

含时变切换的广义时滞反馈控制镇定 多旋转周期轨线*

曾尖尖 鲍丽娟†

(南昌航空大学数学与信息科学学院, 南昌 330063)

(2022 年 12 月 2 日收到; 2023 年 2 月 12 日收到修改稿)

基于时变切换策略, 给出了原广义时滞反馈控制的一种改进方案, 即含时变切换的广义时滞反馈控制. 含时变切换的广义时滞反馈控制只在特定时段上对受控系统施加控制, 而在其他时段上不施加控制, 这不同于原广义时滞反馈控制具有的恒定控制. 通过实例分析, 研究了含时变切换的广义时滞反馈控制在镇定不稳定多旋转周期轨线中的具体性能. 通过计算受控周期轨线的最大 Floquet 乘数, 得到了受控多旋转周期轨线的稳定区域随切换频率变化的关系图. 结果表明, 随着切换频率的增大, 受控多旋转周期轨线的稳定区域呈现非平滑变化. 特别地, 当选择适当的切换频率时, 含时变切换的广义时滞反馈控制的稳定区域显著大于原广义时滞反馈控制的稳定区域.

关键词: 混沌控制, 时滞反馈, 周期轨线, Floquet 乘数

PACS: 05.45.Gg, 05.45.-a, 02.30.Yy, 02.30.Ks

DOI: 10.7498/aps.72.20222294

1 引言

混沌系统中含有无数个不稳定周期轨线, 呈现出丰富且复杂的非线性动力学行为, 其典型特征是对初值的敏感性和不可预测性. 近年来, 混沌控制成为非线性科学领域的一个热点问题, 其广泛地应用在图像加密、保密通信和混沌电路等领域^[1-3]. 最初, 研究者们通过修改系统的分叉参数, 或者利用外部的周期信号去同步混沌系统, 从而达到控制混沌的目的^[3-5]. 采用这种方法对混沌系统进行控制时, 会改变原系统的动力学行为, 因此, 通常需要比较大的控制信号和比较大的能量消耗.

1990 年, 物理学家 Ott, Grebogi 和 Yorke^[6] 基于混沌吸引子中含有无数个不稳定周期轨线, 首次提出了 OGY 控制方法. 当系统运动到预定的不

稳定周期轨线附近时, 对系统的参数进行微小的扰动, 从而使系统稳定在该周期轨线上^[7]. 因为该方法是将混沌系统稳定在原有的周期轨线上, 所以只需要比较小的控制信号和比较小的能量消耗. 但是, OGY 方法对外界扰动极其敏感, 当系统远离目标周期轨线时, 无法对其镇定. 自 OGY 方法之后, 研究者们提出了时滞反馈控制方法 (DFC). DFC 方法是把当前系统输出状态信号与过去某时刻的输出状态信号之差作为反馈控制信号的来源, 其中过去输出状态的时间滞后值设置成等于预定要控制的不稳定周期轨线的周期^[8]. 使用 DFC 方法控制混沌系统非常简便, 仅需要测得目标周期轨线的周期, 而不需要其他外加的参考信息.

DFC 方法在实际工程中得到了广泛的应用^[9-11]. 但是, 在 DFC 方法的实际应用中, 研究发现 DFC 方法仍然存在一些缺陷. 比如 DFC 方法无法镇定含有奇数个实部大于零的条件 Lyapunov 指数的

* 国家自然科学基金 (批准号: 11872197) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: baolijuan2718@163.com

不稳定周期轨线^[12], 特别是 DFC 方法不能镇定某些不稳定的多旋转周期轨线^[13–15]. 为了克服这些缺陷, 研究者们提出了很多方法来改进经典 DFC 方法^[16–19]. 其中, 广义时滞反馈控制 (EDFC) 是对经典 DFC 方法的重要改进之一^[19]. EDFC 方法是采用系统输出状态的无限时间滞后信息来构造控制信号. 与经典 DFC 方法相比, EDFC 方法具有更广泛的应用. EDFC 方法可以稳定非线性摆的不稳定多旋转周期轨线^[20]. 在对电流逆变器的混沌控制和锁相环的控制中, EDFC 可以较快地稳定周期轨线^[21,22].

在混沌控制的实际应用中, 控制参数常受到各种限制. 当受控周期轨线的稳定区域太小且不在控制参数的可调范围内时, 则无法镇定周期轨线. 这里稳定区域是指参数空间的某个区域, 当控制参数属于该区域时, 受控周期轨线是稳定的. 因此, 使用合适的方法进一步扩大受控周期轨线的稳定区域具有重要的实际意义^[13,19,23]. 切换策略是一种常用的控制技术^[24]. 而时变切换是较简单的切换策略之一. 在时变切换控制中, 控制信号仅在特定的时间段上存在, 而在其他时段上不存在控制信号. 在耦合系统的同步控制中, 时变切换策略用于改变系统的耦合方式^[25], 从而提高耦合系统的同步能力. 研究发现, 在选择适当的切换频率时, 含时变切换的耦合系统的同步性能明显优于标准耦合系统的同步性能^[26]. 为了进一步理解时变切换对同步流形稳定性的影响机制, 分析了同步流形局部条件 Lyapunov 指数的分布^[27], 发现时变切换以非线性方式改变同步流形的稳定性.

