

类比 Bañados-Teitelboim-Zanelli 黑洞的辐射屏蔽*

张鸿宾 陈玲 张保成†

(中国地质大学(武汉)数学与物理学院, 武汉 430074)

(2022年12月1日收到; 2022年12月26日收到修改稿)

虽然类比引力理论表明可以使用实验室的物理系统类比黑洞的时空结构, 但是旋转黑洞的结构很难在实验室体系中找到较好的对应. 本文使用特设的涡旋光, 在理论上找到了一种接近 Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) 黑洞的类比结构, 通过计算无质量粒子和声波在类比 BTZ 黑洞和引力的 BTZ 黑洞时空中的运动来比较它们的异同. 两种黑洞时空无质量粒子和声波的有效势能给出了相同的能量和角动量的辐射禁区分布, 不同的是, BTZ 黑洞经典禁区沿径向将趋近固定的能量值, 而类比 BTZ 黑洞的经典禁区沿径向将闭合. 幸运的是, 在视界和能层附近, 无质量粒子和声波的运动行为几乎一致, 从这个角度来说, 类比实验体系能够很好地模拟 BTZ 黑洞. 特别地, 在两种黑洞时空下, 低能量高角动量的粒子的经典禁区都更宽.

关键词: Bañados-Teitelboim-Zanelli 黑洞, 类比黑洞, 涡旋光, 经典禁区

PACS: 04.70.Bw, 04.25.-g, 04.80.-y, 47.35.Rs

DOI: 10.7498/aps.72.20222296

1 引言

类比黑洞 (analogue black holes) 的研究起始于 1981 年, 安鲁^[1]指出, 在流体速度等于局部声速的位置会形成声学视界, 并给出了类比黑洞的度规为

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c(\rho_0)} \left(c^2(\rho_0) dt^2 - (dx - v(x)dt)^2 \right), \quad (1)$$

其中, ds 是时空的不变距离, t 是时间分量, x 是空间分量, ρ_0 是流体密度, $c(\rho_0)$ 是局部声速, $v(x)$ 是流体速度.

类比黑洞第一次将天体物理的霍金辐射效应^[2]和实验室模拟系统联系起来. 随后在玻色爱因斯坦凝聚体^[3]、极化流体^[4]和水流^[5]中都给出了 (1+1) 维的黑洞视界. (1+1) 维类比黑洞可以看作 Painlevé-Gullstrand-Lemaître 坐标下^[6-8]的 (1+1) 维的史瓦西黑洞的类比^[9,10]. 去除角向部分的 (1+1) 维史瓦西度规为

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dr - \sqrt{\frac{2GM}{r}} c dt \right)^2, \quad (2)$$

其中, r 是度规在球坐标下的径向分量, c 是光速, M 是史瓦西黑洞的质量, G 是引力常量. 对史瓦西黑洞的运动学类比, 使在实验室观察霍金辐射成为可能; 这种运动学的类比甚至可以引起二维流体动力学与引力动力学的关联^[11]. 但它要求类比黑洞的共形因子 $\rho_0/c(\rho_0)$ 取常数; 如果不取常数, 由于共形因子 $\rho_0/c(\rho_0)$ 的存在, 在流体中不能很好地模拟史瓦西黑洞^[12].

使用类比方法研究克尔黑洞可能更具有现实意义, 因为克尔黑洞更加接近天体黑洞. 克尔黑洞即旋转不带电的黑洞, 它的旋转能量可以通过彭罗斯效应^[13]提取出来. 设想在旋转黑洞的能层中制造一对拥有正负能量的粒子; 具有负能量的粒子坠入旋转黑洞减少了黑洞的能量, 另一个具有正能量的粒子得到黑洞减少的能量并逃向无穷远处. 模拟旋转黑洞需要得到它们在 (2+1) 维共形平坦的

* 国家自然科学基金 (批准号: 11654001) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangbaocheng@cug.edu.cn

slices^[14]. 许多旋转黑洞如克尔黑洞和克尔纽曼黑洞都没有共形平坦的 slices^[15], 因而不能得到这些时空的完整类比黑洞^[16]. 如在水流中实现有视界和静界的类比黑洞^[17], 在光子流体^[18] 中实现只有静界的类比黑洞^[19].

文献 [20] 在光子流体中给出了具有内部视界、外部视界和能层的类比黑洞结构, 并说明了在这个结构里可以实现霍金辐射的共振增强和超辐射. 本文改造了文献 [20] 中涡旋光的径向相位, 得到一个与 BTZ 黑洞结构相似的类比黑洞. 利用黑洞的辐射屏蔽效应^[21–23] 去对比类比黑洞和 BTZ 黑洞, 黑洞的外视界外有经典禁区, 具有负动能的出射粒子将会返回黑洞视界外经典禁区的边界, 辐射屏蔽效应就发生了.

本文第 2 节给出了 BTZ 黑洞的时空结构和类比 BTZ 黑洞. 第 3 节计算了两种黑洞的测地线方程, 并讨论了经典禁区的分布和经典禁区的转折点. 最后在第 4 节对比了 BTZ 黑洞和类比黑洞的辐射屏蔽效应, 说明类比黑洞能比较好地模拟 BTZ 黑洞.

2 类比 BTZ 黑洞

2.1 BTZ 黑洞

BTZ 黑洞^[24] 是爱因斯坦场方程 (2+1) 维的旋转黑洞解:

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}} + r^2 d\theta^2 - J dt d\theta, \quad (3)$$

其中, l 和负的宇宙常数 Λ 有关系, 即 $\Lambda = -1/l^2$; $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 取几何单位制 $c = G = 1$; M 和 J 分别为 BTZ 黑洞的质量和角动量. g_{rr} 和 g_{tt} 是 BTZ 度规的度规系数, $g_{rr} = \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1}$, $g_{tt} = M - \frac{r^2}{l^2}$. 当 g_{rr} 发散时, 可以得到 BTZ 黑洞的内外视界:

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{Ml^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right]}. \quad (4)$$

内外视界存在的条件是 $1 - J^2/(M^2 l^2) > 0$, 即 $Ml > J$. 当 $g_{tt} = 0$ 时, 可以得到 BTZ 黑洞的静界:

$$r_s = \sqrt{Ml}. \quad (5)$$

与其他 (3+1) 维的黑洞相比, BTZ 度规有非相对论的类比度规^[25], 且不会产生不必要的复杂性. BTZ 黑洞通常被认为是探索经典引力和量子引力最有用的模型^[26–28], 它有通常黑洞的一些结构, 热力学性质和 (3+1) 维的黑洞相似. 同时它是 Anti-de Sitter 而不是渐进平直的, 而且在原点没有曲率奇点, 是理解 AdS/CFT 对应或探索与弦理论相关的黑洞性质的重要平台^[29].

