of condensates v.s. the power or the frequency of the noncanonical vortices, and the trajectories of the center of mass of the condensates with noncanonical vortices: (a) The solid triangles and the solid dots represent the axial angular momenta of condensates in PEPV and NPEPV states, respectively; (b) the axial angular momentum of condensates in OSCPV states, respectively; (c) the trajectory of the center-of-mass of the condensate.

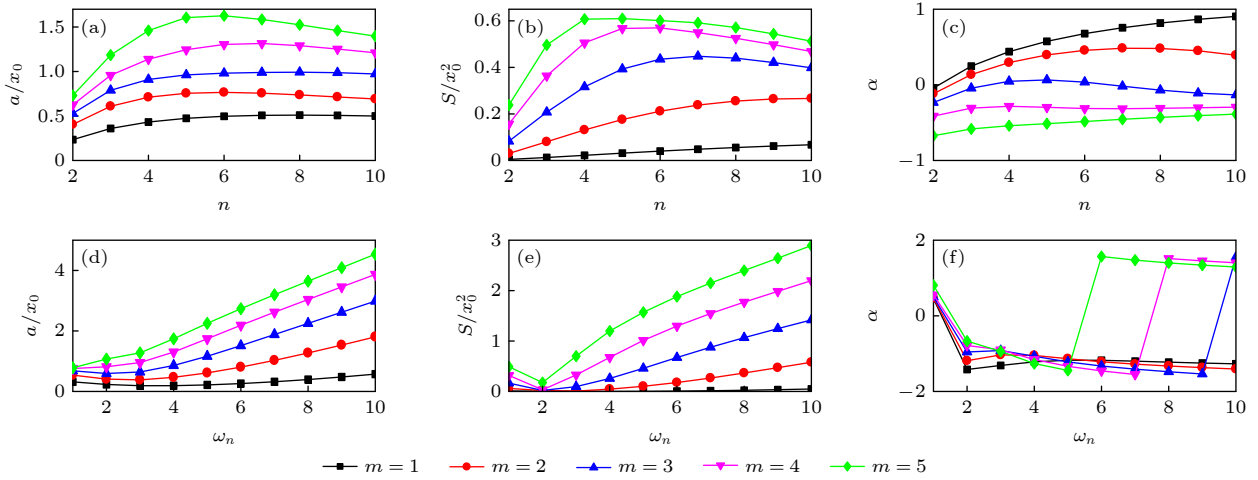


图 7 非正则涡旋态凝聚体质心轨迹特征量随相位参数变化情况 (a)—(c) PEPV 态凝聚体椭圆质心轨迹的长轴  $a$ , 面积  $S$  和长轴与  $x$ -轴正方向的夹角  $\alpha$  随相位场幂次  $n$  变化的曲线; (d)—(f) OSCPV 态凝聚体椭圆质心轨迹的长轴  $a$ , 面积  $S$  和长轴与  $x$ -轴正方向的夹角  $\alpha$  随相位场角频率  $\omega$  的变化

Fig. 7. The relations between the characteristic parameters of the center of mass trajectories of the condensates in noncanonical vortex states and the corresponding phase field parameters: (a)—(c) The curves of the length of major axis  $a$ , the area  $S$ , the angle  $\alpha$  between the major axis and the positive direction of the  $x$ -axis v.s. the power of the corresponding PEPV phase fields, respectively; (d)—(f) the curves of the length of major axis  $a$ , the area  $S$ , the angle  $\alpha$  between the major axis and the positive direction of the  $x$ -axis v.s. the corresponding OSCPV phase fields, respectively.

图 7(a)—(c) 对应 PEPV 态质心轨迹参数随幂次  $n$  的变化情况. 当幂次  $n$  相同时, 拓扑荷  $m$  越大,  $a, S, \alpha$  越大, 参数曲线上凸的趋势越明显. OSCPV 态质心轨迹参数随角频率  $\omega$  的变化情况见图 7(d)—(f). 当幂次  $n$  相同时, 随着拓扑荷  $m$  的增大,  $a, S$  增大. 而对于不同  $\omega$ ,  $\alpha$  随  $m$  的变化并不是单调的, 这与 OSCPV 随  $\omega$  振荡的特性相吻合. 当  $\omega$  为某一特定值时,  $\alpha$  会发生一个跳变.