EDFC 在镇定不稳定多旋转周期轨线时, 受控周期轨线的稳定区域常常较小, 导致在混沌控制的实际应用中无法镇定不稳定多旋转周期轨线. 因此, 采用适当的方法扩大受控多旋转周期轨线的稳定区域具有重要的工程实践意义. 本文基于时变切换策略^[26,28], 给出了广义时滞反馈控制的一种改进方法, 即含时变切换的广义时滞反馈控制 (TSEDFC). 其目的是扩大受控多旋转周期轨线的稳定区域, 提高原 EDFC 的控制效果. 本文的结构如下: 在第 2 节中, 提出含时变切换的广义时滞反馈控制方法 (TSEDFC); 在第 3 节中, 通过实例分析, 研究 TSEDFC 的控制性能; 最后在第 4 节中, 对本文的研究工作进行总结并对相关问题进行讨论.

2 含时变切换的广义时滞反馈控制 (TSEDFC)

考虑受控制的混沌系统

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)) + U(t), \quad (1)$$

其中, $\dot{X}(t)$ 表示 $X(t)$ 对时间 t 的导数, $X(t) \in \mathbb{R}^m$ 是系统状态变量, $F(t, X(t))$ 表示连续可微的非线性函数, $U(t)$ 是受控系统的控制信号. 在没有控制信号的情况下, 系统表现出混沌动力学行为. EDFC 是采用系统输出状态的无限时间滞后信息来构造控制信号, 该方法可以镇定不稳定多旋转周期轨线^[19,29]. EDFC 的控制信号为

$$U(t) = G((1-r) \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} X(t-m\tau) - X(t)), \quad (2)$$

为简化控制信号 $U(t)$ 的表达式, 引入向量 $S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m X(t-m\tau)$, 则 EDFC 的控制信号可以写成:

$$\begin{cases} U(t) = G((1-r)S(t-\tau) - X(t)), \\ S(t) = X(t) + rS(t-\tau), \end{cases} \quad (3)$$

其中, G 是反馈增益系数矩阵, $0 \leq r < 1$ 是系统可调节参数, τ 是时滞, 这里的时滞设定等于目标不稳定多旋转周期轨线 $X_*(t)$ 的周期. 当受控多旋转周期轨线 $X_*(t)$ 稳定时, 控制信号 $U(t)$ 趋于无穷小.

用 EDFC 方法镇定不稳定多旋转周期轨线时, 常常只有比较小的稳定区域. 为扩大受控多旋转周期轨线的稳定区域, 提高 EDFC 的控制效果, 本文基于时变切换策略^[26,28], 给出了 EDFC 的一种改进方法, 即 TSEDFC. TSEDFC 的控制信号为

$$U^t(t) = G^t((1-r)S(t-\tau) - X(t)), \quad (4)$$

其中, 反馈增益系数矩阵为

$$G^t = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}[\cos(\omega t)] + 1 \} \cdot G, \quad (5)$$

式中, $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ G 是定常反馈增益系数矩阵, ω 是切换频率, 切换速度的快慢由 ω 决定. TSEDFC 只在特定时段上对系统施加控制, 而在其他时段上不施加控制, 控制信号按照给定的频率 ω 进行周期性切换, 这不同于原广义时滞反馈控制具有的恒定控制.

对系统 (1) 式施加 TSEDFC 控制得到:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) + G^t((1-r)S(t-\tau) - X(t)), \\ S(t) = X(t) + rS(t-\tau). \end{cases} \quad (6)$$

当 $\omega = 0$ 时, TSEDFC 退化为 EDFC.

为得到受控多旋转周期轨线 $X_*(t)$ 的稳定区域, 求得主稳定方程^[30] 为

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = DF(t, X_*(t))\zeta(t) + G^t((1-r)S(t-\tau) - \zeta(t)), \\ S(t) = \zeta(t) + rS(t-\tau), \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\zeta(t) = X(t) - X_*(t)$ 表示偏差变量, $DF(t, X_*(t))$ 表示 $F(t, X(t))$ 在 $X_*(t)$ 上的雅可比矩阵. $X_*(t)$ 的稳定性由主稳定方程 (7) 的 Floquet 乘数确定. 当主稳定方程 (7) 的 Floquet 乘数的最大幅度 (最大 Floquet 乘数) 小于 1 时, 受控多旋转周期轨线 $X_*(t)$ 稳定.

主稳定方程 (7) 是时滞微分系统, 其初值空间是无穷维 Banach 空间 $C = C([- \tau, 0], R^m)$. Banach 空间 C 中的初始函数定义为 $\zeta_{t_0}(\theta) = \zeta(t_0 + \theta)$, 其中 t_0 是初始时间, $\theta \in [- \tau, 0]$. 方程 (7) 的最大 Floquet 乘数定义为 $\mu_l = \max_{\zeta_{t_0}(\theta) \in C} \mu_{\zeta_{t_0}(\theta)}$, 其中

$$\mu_{\zeta_{t_0}(\theta)} = \frac{\|\zeta_{t_0+\tau}(\theta)\|_C}{\|\zeta_{t_0}(\theta)\|_C} = \frac{\|\zeta(t_0 + \tau + \theta)\|_C}{\|\zeta(t_0 + \theta)\|_C}, \quad (8)$$

式中 $\|\phi(\theta)\|_C = \max_{\theta \in [- \tau, 0]} \|\phi(\theta)\|_{L_2}$ 是定义在 Banach 空间 C 上函数 $\phi(\theta)$ 的范数, $\|\cdot\|_{L_2}$ 是定义在 R^m 上的 Euclidean 范数.