2.2 类比黑洞

声波在非均匀流体中的传播类似于无质量的标量场在弯曲时空的传播, 这种类比被应用在经典流体^[1,30]、BEC^[31] 和光子流体中^[32–34]. 通过改造参考文献 [20] 的径向相位可以在光子流体中模拟 BTZ 黑洞. 涡旋光在光子流体中的传播可以由非线性薛定谔方程^[35] 描述:

$$\partial_z \varepsilon = \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \varepsilon - i \frac{kn_2}{n_0} \varepsilon |\varepsilon|^2, \quad (6)$$

其中, ε 是涡旋光场, z 是传播方向, $k = (2\pi n_0)/\lambda$ 是沿传播方向的波数, n_0 是线性折射率, n_2 是非线性折射系数. 将真空光速设为常数, 方程 (6) 中光沿 z 方向的传播距离可以看作传播时间 $t = (n_0 z)/c$ ^[36], c 是光速. 方程 (6) 右边的第 1 项描述了涡旋光传播过程的衍射效应, 第 2 项描述了光的自散焦效应^[37,38].

经过 Madelung 变换 $\varepsilon = \sqrt{\rho} e^{i\phi}$, 可以得到连续性方程和欧拉方程:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad \partial_t \psi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2 n_2}{n_0^3} \rho - \frac{c^2}{2k^2 n_0^2} \frac{\nabla^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} = 0, \quad (7)$$

其中 $v = \frac{c}{kn_0} \nabla \phi \equiv \nabla \psi$, ψ 是新定义的一个相位; ϕ 是涡旋光场的相位, ρ 是流体的密度. 欧拉方程的第 4 项是量子压力项, 它在经典流体力学中没有对应. 用 $\rho = \rho_0 + \rho_1$ 和 $\psi = \psi_0 + \psi_1$ 线性化连续性方程和欧拉方程, 其中 ρ_0 是背景密度, ρ_1 是微扰密度, ψ_0 是背景相位, ψ_1 是微扰相位, 当流体动力学近似成立时量子压力项是可以忽略的, 可以将连续性方程和欧拉方程改写为 Klein-Gordon (K-G) 方程:

$$\left(\frac{\rho_0}{c_s} \right)^2 \left(-\partial_t^2 \psi_1 - \partial_t \delta_{ij} \nu_j \partial_j \psi_1 + c_s^2 \partial_i \delta_{ij} \partial_j \psi_1 - \partial_i \delta_{ij} \nu_j \partial_t \psi_1 - \partial_i \nu_i \partial_j \nu_j \psi_1 \right) = 0, \quad (8)$$

其中: $c_s^2 = c^2 n_2 \rho_0 / n_0^3$ 是局部声速; ρ_0 是流体密度; δ_{ij} 是狄拉克函数; v_i, v_j 是流体速度的空间坐标分量, $i, j = 1, 2$. K-G 方程可以简写为 $\Delta\psi_1 \equiv (1/\sqrt{-g})\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi_1) = 0$ [32]. 将 K-G 方程中的度规系数从迪卡尔坐标转换到极坐标就能得到 (2+1) 维的流体度规:

$$ds^2 = \left(\frac{\rho_0}{c_s}\right)^2 [-(c_s^2 - v_t^2)dt^2 - 2v_r dr dt - 2v_\theta r d\theta dt + dr^2 + (r d\theta)^2], \quad (9)$$

其中, $v_r = \partial_r\psi_0$ 和 $v_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta\psi_0$ 是流体速度的径向和角向成分, $v_t^2 = v_r^2 + v_\theta^2$ 是流体总速度 [32].

得到量子流体中的黑洞度规有重要的意义. 最近一篇论文中给出了一种全新的推导类比黑洞度规的方法 [39]. 该文中利用 shift 变换和泛函积分方法导出了声子场的声学度规和有效作用量, 和光学体系中得到声学度规相比有区别也有联系. 两种方法处理的对象都是量子流体, 在得到声学度规的过程中前者需要忽略欧拉方程的动能项, 后者需要忽略欧拉方程的量子压力项, 二者都是通过场论的方法得到声学度规. 不同的是前者通过 shift 变换, 而后者通过微扰的方法得到声学度规; 另外前者考虑 2 维的引力模型, 后者考虑 3 维的引力模型.

为了在光子流体中模拟 BTZ 黑洞的几何结构, 寻找初始光场是很困难的, 一个有益的办法是通过观察 BTZ 黑洞的类比形式去寻找对应的涡旋光的相位结构. 对类比度规 (9) 进行时间和角变换:

$$\begin{aligned} d\tilde{t} &= dt + \frac{|v_r|}{(c_s^2 - v_r^2)} dr, \\ d\tilde{\theta} &= d\theta + \frac{|v_r|v_\theta}{r(c_s^2 - v_r^2)} dr, \end{aligned} \quad (10)$$

得到新形式的类比度规为

$$ds^2 = \left(\frac{\rho_0}{c_s}\right)^2 \left[-(c_s^2 - v_t^2)d\tilde{t}^2 + \frac{c_s^2}{c_s^2 - v_r^2} dr^2 + (r d\tilde{\theta})^2 - 2v_\theta r d\tilde{t} d\tilde{\theta} \right]. \quad (11)$$

这里引入变换 (10), 没有改变度规 (9) 和度规 (11) 的径向变量 r . 这样不会影响后面比较引力 BTZ 黑洞和类比 BTZ 黑洞辐射屏蔽效应的径向特征. 通过比较类比度规 (11) 和 BTZ 度规 (3), 可以把 BTZ 黑洞看成流体角向速度和径向速度分别为

$$v_\theta = c_s[J/(2r)],$$

$$v_r = c_s \sqrt{1 - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}\right)}, \quad (12)$$

而流体密度和声速是常数的类比黑洞. 由于 v_r 的特殊形式, 要保证 BTZ 黑洞的类比形式存在就要求内外视界和静界位于 R_\pm 之间, 且要求静界位置小于 R_+ .

$$R_\pm^2 = \frac{(1+M)l^2}{2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left[\frac{J}{(1+M)l}\right]^2} \right\}. \quad (13)$$

图 1 给出了径向流速 v_r 存在时与声速 c_s 相交构成内视界 ($r_- = 0.385$) 和外视界 ($r_+ = 1.689$), 总流速 v_t 与 c_s 相交构成静界 ($r_s = 1.732$) 的类比黑洞结构. 根据图 1 的类比结构, 本研究小组改造了参考文献 [20] 中的涡旋相位, 给出了一个新的初始光场 $E_0 = \sqrt{\rho_0(r)} \exp(im\theta - 2i\pi(Ar - B \ln r - Cr^2))$, 其中 A, B, C 是光场的相位常数. 初始光场的振幅为 $\rho_0(r) = \rho_0(r/\sigma)^{1/2} \exp(-2r^2/\sigma^2)$, 其中 σ 是常数; 其强度为 $I = |E_0|^2 = \rho_0(r)$ (W/m²), 给出了单位时间单位面积涡旋光的能量; 其相位因子中的 $im\theta$ 给出了涡旋光携带的轨道角动量为 $m\hbar$, 其中 m 是涡旋光的拓扑荷数, θ 为涡旋光的空间相位角, \hbar 为约化普朗克常量. 注意到虽然所给出的相位 $2i\pi(Ar - B \ln r - Cr^2)$ 在中心处会发散, 但这个不会造成特别的影响, 因为在中心处光强为零.