## 4 结 论

通过研究不同类型非正则涡旋光场与玻色-爱因斯坦凝聚体的作用, 发现其相位结构会影响凝聚体的密度分布, 从而在凝聚体中形成不同的非正则涡旋结构. 其初始结构和动力学行为明显依赖于涡旋拓扑荷  $m$ , 幂次  $n$ , 或者角频率  $\omega$ . 非正则涡旋结构是动力学不稳定的, 在自由演化过程中会衰变成正则涡旋簇. 随着幂次或频率的增大, PEPV 和 OSCPV 型非正则涡旋的偏心率不断变大, 而 NPEPV 型非正则涡旋始终保持  $C_m$  对称性. 3 种类型非正则涡旋态凝聚体的密度分割均随幂次或频率的增大而增大, 从而导致动力学过程中的干涉增强, 产生更多的拓扑激发, 增加了动力学过程的复杂性. 在幂次和频率比较小的情况下, PEPV 和 OSCPV

态凝聚体中可形成内部涡旋互相缠绕的涡旋簇. 而 NPEPV 态凝聚体中会形成围绕凝聚体中心旋转的正  $m$  边形的正则涡旋簇, 这一结构具有很强的鲁棒性, 基本不受干涉产生的涡旋对的影响. 我们知道, 通过旋转凝聚体也可以获得涡旋晶格结构<sup>[29,30,41]</sup>, 晶格的类型由旋转的角频率决定, 但是晶格保持稳定的前提是要一直维持凝聚体旋转. 而通过分块 BEC 的干涉获得的涡旋晶格是由正反涡旋交替形成的, 会组成涡旋对进而湮灭, 其涡旋格子的构型不能够稳定存在<sup>[38]</sup>. 因此, NPEPV 态凝聚体提供了一种简便可控地生成稳定多边形涡旋簇的方法. 对所有类型, 非正则涡旋衰变形成的正则涡旋簇都会排斥干涉产生的涡旋对存在于凝聚体内, 使得这些涡旋对会更快地湮灭或者在凝聚体边缘形成鬼涡旋. 当幂次  $n$  进一步增大时, NPEPV 型涡旋衰变形成的正多边形正则涡旋簇会与干涉形成的涡旋对产生相互作用, 构成复杂的嵌套涡旋斑图, 而且还能够俘获涡旋对中的异荷涡旋, 形成由涡旋对组成的  $m$  边形涡旋结构. 这一涡旋结构与环状暗孤子衰变后形成的涡旋对结构类似, 会做收缩扩张的振荡运动<sup>[10]</sup>. 其他两种非正则涡旋衰变形成的涡旋簇, 由于强干涉产生的激发而向凝聚体边缘运动.

对于相同的拓扑荷  $m$ , 这些非正则涡旋态的轴

向角动量  $L_z$  随幂次  $n$  或角频率  $\omega$  的增大而减小. PEPV 和 NPEPV 型的轴向角动量衰减可用高斯函数来描述, 其下降速度明显快于相应的光涡旋传播过程中的下降速度<sup>[8]</sup>. OSCPV 型由于凝聚体分块更多, 对称性破坏更强, 其轴向角动量随角频率的增大更加迅速地减小. 值得注意的是, 凝聚体演化过程中的密度分布与光强分布呈现出明显的区别. PEPV 型非正则涡旋光在传播过程中呈现出螺旋型的轨迹<sup>[7]</sup>, NPEPV 型非正则涡旋光场呈现出明显的分块特性, 涡旋与光强峰值成对出现<sup>[8]</sup>. 而相应的 NPEPV 态凝聚体的密度分布相对更均匀, 凝聚体中的激发形式也更丰富, 其有规律的质心振荡整体激发模式也是涡旋光场所不具备的.