因为系统 (7) 的初值空间是无穷维的^[19], 所以无法直接对系统 (7) 进行积分计算最大 Floquet 乘数. 为克服这一困难, 本文采用 Runge-Kutta 方法将系统 (7) 离散成具有有限维状态空间的离散系统, 进而求得最大 Floquet 乘数^[28], 详细计算过程见附录.

3 TSEDFC 镇定不稳定多旋转周期轨线

本节采用 TSEDFC 方法分别控制两个典型的混沌系统, 考察 TSEDFC 镇定不稳定多旋转周期轨线的具体效果. 通过计算 TSEDFC 控制的多旋转周期轨线的最大 Floquet 乘数, 绘制受控多旋转周期轨线的稳定区域与切换频率 ω 的关系图, 从而找到最优切换频率使受控多旋转周期轨线的稳定区域达到最大. 再通过对比 TSEDFC 和 EDFC 的

控制效果, 阐述 TSEDFC 镇定不稳定多旋转周期轨线的有效性.

3.1 TSEDFC 控制 Duffing 系统

施加 TSEDFC 控制的 Duffing 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -dy + x - x^3 + a \cos(\bar{\omega}t) \\ \quad + g^t((1-r)s(t-\hat{\tau}) - y), \end{cases} \quad (9)$$

其中, $s(t) = y + rs(t - \hat{\tau})$, $r = 0.6$, x 和 y 为系统状态变量, d 为系统参数, a 和 $\bar{\omega}$ 分别表示外激励幅值和频率. 反馈增益系数 $g^t = \frac{1}{2} \{\text{sgn}[\cos(\omega t)] + 1\}$ 在定常值 g 和 0 之间周期切换. 这里假设 y 是系统中可获得的状态变量, 控制信号为 $U^t(t) = g^t((1-r)s(t - \hat{\tau}) - y)$.

将系统参数固定为 $d = 0.02$, $a = 2.5$, $\bar{\omega} = 1$, 无控制的 Duffing 系统呈现混沌动力学行为, 其混沌吸引子如图 1 所示.

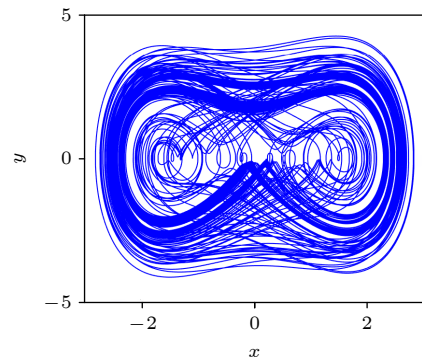


图 1 Duffing 系统的混沌吸引子
Fig. 1. The chaotic attractor of Duffing system.

由于混沌吸引子中包含无数个不稳定周期轨线, 记在一个周期内旋转 k 次的多旋转周期轨线为 $\hat{X}_k(t)$. 选择 Duffing 混沌吸引子中的不稳定多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t) = (\hat{x}_2(t), \hat{y}_2(t))^T$ 作为待镇定的目标多旋转周期轨线. 取步长 $h = 0.004$, 采用 Runge-Kutta 方法积分方程 (9) 得到目标多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 在 xoy 平面上的投影, 如图 2 所示.

为得到受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的稳定区域, 求得主稳定方程为

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 = -0.02\zeta_2 + \zeta_1 - 3\hat{x}_2^2\zeta_1 \\ \quad + g^t((1-r)s(t-\hat{\tau}_2) - \zeta_2), \end{cases} \quad (10)$$

其中, $s(t) = \zeta_2 + rs(t - \hat{\tau}_2)$, 时滞 $\hat{\tau}_2$ 等于目标多旋

转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的周期 $\hat{\tau}_2 = 4\pi / \bar{\omega}$. 当方程 (10) 的最大 Floquet 乘数小于 1 时, 受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 稳定. 受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的稳定区域是反馈增益系数 g 的子区间, 在这个区间上受控多旋转周期轨线稳定. 受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的稳定区域越大表明控制效果越好.

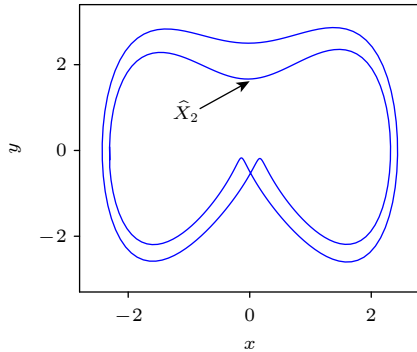


图 2 Duffing 系统的多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 在 xoy 平面上的投影
 Fig. 2. The projection of the high-period UPO $\hat{X}_2(t)$ with period-2 circles of Duffing system on the xoy plane.

TSEDFC 的控制效果与切换频率 ω 密切相关, 采用不同的切换频率 ω 可以得到不同的控制效果. 当 $\omega > 0$ 时, TSEDFC 对系统施加的控制将依据时段进行切换, 其切换过程如图 3 所示, 在灰色时段上, 对受控系统施加控制, 而在灰色时段之外, 对受控系统不施加控制.

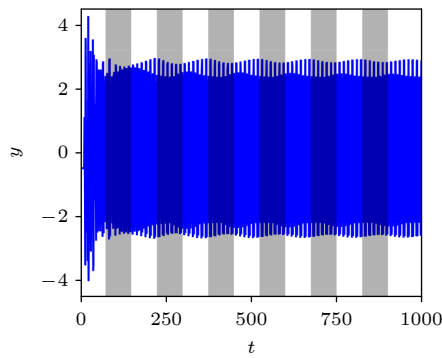


图 3 系统 (10) 式的时间序列和 TSEDFC 控制在不同时段上切换示意图, 在灰色时段施加控制, 而在灰色时段外不施加控制
 Fig. 3. The time series of system (10) and the schematic diagram of the switching of TSEDFC control signals in different time intervals, where the control signal exists in the gray time intervals and disappears outside the gray time intervals.