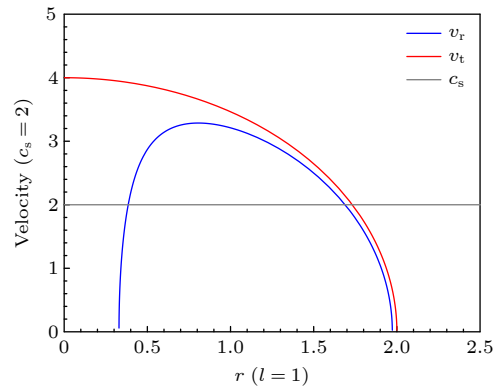


图 1 模拟 $M = 3$ 和 $J = 1.3l$ 旋转 BTZ 黑洞的流体速度
Fig. 1. Fluid velocity that analogs to a spinning BTZ black hole with $M = 3$ and $J = 1.3l$.

初始光场在光子流体中传播形成局部声速 $c_s(r) = \sqrt{c^2 n_2 \rho_0(r) / n_0^3}$; 由 $v_r = \partial_r\psi_0$, $v_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta\psi_0$, $v = \frac{c}{kn_0} \nabla\phi \equiv \nabla\psi$ 和初始光场的相位可以得到径向流

速为 $v_r(r) = \frac{2\pi c}{kn_0} \left(A - \frac{B}{r} - 2Cr \right)$, 总流速为 $v_t(r) = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$. 与文献 [32] 提出并在文献 [33] 实现的涡旋光场相比, 本文中的初始涡旋光场有一个不同的相位因子 $Ar - B \ln r - Cr^2$. 有很多方法可以实现这样的光场 [40,41], 一个方便的方法是使用空间光调制器 [42]. 参数 A, B, C 在类比 BTZ 黑洞时有特定的要求, 任意选取 A, B, C 的数值不能实现类比 BTZ 黑洞. 3 个参数的值须为正, 其大小要根据引力 BTZ 黑洞的结构 (图 1) 去调整. 通常需要满足径向流速和局部声速有两个交点分别形成内视界和外视界; 总流速和局部声速需要有一个交点形成静界; 而且这 3 个交点的位置需要满足 $(r_- < r_+ < r_s)$. 如图 2 所示 (径向相位的参数 $A = 1.3 \times 10^4$, $B = 3$, $C = 2.5 \times 10^6$), 在径向流速 v_r 和局部声速 c_s 相等的径向位置分别形成了内视界 ($r_- = 0.36$ mm) 和外视界 ($r_+ = 1.40$ mm), 在总流速 v_t 和局部声速 c_s 相等的径向位置形成了静界 ($r_s = 1.55$ mm), 即在光子流体中模拟出了和 BTZ 黑洞相似的结构.

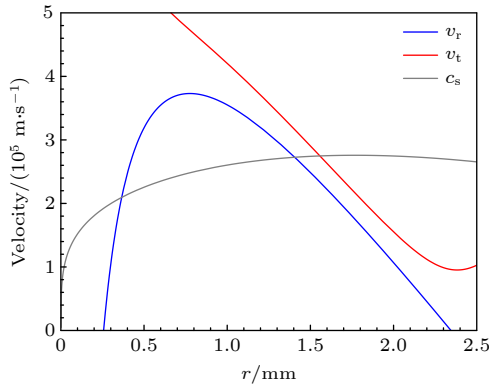


图 2 涡旋光模拟旋转 BTZ 黑洞的流体速度 ($\rho_0 = 1.4 \times 10^5$ W/m², $\sigma = 5$ mm, $n_0 = 1.5$, $|n_2| = 4.4 \times 10^{-11}$ m²/W)
Fig. 2. Fluid velocity that analogs to a spinning BTZ black hole by the optical vortex ($\rho_0 = 1.4 \times 10^5$ W/m², $\sigma = 5$ mm, $n_0 = 1.5$, $|n_2| = 4.4 \times 10^{-11}$ m²/W).

3 辐射屏蔽效应与讨论

3.1 BTZ 黑洞的辐射屏蔽

BTZ 黑洞周围粒子或波的运动由测地线方程描述 [43,44], 黑洞的测地线方程通常可以由哈密顿-雅克比方程导出 [45]. 作用量为 S , 在度规 (3) 所描述的时空中自由运动粒子的哈密顿-雅克比方程为

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}, \quad (14)$$

其中 τ 是固有时. 这里取的度规记号为 $(-1, 1, 1)$, 所以带有能量 E 和角动量 L 的粒子的作用量可以假设为 [46]

$$S = -\frac{1}{2} \alpha \tau - Et + L\theta + S_r(r), \quad (15)$$

其中, α 和 E, L 一样是常数, $\alpha \tau$ 是常数 α 和固有时 τ 的乘积; $S_r(r)$ 是 r 的函数. 把度规 (3) 和作用量 (15) 代入到哈密顿-雅克比方程 (14) 中, 哈密顿-雅克比方程可以改写为

$$\begin{aligned} & \left(r^2 M - \frac{r^4}{l^2} - \frac{J^2}{4} \right)^2 \left(\frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 \\ &= r^4 E^2 - \left(r^2 M - \frac{r^4}{l^2} - \frac{J^2}{4} \right) r^2 \alpha \\ &+ \left(M - \frac{r^2}{l^2} \right) r^2 L^2 - JELr^2. \end{aligned} \quad (16)$$

对 (16) 积分可以得到作用量的径向部分, 作用量的具体表达式可以写为

$$S = -\frac{1}{2} \alpha \tau - Et + L\theta + \int^r \frac{\sqrt{V_{\text{eff}}}}{r^2 M - \frac{r^4}{l^2} - \frac{J^2}{4}} dr, \quad (17)$$