感谢西北大学现代物理研究所郑俊辉副教授提出的建议.

## 参考文献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [2] O'Neil A T, MacVicar I, Allen L, Padgett M J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 053601
- [3] Molina-Terriza G, Torres J P, Torner L 2007 *Nat. Phys.* **3** 305
- [4] Ng J, Lin Z F, Chan C T 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 103601
- [5] Fan C J, Liu Y X, Wang X Y, Chen Z Y, Pu J X 2018 *JOSAA* **35** 903
- [6] Grier D G 2003 *Nature* **424** 810
- [7] Li P, Liu S, Peng T, Xie G F, Gan X T, Zhao J L 2014 *Opt. Express* **22** 7598
- [8] Shen D H, Wang K, Zhao D M 2019 *Opt. Express* **27** 24642
- [9] Barrett M D, Sauer J A, Chapman M S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 010404
- [10] Du R, Xing J C, Xiong Bo, Zheng J H, Yang T 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 070304
- [11] Burger S, Cataliotti F S, Fort C, Minardi F, Inguscio M, Chiofalo M L, Tosi M P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4447
- [12] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y J, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [13] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen Shuai, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [14] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z K, Miao J, Huang L H, Chai S J, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [15] Wang Z Y, Cheng X C, Wang B Z, et al. 2021 *Science* **372** 271
- [16] Wang L, Liu J S, Li J, Zhou X L, Chen X R, Liu C F, Liu W M 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010303
- [17] Cheng Q L, Bai W K, Zhang Y Z, Xiong B, Yang T 2018 *Laser Phys.* **29** 015501
- [18] Wang D M, Xing J C, Du R, Xiong B, Yang T 2021 *Chin. Phys. B* **30** 120303
- [19] Martin A M, Scott R G, Fromhold T M 2007 *Phys. Rev. A* **75** 065602
- [20] Gauthier G, Reeves M T, Yu X Q, Bradley A S, Baker M A, Bell T A, Rubinsztein-Dunlop H, Davis M J, Neely T W 2019 *Science* **364** 1264
- [21] Madison K W, Chevy F, Wohlleben W, Dalibard J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806
- [22] Wright K C, Blakestad R B, Lobb C J, Phillips W D, Campbell G K 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 025302
- [23] Chen X Y, Yang T, Yang W L, Liu W M 2020 arXiv: 2007.02274 [cond-mat.quant-gas]
- [24] Theis M, Thalhammer G, Winkler K, Hellwig M, Ruff G, Grimm R, Denschlag J H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 123001
- [25] Denschlag J, Simsarian J E, Feder D L, Clark C W, Collins L A, Cubizolles J, Deng L, Hagley E W, Helmerson K, Reinhardt W P, Rolston S L, Schneider B I, Phillips W D 2000 *Science* **287** 97
- [26] Crasovan L C, Vekslerchik V, Pérez-García V M, Torres J P, Mihalache D, Torner L 2003 *Phys. Rev. A* **68** 063609
- [27] Möttönen M, Virtanen S M M, Isoshima T, Salomaa M M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033626
- [28] Yang T, Hu Z Q, Zou S, Liu W M 2016 *Scientific Reports* **6** 1
- [29] Coddington I, Engels P, Schweikhard V, Cornell E A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 100402
- [30] Tsubota M, Kasamatsu K, Ueda M 2002 *Phys. Rev. A* **65** 023603
- [31] Xiong B, Yang T, Lin Y J, Wang D W 2020 *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **53** 075301
- [32] Yang T, Xiong B, Benedict K A 2013 *Phys. Rev. A* **87** 023603
- [33] Xiong B, Yang T, Benedict K A 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043602
- [34] Bai W K, Yang T, Liu W M 2020 *Phys. Rev. A* **102** 063318
- [35] Bai W K, Xing J C, Yang T, Yang W L, Liu W M 2021 *Results Phys.* **22** 103828
- [36] Zou S, Bai W K, Yang T, Liu W M 2021 *Phys. Fluids* **33** 027105
- [37] Scherer D R, Weiler C N, Neely T W, Anderson B P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 110402
- [38] Ruben Gary, Paganin D M, Morgan M J 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013631
- [39] Yang T, Henning A J, Benedict K A 2014 *Laser Phys.* **24** 115502
- [40] Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [41] Feder D L, Clark C W, Schneider B I 1999 *Phys. Rev. A* **61** 011601