为确定最佳切换频率 $\hat{\omega}_2$, 对于多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$, 通过计算方程 (10) 的最大 Floquet 乘数,

得到多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的稳定区域与切换频率 ω 的关系图 (见图 4). 图 4 的结果表明, 切换过程以非线性方式修改了受控不稳定多旋转周期轨线的稳定性和稳定区域, 稳定区域随切换频率 ω 的增大而非平滑地变化. 对应于多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的最佳切换频率为 $\hat{\omega}_2 = 0.86$.

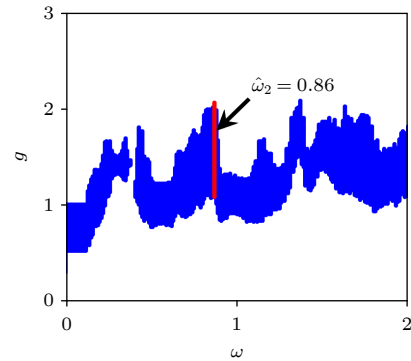


图 4 受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的稳定区域随切换频率 ω 的变化曲线, 其中稳定域是蓝色区域, Floquet 乘数的最大幅度小于 1
 Fig. 4. The relationships between the stable domain of the controlled high-period UPO $\hat{X}_2(t)$ and switching frequency ω , where the stable domain is the blue region and the largest magnitude of the Floquet multipliers is less than one.

采用最佳切换频率 $\hat{\omega}_2 = 0.86$, 求得多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的最大 Floquet 乘数随反馈增益系数 g 的变化曲线, 如图 5 中蓝色实线所示. 当切换频率 $\omega = 0$ 时, TSEDFC 退化成 EDFC, 这时最大 Floquet 乘数随反馈增益系数 g 的变化曲线如图 5 中红色虚线所示. 在图 5 中, 对比 EDFC 和 TSEDFC 的控

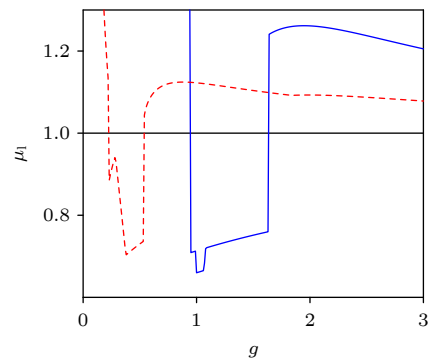


图 5 受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的最大 Floquet 乘数随反馈增益系数 g 的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 EDFC 和 TSEDFC
 Fig. 5. The largest magnitudes of the Floquet multipliers of the controlled high-period UPO $\hat{X}_2(t)$ as functions of the feedback gain g . The red dashed lines and blue solid lines correspond to EDFC and TSEDFC, respectively.

制效果, 可见施加 TSEDFC 控制的多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的稳定区域明显大于施加 EDFC 控制时的稳定区域.

为验证上述结果的正确性, 考察误差指数

$$E_{\text{dex}} = \langle \|X(t_j - \tau) - X(t_j)\| \rangle, \quad (11)$$

其中, $X(t_j) = (x(t_j), y(t_j))$ 是系统状态变量的时间序列, $\langle \cdot \rangle$ 表示足够长的时间内平均值. 当受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 稳定时, 误差指数 E_{dex} 趋近于零. 计算方程 (11), 得到误差指数 E_{dex} 随反馈增益系数 g 的变化曲线, 如图 6 所示. 在图 6 中, E_{dex} 趋近于零的区域与图 5 中得到的稳定区域是一致的, 这进一步验证了图 5 结果的正确性.

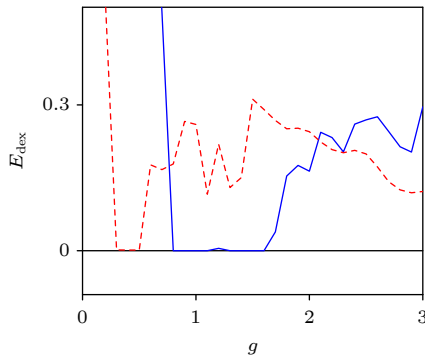


图 6 受控多旋转周期轨线 $\hat{X}_2(t)$ 的误差指数 E_{dex} 随反馈增益系数 g 的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 EDFC 和 TSEDFC

Fig. 6. The error indices E_{dex} of the controlled high-period UPO $\hat{X}_2(t)$ as functions of the feedback gain g . The red dashed lines and blue solid lines correspond to EDFC and TSEDFC, respectively.

3.2 TSEDFC 控制 Rössler 系统

施加 TSEDFC 控制的 Rössler 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay + g^t((1-r)s(t-\tau) - y), \\ \dot{z} = b + z(x - c). \end{cases} \quad (12)$$

其中, $s(t) = y + rs(t - \tau)$, $r = 0.8$, x, y, z 为系统状态变量, a, b, c 为系统参数, 反馈增益系数 $g^t = \frac{1}{2} \{ \text{sgn}[\cos(\omega t)] + 1 \}$ g 在定常值 g 和 0 之间周期切换. 将系统参数固定为 $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$, 无控制的 Rössler 系统呈现混沌动力学行为, 其混沌吸引子如图 7 所示.