其中有效势可以表示为

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= r^4 E^2 - \left(r^2 M - \frac{r^4}{l^2} - \frac{J^2}{4} \right) r^2 \alpha \\ &+ \left(M - \frac{r^2}{l^2} \right) r^2 L^2 - JELr^2. \end{aligned} \quad (18)$$

通过最小作用量原理, 对作用量 S 分别求常量 α 和 E, L 的偏导, 得到 BTZ 黑洞周围运动粒子的运动方程为

$$r^2 \frac{dr}{d\tau} = \sqrt{V_{\text{eff}}}, \quad (19)$$

$$r^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{M - \frac{r^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r^2}} \left(Er^2 - \frac{1}{2} JL \right), \quad (20)$$

$$r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{M - \frac{r^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r^2}} \left[\frac{1}{2} JE - L \left(M - \frac{r^2}{l^2} \right) \right]. \quad (21)$$

运动方程中的常量 $\alpha = 1$ 时描述的是类时测地线, $\alpha = 0$ 时描述的是类光测地线 [43]. 在这里选择后者描述无质量粒子在 BTZ 黑洞周围的运动状态, 方便与后面的类比黑洞进行比较. $\alpha = 0$ 时方程 (19) 可以简化为

$$r^2 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = r^2 E^2 + \left(M - \frac{r^2}{l^2} \right) L^2 - JEL. \quad (22)$$

径向运动方程 (22) 刻画了不同区域内携带能量和角动量的无质量粒子的运动轨迹. 径向方程的左边 $dr/d\tau$ 有动能的含义 [21], 因此, 负的有效势没有意义, 因为它会导致速度 $dr/d\tau$ 必须是复数, 也会导致由黑洞出射的粒子具有负动能. 一般粒子或波不会出现在负动能的区域, 这些具有特定角动量和能量的粒子将延径向返回黑洞, 于是 BTZ 黑洞的辐射被屏蔽. 和通常的辐射屏蔽相比, BTZ 黑洞中的辐射屏蔽是由于经典禁区, 而不是材料阻挡某些具有特殊角动量和能量的粒子而产生的. 粒子具有负动能的区域被称作经典禁区, 禁区的边界就是转折点. 图 3 由径向方程 (22) 给出, 显示了 BTZ 黑洞周围运动的无质量粒子的经典禁区图. 黄色的区域被势能等于 0 的蓝色平面分成两部分; 在蓝色零势能面以下的区域是经典禁区, 两个区域的交点就是粒子的转折点 [22]. 我们考虑了能层内 (图 3(a)) 和能层外 (图 3(b)) 的禁区分布情况, BTZ 黑洞能层内和能层外都有经典禁区. 方程 (22) 右边的有效势不仅是 M 和 J (描述黑洞的量) 的函数, 也是 E 和 L (描述粒子的量) 的函数.

BTZ 黑洞的质量可以为正, 也可以为负 [47]; 当 BTZ 黑洞的质量为负时, 无质量粒子取任意的角动量和能量都可以逃逸到无穷远处 [48]. 因此, 选择 BTZ 黑洞的质量为正, 且 $Ml > J$, 以确保内外视界同时存在. 如果把有效势看作无质量粒子能量 E 的二次函数, 那么在能层内和能层外, 不同角动量粒子的经典禁区在粒子能量的两个根 E_+ 和 E_- 之间 (图 3):

$$E_{\pm} = \frac{1}{2r^2} \left[LJ \pm \sqrt{L^2 J^2 - 4r^2 L^2 \left(M - \frac{r^2}{l^2} \right)} \right]. \quad (23)$$

同样, 也可以把径向运动方程 (22) 看作是角动量 L 的二次函数, 则在能层内, 不同能量无质量粒子的经典禁区在角动量的两个根 L_+ 和 L_- 之间:

$$L_{\pm} = \frac{1}{2(M - r^2/l^2)} \times \left[EJ \pm \sqrt{E^2 J^2 - 4 \left(M - \frac{r^2}{l^2} \right) r^2 E^2} \right]. \quad (24)$$

在能层外, 不同能量的粒子在两个根 L_+ 和 L_- 之外存在经典禁区 (图 3). E_{\pm} 和 L_{\pm} 的分布取决于方程 (22) 的系数 [22], 当无质量粒子的角动量 L 或能量 E 等于零时没有经典禁区.

通过方程 (23) 和方程 (24) 可以得到图 4(a) 和图 4(b), 这给出了静界处和能层外的经典禁区, 静界处低能量高角动量的无质量粒子的经典禁区更宽 (图 4(a)); 能层外的经典禁区分布在角动量的两根 L_{\pm} 之外, 随着能量的增加, 红线以上蓝线以下的黄色区域将会发生辐射屏蔽 (图 4(b)), 能层外同样低能量高角动量的无质量粒子经典禁区更宽. 发生辐射屏蔽的经典禁区的边界就是无质量粒子的转折点, 让径向方程 (22) 的右边等于 0 可以得到转折点:

$$r_{\text{tp}} = \sqrt{\frac{JEL - ML}{E^2 - L^2/l^2}}. \quad (25)$$

方程 (22) 式还可以给出能量屏蔽禁区的径向分布; 在能层内和能层外, 经典禁区都处于两个根

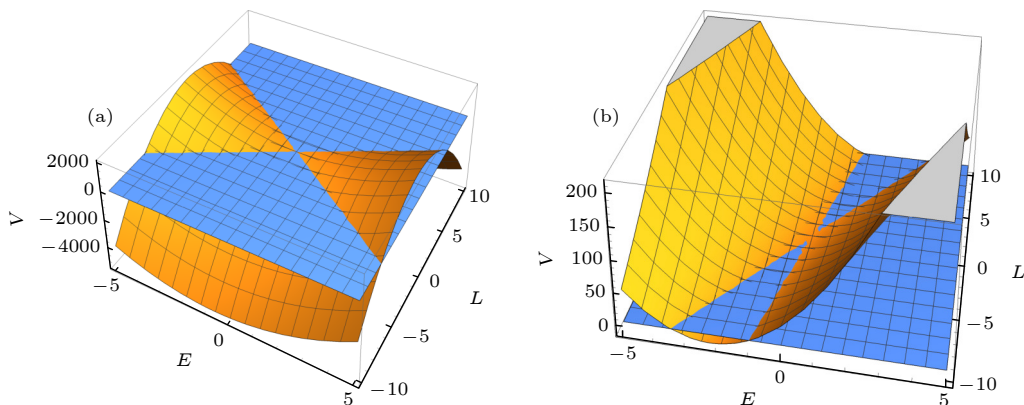


图 3 BTZ 黑洞能层外和能层内的经典禁区 ($M = 3, J = 1.3, l = 1$) (a) 能层外的经典禁区图 ($r^2 = 9$); (b) 能层内的经典禁区图 ($r^2 = 2.9$)

Fig. 3. Classically forbidden region of BTZ black hole outside and inside the ergosphere ($M = 3, J = 1.3, l = 1$): (a) The classically forbidden region outside the ergosphere ($r^2 = 9$); (b) the classically forbidden region inside the ergosphere ($r^2 = 2.9$).