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

# Noncanonical vortex states and dynamics in Bose-Einstein condensates\*

Xing Jian-Chong<sup>1)</sup> Zhang Wen-Jing<sup>2)</sup> Yang Tao<sup>1)2)3)†</sup>

1) (*Shaanxi Key Laboratory for Theoretical Physics Frontiers, Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

2) (*School of Physics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

3) (*Peng Huanwu Center for Fundamental Theory (Xi'an), Xi'an 710127, China*)

( Received 1 December 2022; revised manuscript received 29 January 2023 )

## Abstract

Vortex excitations triggered by nonlinear interactions in Bose-Einstein condensates have attracted interest in the study of ultracold atoms. However, most studies focus on canonical vortex states with integer topological charges. In this paper, we study the dynamic properties of noncanonical vortex condensates with three phase distributions: power-exponent, new type power-exponent and oscillation type. The results show that the noncanonical vortices are dynamic unstable and their density distributions obviously depend on the phase parameters of the initial optical phase masks. Different noncanonical vortices decay into canonical clusters with diverse configurations showing rich topological excitation patterns. In particular, a new power exponential noncanonical vortex state decays into a stable canonical polygonal vortex cluster structure. Because the phase structures of the noncanonical optical vortices destroy the rotational symmetry of the condensate, the angular momentum of the condensate is no longer quantized, and its value changes with the power of the azimuthal angle of the optical field or the oscillation frequency, which is obviously different from the evolution of the corresponding noncanonical vortex optical field itself. In the dynamical process, the center-of-mass trajectory of noncanonical vortex condensates with the new type of power exponent phase is always a point, while for the noncanonical vortex condensates with power exponent and oscillating phase, the center-of-mass trajectories are ellipses centering at the origin of coordinates.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, noncanonical vortex states, canonical vortex cluster, angular momentum, center-of-mass trajectories

**PACS:** 03.75.Kk, 05.30.Jp, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.72.20222289

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12175180, 11934015), the Open Research Fund of State Key Laboratory of Transient Optics and Photonics, China (Grant No. SKLST202010), the Major Basic Research Program of Natural Science of Shaanxi Province, China (Grant Nos. 2017KCT-12, 2017ZDJC-32), and the Shaanxi Fundamental Science Research Project for Mathematics and Physics, China (Grant No. 22JSZ005).

† Corresponding author. E-mail: [yangt@nwu.edu.cn](mailto:yangt@nwu.edu.cn)



玻色-爱因斯坦凝聚中的非正则涡旋态及其动力学

邢健崇 张文静 杨涛

**Noncanonical vortex states and dynamics in Bose-Einstein condensates**

Xing Jian-Chong Zhang Wen-Jing Yang Tao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100306 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222289

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222289>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191424>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

简谐与光晶格复合势阱中旋转二维玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋链

Vortex chains in rotating two-dimensional Bose-Einstein condensate in a harmonic plus optical lattices potential

物理学报. 2022, 71(22): 220304 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221312>

玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬火孤子与冲击波

Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2021, 70(18): 180303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210564>

旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展

The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010303 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191648>

多个子玻色-爱因斯坦凝聚气体膨胀叠加形成的量子涡旋现象研究

Quantum vortex phenomenon of many sub-Bose-Einstein condensations formed by expansion and superposition

物理学报. 2018, 67(1): 010501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171708>