选择 Rössler 混沌吸引子中的不稳定多旋转周期轨线 $X_k(t) = (x_k(t), y_k(t), z_k(t))^T$ ($k=2, 3$) 作为待镇定的目标多旋转周期轨线. 目标多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 在 xoy 平面上的投影如图 8 所示.

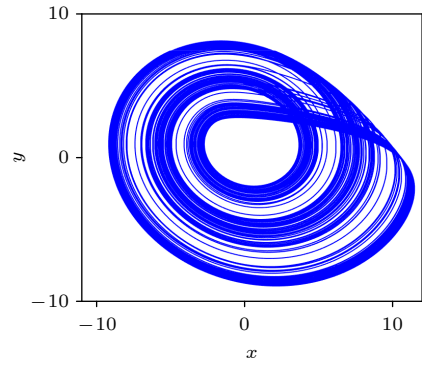


图 7 Rössler 系统的混沌吸引子
Fig. 7. The chaotic attractor of Rössler system.

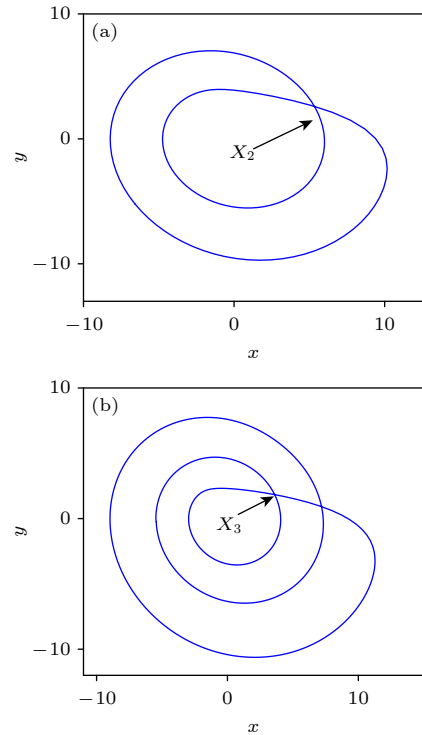


图 8 Rössler 系统的不稳定多旋转周期轨线在 xoy 平面上的投影 (a) 多旋转周期轨线 $X_2(t)$; (b) 多旋转周期轨线 $X_3(t)$

Fig. 8. The projection of the high-period UPO $X_k(t)$ with period- k circles of Rössler system on the xoy plane: (a) The high-period UPO $X_2(t)$ with period-2 circles; (b) the high-period UPO $X_3(t)$ with period-3 circles.

为得到受控多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的稳定区域, 求得主稳定方程为

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = -(\zeta_2 + \zeta_3), \\ \dot{\zeta}_2 = \zeta_1 + 0.2\zeta_2 + g^t((1-r)s(t-\tau_k) - \zeta_2), \\ \dot{\zeta}_3 = z_k\zeta_1 + (x_k - 5.7)\zeta_3, \end{cases} \quad (13)$$

其中, $s(t) = \zeta_2 + rs(t - \tau_k)$, 时滞 τ_k 等于目标多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的周期 ($\tau_2 = 11.76, \tau_3 = 17.515$).

当方程 (13) 的最大 Floquet 乘数小于 1 时, 受控多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 稳定.

为确定最佳切换频率 ω_k , 通过计算方程 (13) 的最大 Floquet 乘数, 分别得到多旋转周期轨线 $X_2(t)$ 和 $X_3(t)$ 各自稳定区域与切换频率 ω 的关系图 (见图 9). 图 9 的结果再次表明切换过程以非线性方式修改了受控不稳定多旋转周期轨线的稳定性和稳定区域 [26], 稳定区域随切换频率 ω 的增大而非平滑地变化. 对应于多旋转周期轨线 $X_2(t)$ 和 $X_3(t)$ 的最佳切换频率分别为 $\omega_2 = 2.44$ 和 $\omega_3 = 2.48$.

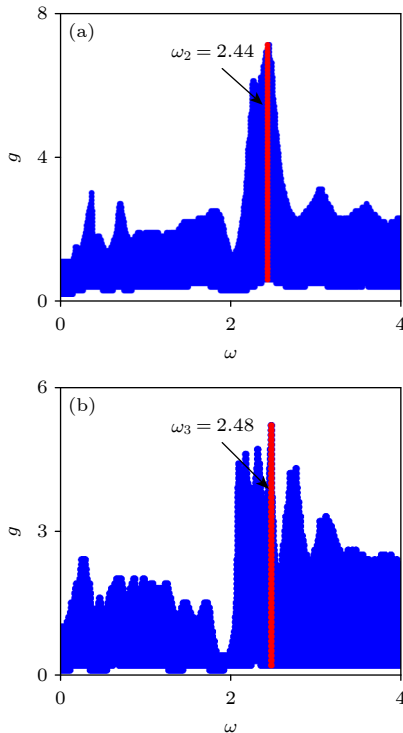


图 9 受控多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的稳定区域随切换频率 ω 的变化曲线, 其中稳定区域是蓝色区域, Floquet 乘数的最大幅度小于 1 (a) 受控多旋转周期轨线 $X_2(t)$; (b) 受控多旋转周期轨线 $X_3(t)$

Fig. 9. The relationships between the stable domain of the controlled high-period UPOs $X_k(t)$ and the switching frequency ω , where the stable domain is the gray region where the largest magnitude of the Floquet multipliers is less than one: (a) The projection of the controlled high-period UPO $X_2(t)$ with period-2 circles; (b) the projection of the controlled high-period UPO $X_3(t)$ with period-3 circles.