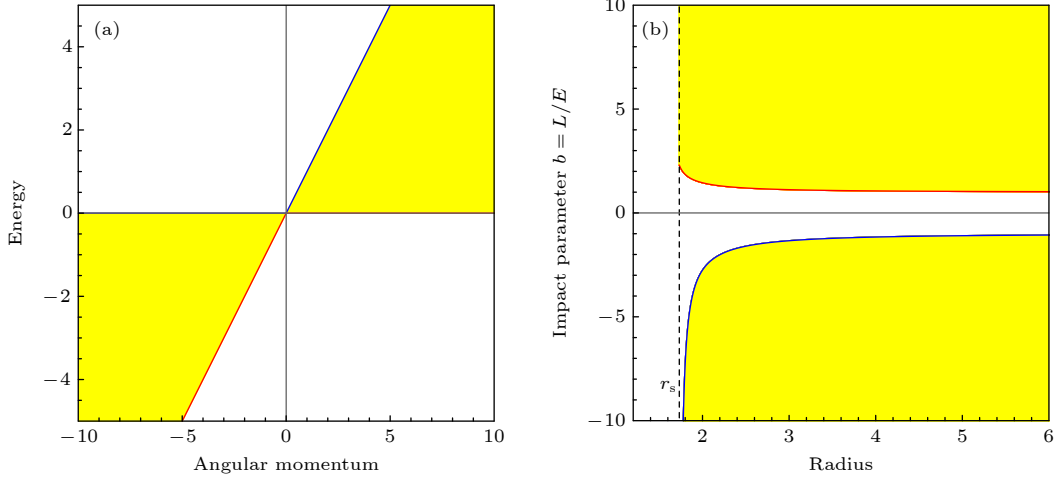


图4 BTZ黑洞静界和静界外的经典禁区 ($M = 3, J = 3, l = 1$) (a) E_+ 和 E_- 之间的黄色区域是静界处的径向运动的经典禁区, 在这些区域辐射将被禁止发生; (b) 静界外角动量 L_+ (蓝线) 和 L_- (红线) 两根之外的黄色区域是经典禁区, 图中画的是 $E = 1$ 时的 L_+ 和 L_- 两根, 也就是碰撞参数

Fig. 4. Classically forbidden region of the BTZ black hole at the static limit and outside the ergosphere ($M = 3, J = 3, l = 1$): (a) The yellow area between E_+ and E_- is the classically forbidden area of radial motion at the static limit, where the radiation will be forbidden to occur; (b) the yellow area outside the static limit outside the angular momentum L_+ (blue line) and L_- (red line) is a classically forbidden area, as shown in the figure it is the two roots of L_+ and L_- when $E = 1$, that is, the impact parameter.

(蓝线) 和 (红线) 之间, 这一点由方程 (23) 作出的图 5 可以明显看出. 在无质量粒子的情况下, 不同角动量的经典禁区都会经过静界和零能量线的交点, 而有质量的粒子则不会; 这会导致当角动量取正值时能层内负能量的无质量粒子没有经典禁区 (图 5(a)), 当角动量取负值时能层内正能量的无质量粒子没有经典禁区. 在给定不同的角动量后, 无质量粒子的经典禁区将随着离 BTZ 黑洞径向距离的增加而趋近于特定的能量值 (图 5(b)). 有趣的是, 当能量大于角动量时, 无质量的粒子将不会发生辐射屏蔽; 这些无质量的粒子将会逃离视界到达无穷远处. 而当无质量的粒子处于两个根 E_+ (蓝线) 和 E_- (红线) 之间时, 出射的粒子将会返回到经典禁区的下边界处.

3.2 类比 BTZ 黑洞的辐射屏蔽

用 3.1 节的方法和度规 (11) 可以得到类比黑洞中声波的运动方程:

$$r \frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{c_s^2} \sqrt{V_{\text{eff}}}. \quad (26)$$

$$r \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{v_r^2 - c_s^2} (Er - v_\theta L), \quad (27)$$

$$r \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r(v_r^2 - c_s^2)} [rv_\theta E - L(v_t^2 - c_s^2)], \quad (28)$$

和声波的动能函数:

$$r^2 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{c_s^2} [r^2 E^2 + (v_t^2 - c_s^2) L^2 - 2rv_\theta EL]. \quad (29)$$

实验室中的流体材料^[37] 通常由非线性甲醇石墨烯溶液填充到空腔构成, 在光子流体中形成类比黑洞通常需要两束相干光束经过实验流体: 第一束光与空腔共振形成光子流体, 并产生一个黑洞背景; 第二束具有特定频率的光在横向具体位置提供一个局部激励, 这个扰动将导致类声的波动, 类声的波动会在横向平面从光的入射点传播开^[32].

通过动能函数 (29) 式右边的有效势, 可以得到类比黑洞中声波在能层内和能层外的经典禁区 (图 6). 从图 3 和图 6 可以看出, 和 BTZ 黑洞相似, 在类比 BTZ 黑洞能层内和能层外运动的无质量粒子都有经典禁区, 且当无质量粒子的能量 E 或角动量 L 等于 0 时没有经典禁区.

类比黑洞中声波的有效势函数同样可以看作声波能量或角动量的二次函数, 且有效势由声波的能量和角动量同时决定. 在能层内和能层外, 不同角动量的声波的经典禁区在能量的两个根之间 (图 6):

$$E_{\pm} = \frac{1}{2r^2} \left[2rv_\theta L \pm \sqrt{4r^2 L^2 (c_s^2 - v_r^2)} \right]. \quad (30)$$

在能层内, 不同能量声波的经典禁区在角动量的两个根 L_+ 和 L_- 之间:

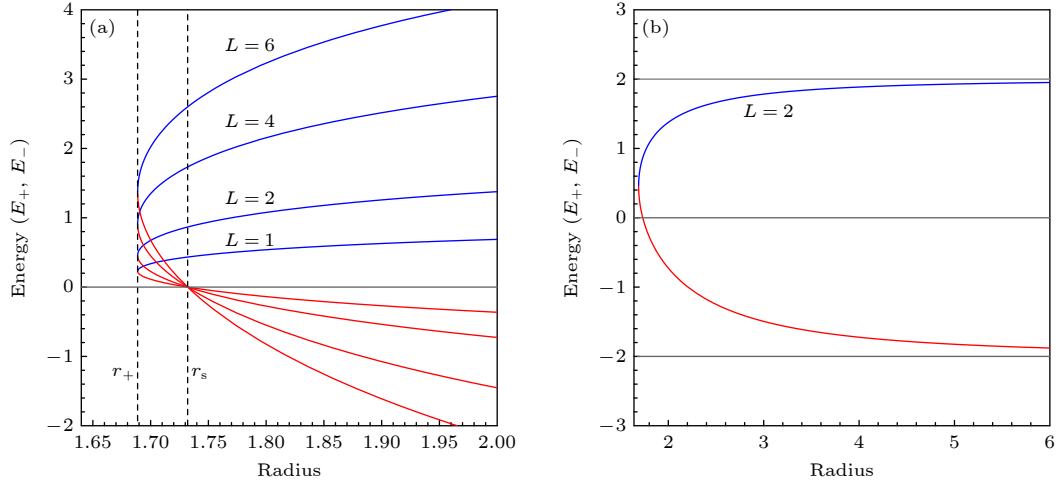


图 5 BTZ 黑洞径向的经典禁区 (a) 经典禁区位于 E_+ (蓝线) 和 E_- (红线) 之间; 无质量粒子的角动量分别取 1, 2, 4, 6 ($M = 3, J = 1.3, l = 1$), BTZ 黑洞的内视界、外视界和静界分别位于 $r_- = 0.385, r_+ = 1.689, r_s = 1.732$; (b) 角动量 $L = 2$ 的经典禁区的边界将趋近于 2 和 -2

Fig. 5. . Classically forbidden region of the BTZ black hole at radial. (a) The classically forbidden region is between E_+ (blue line) and E_- (red line); the angular momentum of massless particles is 1, 2, 4, 6 ($M = 3, J = 1.3, l = 1$), the inner horizon of the BTZ black hole, the outer horizon and the static limit are respectively located at $r_- = 0.385, r_+ = 1.689, r_s = 1.732$; (b) the boundary of the classically forbidden region with angular momentum L of 2 will approach to 2 and -2.

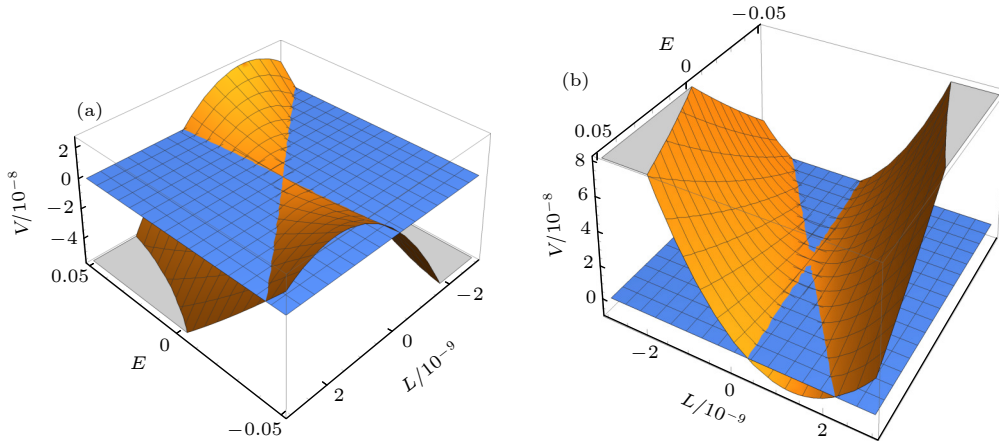


图 6 类比黑洞能层外和能层内的经典禁区 (a) 能层外的经典禁区图 ($r = 1.6$ mm); (b) 能层内的经典禁区图 ($r = 1.5$ mm)

Fig. 6. Classically forbidden region of analog black hole outside and inside the ergosphere: (a) The classically forbidden region outside the ergosphere ($r = 1.6$ mm); (b) the classically forbidden region inside the ergosphere ($r = 1.5$ mm).

$$L_{\pm} = \frac{1}{2(v_t^2 - c_s^2)} [2rv_{\theta}E \pm \sqrt{4r^2E^2(c_s^2 - v_r^2)}]. \quad (31)$$

在能层外, 不同能量的粒子在两个根 L_+ 和 L_- 之外存在经典禁区 (图 6). 类比黑洞经典禁区的分布与 BTZ 黑洞一致.

由方程 (30) 和方程 (31) 可以得到图 7(a) 和图 7(b), 显示了静界处和静界外类比 BTZ 黑洞经典禁区的分布, 和 BTZ 黑洞 (图 4) 相似, 低能量高角动量的声波经典禁区更宽. 类比 BTZ 黑洞同样可以通过让有效势等于 0 来确定经典禁区的边界, 即声波的转折点. 由于速度场的复杂形式, 确定解析形式的转折点是困难的, 但仍然可以得

到转折点的数值解. 当声波能量 $E = 0.05$ J, 角动量 $L = 4 \times 10^{-10}$ kg · m²/s 时, 转折点位于 $r_{tp1} = 1.41$ mm 和 $r_{tp2} = 2.63$ mm. 有两个转折点是由于径向相位导致的, 径向相位也使经典禁区在有限的径向位置闭合 (图 8), 图 8 由方程 (30) 给出, 两个转折点之间的区域也就是经典禁区.

不同角动量声波的经典禁区的边界仍然穿过静界处能量为 0 的点, 这和 BTZ 黑洞一样, 会导致当角动量取值为正时能层内负能量的无质量粒子没有经典禁区 (图 8), 当角动量的取值为负时能层内正能量的无质量粒子没有经典禁区.