分别采用最佳切换频率 $\omega_2 = 2.44$ 和 $\omega_3 = 2.48$, 求得对应于多旋转周期轨线 $X_2(t)$ 和 $X_3(t)$ 的最大 Floquet 乘数随反馈增益系数 g 的变化曲线, 如图 10 中蓝色实线所示. 在图 10 中, 通过对比 EDFC 和 TSEDFC 的控制效果, 可见施加 TSEDFC 控制的

多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的稳定区域明显大于施加 EDFC 控制的多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的稳定区域.

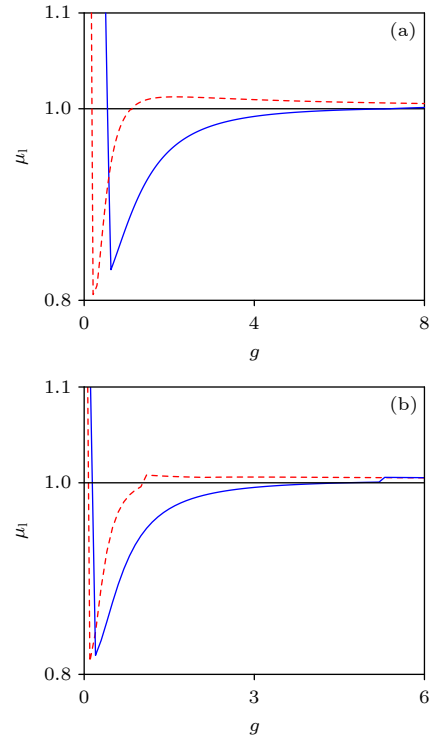


图 10 受控多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的最大 Floquet 乘数随反馈增益系数 g 的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 EDFC 和 TSEDFC (a) 受控多旋转周期轨线 $X_2(t)$; (b) 受控多旋转周期轨线 $X_3(t)$

Fig. 10. The largest magnitudes of the Floquet multipliers of the controlled high-period UPOs $X_k(t)$ as functions of the feedback gain g . The red dashed lines and blue solid lines correspond to EDFC and TSEDFC, respectively: (a) The projection of the controlled high-period UPO $X_2(t)$ with period-2 circles; (b) the projection of the controlled high-period UPO $X_3(t)$ with period-3 circles.

为验证上述结果的正确性, 考察误差指数:

$$E_{\text{dex}} = \langle \|X(t_j - \tau) - X(t_j)\| \rangle, \quad (14)$$

计算方程 (14), 得到误差指数 E_{dex} 随反馈增益系数 g 的变化曲线如图 11 所示. 在图 11 中, E_{dex} 趋近于零的区域与稳定区域是一致的, 这进一步验证了图 10 中结果的正确性.

总结前面的两个算例分析, TSEDFC 的控制效果与切换频率密切相关. 切换过程以非线性的方式改变了受控多旋转周期轨线的稳定性. 当切换频率变化时, 受控多旋转周期轨线的稳定区域非平滑地变化. 采用适当的切换频率, 施加 TSEDFC 控制的多旋转周期轨线的稳定区域明显大于施加 EDFC 控制的多旋转周期轨线的稳定区域. 相比原 EDFC

方法, TSEDFC 存在一定的优势. 比如, 在实际的工程中, 受控系统的反馈增益系数常常被限制在某些有限的区域内, 在这种情况下, 通过采用适当的切换频率, 可以改变和扩大受控多旋转周期轨线的稳定区域, 使反馈增益系数落入稳定区域中, 从而实现了对多旋转周期轨线的镇定. 此外, TSEDFC 只在特定时段上对系统施加控制, 这不同于 EDFC 具有的恒定控制, 因此, 与原 EDFC 相比较, TSEDFC 的控制成本更低.

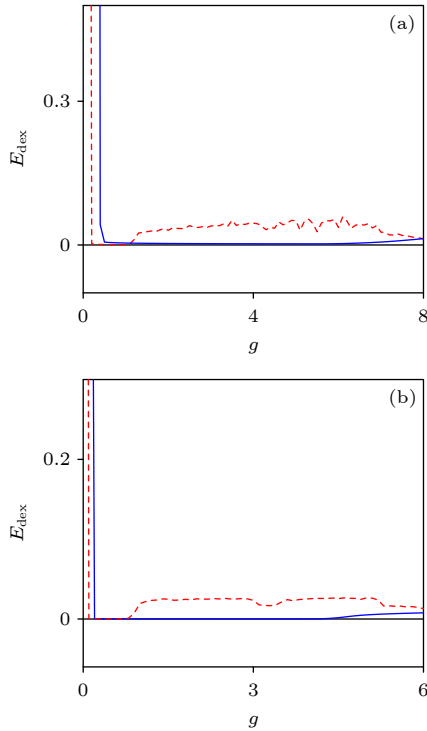


图 11 受控多旋转周期轨线 $X_k(t)$ 的误差指数 E_{dex} 随反馈增益系数 g 的变化曲线对比图, 红色虚线和蓝色实线分别对应于 EDFC 和 TSEDFC (a) 受控多旋转周期轨线 $X_2(t)$; (b) 受控多旋转周期轨线 $X_3(t)$

Fig. 11. The error indices E_{dex} of the controlled high-period UPO $X_k(t)$ as functions of the feedback gain g . The red dashed lines and blue solid lines correspond to EDFC and TSEDFC, respectively: (a) The projection of the controlled high-period UPO $X_2(t)$ with period-2 circles; (b) the projection of the controlled high-period UPO $X_3(t)$ with period-3 circles.

4 结论

本文在 EDFC 的基础上, 加入时变切换策略来提高其控制性能, 建立了 TSEDFC 方法. 实例研究表明, TSEDFC 的控制效果与切换频率密切相关, 只有采用适当的切换频率时, 施加 TSEDFC

控制的不稳定多旋转周期轨线才会有一个比较大的稳定区域. 对控制信号施加切换的方式有多种方式, 本文只研究了一种比较简单的时变切换策略, 对于其他更复杂的切换策略, TSEDFC 控制效果如何? 特别是, 哪种切换策略对提高 EDFC 的控制性能是最优的, 目前还不清楚. 此外, 施加 TSEDFC 控制的多旋转周期轨线的稳定区域随切换频率的变化发生非平滑变化, 如何通过理论分析确定适当的切换频率, 仍然是一个未解决的问题.

附录 计算主稳定方程的最大 Floquet 乘数

对于主稳定方程:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = \mathbf{DF}(t, X_*(t))\zeta(t) + G^t((1-r)\zeta(t-\tau) - \zeta(t)), \\ S(t) = \zeta(t) + rS(t-\tau), \end{cases} \quad (\text{A1})$$

其中, $\zeta(t) \in \mathbb{R}^m$ 为偏差变量, τ 为时滞, $\mathbf{X}_*(t+\tau) = \mathbf{X}_*(t)$ 为待镇定的目标多旋转周期轨线, $\mathbf{DF}(t+\tau, X_*(t+\tau)) = \mathbf{DF}(t, X_*(t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为系统矩阵. 设时区 $[t_0, t_0 + \tau]$ 上的时间序列为 $t_k = t_0 + kh_2$, 其中 $k = 0, 1, \dots, k_T$, $k_T h_2 = \tau$, h_2 为步长. 为方便计算方程 (A1) 的最大 Floquet 乘数, 用 Runge-Kutta 方法将主稳定方程 (A1) 离散化得到:

$$\begin{cases} S(k+1) = \varsigma(k+1) + rS(k-k_\tau+1), \\ \varsigma(k+1) = M_1(k)\varsigma(k) + M_2(k)S(k-k_\tau+1) \\ \quad + M_3(k)S(k-k_\tau), \end{cases} \quad (\text{A2})$$

式中, $\varsigma(k) = \varsigma(t_0 + kh_2)$, $M_1(k) = \mathbf{E} + h_2 A(k) + \frac{h_2^2}{2} A^2(k)$, $M_2(k) = \frac{h_2}{2} G^t$, $M_3(k) = \frac{h_2}{2} G^t + \frac{h_2^2}{2} A^2(k)B$, 其中, \mathbf{E} 为单位矩阵, $A(k) = \mathbf{DF}(t_k, X_*(k)) - G^t$, $B = G^t(1-r)$, $X_*(k) = X_*(t_k) = X_*(t_0 + kh_2)$.

引入一系列离散变量 $S_0(k) = S(k-k_\tau)$, $S_2(k) = S(k-k_\tau+1)$, \dots , $S_{k_\tau-1}(k) = S(k-1)$, $S_{k_\tau}(k) = S(k)$, 并记向量 $\mathbf{Y}(k) = (S_0(k), S_1(k), \dots, S_{k_\tau}(k), \varsigma(k))^T$. 则方程 (A2) 可写成:

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{H}(k)\mathbf{Y}(k), \quad (\text{A3})$$

其中, $\mathbf{H}(k) = (H_{ij})_{(k_\tau+2) \times (k_\tau+2)}$, $H_{k_\tau+2,1} = M_3(k)$, $H_{k_\tau+2,2} = M_2(k)$, $H_{k_\tau+2, k_\tau+2} = M_1(k)$, 当 $1 \leq i \leq k_\tau$ 和 $j = i+1$ 时 $H_{ij} = E$, 其余 $H_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为零矩阵. 从 (A3) 式可得:

$$\mathbf{Y}(k_\tau) = \mathbf{H}^* \mathbf{Y}(0), \quad (\text{A4})$$

式中 $\mathbf{H}^* = \prod_{k=0}^{k_\tau-1} \mathbf{H}(k)$. 矩阵 \mathbf{H}^* 的特征值的模是目标多旋转周期轨线 $X_*(t)$ 的 Floquet 乘数, 最大 Floquet 乘数记为 μ_l .