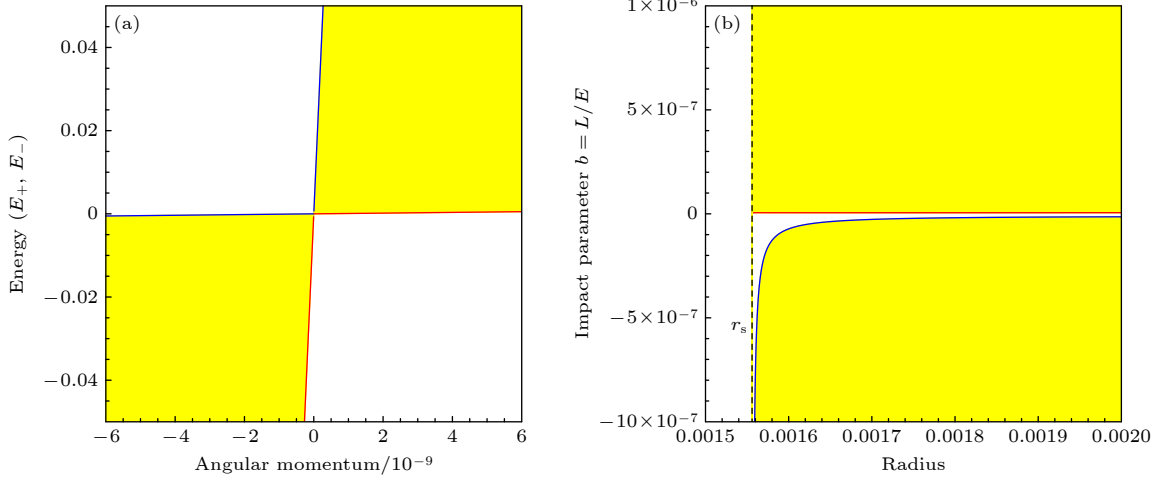


图 7 类比黑洞静界和静界外的经典禁区 (a) E_+ 和 E_- 之间的黄色区域是静界处的径向运动的经典禁区; (b) 静界外角动量 L_+ (蓝线) 和 L_- (红线) 两根之外的黄色区域是经典禁区

Fig. 7. Classically forbidden region of the analog black hole at the static limit and outside the ergosphere: (a) The yellow area between E_+ and E_- is the classically forbidden area of radial motion at the static limit; (b) the yellow area outside the static limit outside the angular momentum L_+ (blue line) and L_- (red line) is a classically forbidden area.

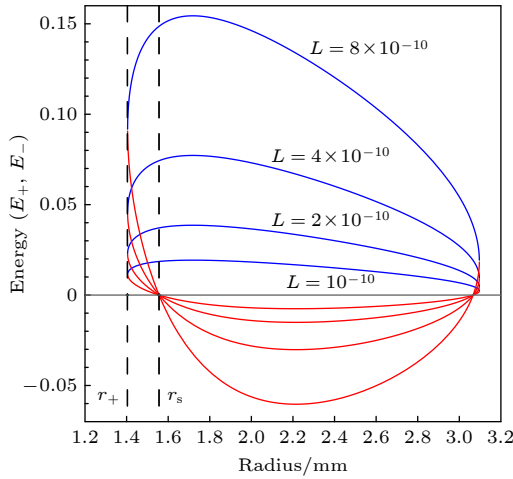


图 8 类比黑洞径向的经典禁区, 其位于 E_+ (蓝线) 和 E_- (红线) 之间; 无质量粒子的角动量分别取 1×10^{-10} , 2×10^{-10} , 4×10^{-10} , 8×10^{-10} ; 类比 BTZ 黑洞的内视界、外视界和静界分别位于 $r_- = 0.36$ mm, $r_+ = 1.40$ mm, $r_s = 1.55$ mm

Fig. 8. Classically forbidden region of the analog black hole at radial. The classical forbidden area is between E_+ (blue line) and E_- (red line); the angular momentum of massless particles is respectively 1×10^{-10} , 2×10^{-10} , 4×10^{-10} , 8×10^{-10} . The inner horizon of the analog black hole, the outer horizon and the static limit are respectively located at $r_- = 0.36$ mm, $r_+ = 1.40$ mm, $r_s = 1.55$ mm.

类比 BTZ 黑洞经典禁区的径向分布与 BTZ 黑洞是不一样的; 由于形成类比黑洞只要求在径向有限位置形成内外视界和静界, 涡旋光的相位会导致在静界外总流速 v_t 和局部声速 c_s 存在其他的交点. 其次, BTZ 黑洞内无质量粒子的能量和角动量

的取值是无量纲的, 类比黑洞内声波的能量和角动量的取值与实验参数是相关的, 且在光子流体中类比黑洞的横向尺寸为 3 mm 左右^[37,38], 因此, 类比黑洞的经典禁区随着径向距离增大不再趋近于特定的能量值, 而是闭合的. 所以, 在有限的径向距离内, 类比 BTZ 黑洞能够很好地模拟 BTZ 黑洞的辐射屏蔽效应.

4 结 论

在类比黑洞中用量子涡旋类比黑洞中有质量粒子的运动^[49], 启发了我们用测地线方程去考虑类比黑洞中声波的运动状态. 本文分别研究了 BTZ 黑洞背景和类比黑洞背景下的辐射屏蔽效应. BTZ 黑洞和类比黑洞有相同的能量和角动量经典禁区分布方式, 在能层内和能层外, 不同的角动量粒子和声波的经典禁区在能量的两个根 E_+ 和 E_- 之间; 在能层内, 不同能量的无质量粒子和声波的经典禁区在角动量的两个根 L_+ 和 L_- 之间; 在能层外, 不同能量的粒子和声波在两个根 L_+ 和 L_- 之外存在经典禁区. 类比黑洞经典禁区的径向分布和 BTZ 黑洞有区别, 涡旋光的径向相位使类比黑洞经典禁区的径向分布闭合; 但在有效的距离下, 类比黑洞能够很好地模拟 BTZ 黑洞的辐射屏蔽效应 (图 8). 粒子和声波的角动量和能量是影响辐射屏蔽效应的重要因素, 图 4 和图 7 显示 BTZ 黑洞