参考文献

- [1] Shi H, Wang L D 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 200501 (in Chinese) [石航, 王丽丹 2019 物理学报 **68** 200501]
- [2] Kong J T, Huang J, Gong J X, Li E Y 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 098901 (in Chinese) [孔江涛, 黄健, 龚建兴, 李尔玉 2018 物理学报 **67** 098901]
- [3] Qin M H, Lai Q, Wu Y H 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 160502 (in Chinese) [秦铭宏, 赖强, 吴永红 2022 物理学报 **71** 160502]
- [4] Lima R, Pettini M 1990 *Phys. Rev. A* **41** 726
- [5] Braiman Y, Goldhirsch I 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545
- [6] Lathrop D P, Kostelich E J 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4028
- [7] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [8] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [9] Mitra R K, Banik A K, Chatterjee S 2018 *J. Comput. Nonlin. Dyn.* **13** 031001
- [10] Kuznetsov N V, Leonov G A, Shumafov M M 2015 *IFAC-PapersOnLine* **48** 706
- [11] Zhang S R, Zhao J J, Tan F M 2022 *Laser J.* **43** 154 (in Chinese) [张士荣, 赵俊杰, 谈发明 2022 激光杂志 **43** 154]
- [12] Pyragas K, Novičenko V 2013 *Phys. Rev. E* **88** 12903
- [13] Hu H Y 2004 *J. Sound Vib.* **275** 1009
- [14] Nakajima H 1997 *Phys. Lett. A* **232** 207
- [15] Amann A, Hooton E W 2013 *Philos. T. R. Soc. A* **371** 0120463
- [16] Pyragas K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2265
- [17] Yan S L 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 080501 (in Chinese) [颜森林 2021 物理学报 **70** 080501]
- [18] Zheng Y G, Zhang Y Y 2021 *J. Franklin I.* **358** 1240
- [19] Pyragas K 1995 *Phys. Lett. A* **206** 323
- [20] De Paula A S, Savi M A 2009 *ISOJ.* **42** 2981
- [21] Robert B, Feki M, Iu H H 2006 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **16** 113
- [22] Banerjee T, Sarkar B C 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1230044
- [23] Zheng Y G, Zhang Y Y 2021 *Commun. Nonlinear. Sci.* **98** 105788
- [24] Schröder M, Mannattil M, Dutta D, Chakraborty S, Timme M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 054101
- [25] Tandon A, Schröder M, Mannattil M, Timme M, Chakraborty S 2016 *Chaos* **26** 094817
- [26] Li S, Sun N, Chen L, Wang X 2018 *Phys. Rev. E* **98** 012304
- [27] Ghosh A, Godara P, Chakraborty S 2018 *Chaos* **28** 053112
- [28] Buscarino A, Frasca M, Branciforte M, Fortuna L, Sprott J C 2017 *Nonlinear Dynam.* **88** 673
- [29] Socolar J E, Sukow D W, Gauthier D J 1994 *Phys. Rev. E* **50** 3245
- [30] Eckhardt B, Yao D 1993 *Physica D* **65** 100

Stabilizing multi-rotation periodic trajectories by the time-varying switching extended time-delay feedback control*

Zeng Jian-Jian Bao Li-Juan[†]

(*School of Mathematics and Information Sciences, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China*)

(Received 2 December 2022; revised manuscript received 12 February 2023)

Abstract

Control parameters are frequently subjected to certain restrictions in the engineering practice of chaos control. It is difficult to stabilize multi-rotation unstable periodic trajectory when the stability range is too small and outside the restrictions of control parameters. Thus, it is fundamentally important to expand the stability range of the controlled multi-rotation unstable periodic trajectory by using an applicable method. In this work, the original extended time-delay feedback control is improved based on the time-varying switching strategy, which leads to the time-varying switching extended time-delay feedback control. The time-varying switching extended time-delay feedback control only applies the control to the controlled system in a specific period, and does not apply the control to it in other periods, this is different from the continuous control of the original extended time-delay feedback control. The specific performance of the time-varying switching extended time-delay feedback control in stabilizing unstable multi-rotation periodic trajectories is investigated by case studies. The maximum Floquet multiplier of the controlled periodic trajectory is calculated, and the relationship between the stability region of the controlled multi-rotation periodic trajectory and the switching frequency is obtained. The results show that with the increase of switching frequency, the stability region of the controlled multi-rotation periodic trajectory presents a non-smooth change. In particular, the stability region of the time-varying switching extended time-delay feedback control is significantly larger than that of the original extended time-delay feedback control when an appropriate switching frequency is selected.

Keywords: chaos control, delayed feedback, periodic trajectory, Floquet multipliers

PACS: 05.45.Gg, 05.45.-a, 02.30.Yy, 02.30.Ks

DOI: [10.7498/aps.72.20222294](https://doi.org/10.7498/aps.72.20222294)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11872197).

[†] Corresponding author. E-mail: baolijuan2718@163.com

含时变切换的广义时滞反馈控制镇定多旋转周期轨线

曾尖尖 鲍丽娟

Stabilizing multi-rotation periodic trajectories by the time-varying switching extended time-delay feedback control

Zeng Jian-Jian Bao Li-Juan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 080502 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222294

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222294>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

分数阶Willis环脑迟发性动脉瘤时滞系统混沌分析

Chaotic analysis of fractional Willis delayed aneurysm system

物理学报. 2018, 67(15): 150501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180262>

一种单相H桥光伏逆变器混沌控制方法

A chaos control method of single-phase H-bridge photovoltaic inverter

物理学报. 2021, 70(2): 020501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200982>

温度反馈控制棘轮的最优控制

Optimal control of temperature feedback control ratchets

物理学报. 2021, 70(19): 190501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210517>

混合手征活性粒子在时间延迟反馈下的扩散和分离

Diffusion and separation of binary mixtures of chiral active particles driven by time-delayed feedback

物理学报. 2020, 69(22): 220501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200505>

ITER装置中等离子体旋转和反馈控制对电阻壁模影响的数值研究

Numerical study of effect of plasma rotation and feedback control on resistive wall mode in ITER

物理学报. 2021, 70(4): 045201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201391>

耦合含时滞的相互依存网络的局部自适应异质同步

Local adaptive heterogeneous synchronization for interdependent networks with delayed coupling

物理学报. 2018, 67(5): 050504 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171927>