和类比黑洞的中低能区高角动量的粒子的经典禁区更宽^[22], 类比黑洞能比较好地模拟 BTZ 黑洞。

参考文献

- [1] Unruh W G 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 1351
- [2] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
- [3] Lahav O, Itah A, Blumkin A, Gordon C, Rinott S, Zayats A, Steinhauer J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 240401
- [4] Nguyen H S, Gerace D, Carusotto I, Sanvitto D, Galopin E, Lemaître A, Sagnes I, Bloch J, Amo A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 036402
- [5] Euvé L P, Michel F, Parentani R, Philbin T G, Rousseaux G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 121301
- [6] Painlevé P 1921 *C. R. Acad. Sci., Paris* **173** 677
- [7] Gullstrand A 1922 *Ark. Mat. Astron. Fys.* **16** 1
- [8] Lemaître G 1933 *Ann. Soc. Sci. Brux. A* **53** 51
- [9] Robertson S J 2012 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** 163001
- [10] Garza P, Kabat D, van Gelder A 2018 *Class. Quantum Grav.* **35** 165009
- [11] Zhang B 2016 *Adv. High Energy Phys.* **2016** 5710625
- [12] Visser M 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 1767
- [13] Penrose R, Floyd R M 1971 *Nat. Phys. Sci.* **229** 177
- [14] Fagnocchi S, Finazzi S, Liberati S, Kormos M, Trombettoni A 2010 *New J. Phys.* **12** 095012
- [15] Kroon J A V 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 041101
- [16] Visser M, Weinfurtner S 2005 *Class. Quantum Grav.* **22** 2493
- [17] Berti E, Cardoso V, Lemos J P S 2004 *Phys. Rev. D* **70** 124006
- [18] Carusotto I, Ciuti C 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 299
- [19] Braidotti M C, Faccio D, Wright E M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 193902
- [20] Ornigotti M, Bar-Ad S, Szameit A, Fleurov V 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013823
- [21] Prodanov E M 2014 *Class. Quantum Grav.* **31** 105013
- [22] Mc Caughey E 2016 *Eur. Phys. J. C* **76** 179
- [23] Gillani U A, Saifullah K 2021 *Astropart. Phys.* **125** 102496
- [24] Banados M, Teitelboim C, Zanelli J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 1849
- [25] Giacomelli L, Liberati S 2017 *Phys. Rev. D* **96** 064014
- [26] Townsend P K, Zhang B 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 241302
- [27] Zhang B 2013 *Phys. Rev. D* **88** 124017
- [28] Liang C, Gong L, Zhang B 2017 *Class. Quantum Grav.* **34** 035017
- [29] Carlip S 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 3609
- [30] Visser M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3436
- [31] Garay L J, Anglin J R, Cirac J I, Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4643
- [32] Marino F 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063804
- [33] Marino F, Ciszak M, Ortolan A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 065802
- [34] Prain A, Maitland C, Faccio D, Marino F 2019 *Phys. Rev. D* **100** 024037
- [35] Boyd R W 2020 *Nonlinear Optics* (4th Ed.) (New York: Academic Press) pp65–69
- [36] Braidotti M C, Prizia R, Maitland C, Marino F, Prain A, Starshynov I, Westerberg N, Wright E M, Faccio D 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 013901
- [37] Vocke D, Roger T, Marino F, Wright E M, Carusotto I, Clerici M, Faccio D 2015 *Optica* **2** 484
- [38] Vocke D, Maitland C, Prain A, Wilson K E, Biancalana F, Wright E M, Marino F, Faccio D 2018 *Optica* **5** 1099
- [39] Yan J 2021 *Phys. Lett. B* **818** 136359
- [40] Heckenberg N R, McDuff R, Smith C P, White A G 1992 *Opt. Lett.* **17** 221
- [41] McGloin D, Spalding G C, Melville H, Sibbett W, Dholakia K 2003 *Opt. Express* **11** 158
- [42] Ostrovsky A S, Rickenstorff-Parrao C, Arrizón V 2013 *Opt. Lett.* **38** 34
- [43] Farina C, Gamboa J, Seguí-Santonja A J 1993 *Class. Quantum Grav.* **10** L193
- [44] Wilkins D C 1972 *Phys. Rev. D* **5** 814
- [45] Chandrasekhar S 1983 *The Mathematical Theory of Black Holes* (New York: Oxford university press) pp342–347
- [46] Cebeci H, Özdemir N, Şentorum S 2016 *Phys. Rev. D* **93** 104031
- [47] Banados M, Henneaux M, Teitelboim C, Zanelli J 1993 *Phys. Rev. D* **48** 1506
- [48] Cruz N, Martinez C, Pena L 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 2731
- [49] Solnyshkov D D, Leblanc C, Koniakhin S V, Bleu O, Malpuech G 2019 *Phys. Rev. B* **99** 214511

Radiation shielding of analog Bañados-Teitelboim-Zanelli black holes*

Zhang Hong-Bin Chen Ling Zhang Bao-Cheng[†]

(*School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China*)

(Received 1 December 2022; revised manuscript received 26 December 2022)

Abstract

Although the theory of analog gravity suggests that we can simulate the space-time structure of black holes by using laboratory physical systems, it is difficult to find the analogs for rotating black holes in laboratory systems. In this work, we use a new field form for the optical vortex to study the analogous black hole structure close to the Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) black hole. We compare the similarities and differences between massless particles and sound waves by calculating their motions in space-time analogous to BTZ black holes and gravitational BTZ black holes. The effective potential energy values of massless particles and sound waves in both kinds of black hole spacetimes give the same forbidden-zone distributions of energy and angular momentum. The difference is that the classical forbidden area of the BTZ black hole will approach fixed energy values along the radial direction, while the classical forbidden area of the analogous BTZ black hole will be closed along the radial direction. Fortunately, near the event horizon and the ergosphere, the behaviors of massless particles and sound waves are almost the same. From this point of view, we can say that the analogous experimental system can simulate the BTZ black hole very well. In particular, the classically forbidden regions of particles with low energy and high angular momentum are wider in both types of black hole space-time.

Keywords: Bañados-Teitelboim-Zanelli black hole, analog black hole, optical vortex, classically forbidden regions

PACS: 04.70.Bw, 04.25.-g, 04.80.-y, 47.35.Rs

DOI: [10.7498/aps.72.20222296](https://doi.org/10.7498/aps.72.20222296)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11654001).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangbaocheng@cug.edu.cn



类比Bañados-Teitelboim-Zanelli黑洞的辐射屏蔽

张鸿宾 陈玲 张保成

Radiation shielding of analog Baados-Teitelboim-Zanelli black holes

Zhang Hong-Bin Chen Ling Zhang Bao-Cheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 060401 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222296

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222296>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

利用全息法在偶氮聚合物薄膜中记录涡旋光场

Recording optical vortices in azo polymer films by applying holographic method

物理学报. 2021, 70(5): 054204 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201496>

非对易施瓦西黑洞的热力学及其量子修正

Thermodynamics and its quantum correction of non-commutative Schwarichild black hole

物理学报. 2019, 68(20): 200401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191054>

引力彩虹时空中Kerr黑洞的熵谱和面积谱

Entropy spectrum and area spectrum of Kerr black hole in gravity's rianbow

物理学报. 2018, 67(6): 060401 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172374>

洛伦兹破缺理论与Vaidya黑洞弯曲时空中的Dirac粒子隧穿辐射特征

Lorentz-violating theory and tunneling radiation characteristics of Dirac particles in curved spacetime of Vaidya black hole

物理学报. 2019, 68(19): 190401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190437>

环面黑洞的热力学函数

Thermodynamic functions of toroidal black holes

物理学报. 2022, 71(11): 110401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20212370>

Kiselev黑洞的热力学性质和物质吸积特性

Thermodynamic properties and matter accretion properties of Kiselev black hole

物理学报. 2019, 68(6): 060402 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182055>