

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

空间位移 \mathcal{PT} 对称非局域非线性薛定谔方程的高阶怪波解*饶继光¹⁾²⁾ 陈生安¹⁾ 吴昭君¹⁾ 贺劲松^{2)†}

1) (湖北科技学院数学与统计学院, 咸宁 437000)

2) (深圳大学高等研究院, 深圳 518060)

(2022 年 12 月 2 日收到; 2022 年 12 月 25 日收到修改稿)

利用 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 系列约束方法和双线性方法, 构造了空间位移宇称-时间反演 (\mathcal{PT}) 对称非局域非线性薛定谔方程的高阶怪波解. 任意 N 阶怪波解的解析表达式是通过舒尔多项式表示的. 首先通过分析一阶怪波解的动力学行为, 发现怪波的最大振幅可以大于背景平面三倍的任意高度. 分析了对称非局域非线性薛定谔方程中的空间位移因子 x_0 在一阶怪波解中的影响, 结果表明其仅改变怪波中心的位置. 另外, 研究了二阶怪波解的动力学行为以及怪波模式, 然后给出了 N 阶怪波模式与 N 阶怪波解的解析表达式中参数之间的关系, 进一步展示了高阶怪波的不同模式.

关键词: 怪波, 空间位移 \mathcal{PT} 对称非局域非线性薛定谔方程, Kadomtsev-Petviashvili 系列约束方法

PACS: 42.65.Tg, 05.45.Yv, 02.30.Ik, 04.20.Jb

DOI: 10.7498/aps.72.20222298

1 引言

非线性演化方程可以用于描述流体、光纤、等离子体等领域中的各种非线性现象. 一直有大量关于可积的和不可积的非线性演化方程的相关研究被报道^[1,2]. 这些研究主要从理论和实验两个方面关注非线性色散效应、各种孤子之间的相互作用、双哈密顿结构等. 1998 年, 量子物理学家 Bender 和 Boettcher^[3,4] 发现具有宇称-时间反演对称 (\mathcal{PT} 对称) 的非厄米哈密顿量也可以存在全为实数的能谱, 从此具有 \mathcal{PT} 对称性的非厄米系统受到关注. 近年来, 非厄米物理学在理论和实验两个方面取得了重要的进展. 随着科学技术的发展, 越来越多的物理系统 (如开放量子系统、自旋模型、光学系统、声学系统、冷原子系统) 中均实现了 \mathcal{PT} 对称的非

厄米系统^[5-13]. 通俗地讲, 如果复的势函数 $V(x)$ 满足关系 $V(x) = V^*(-x)$, 那么非厄米哈密顿量 $H = \hat{p} + V(x)$ 是 \mathcal{PT} 对称的, 其中 \hat{p} 是动量算子^[3,4].

由于 \mathcal{PT} 对称在物理中的重要应用, 许多物理学家和数学家关注与 \mathcal{PT} 对称相关的非线性演化方程. 2013 年, Ablowitz 和 Musslimani^[14] 通过对 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) 系统提出 \mathcal{PT} 对称约束推导出了 \mathcal{PT} 对称非局域非线性薛定谔方程:

$$q_t(x, t) - i\frac{1}{2}(x, t)q_{xx}(x, t) \pm iq(x, t)V(x, t) = 0,$$

$$V(x, t) = q(x, t)q^*(-x, t). \quad (1)$$

显然, 在该方程中势函数 $V(x)$ 满足 $V(x) = V^*(-x)$. 因为这个方程是可积的, 能够用达布变换、反散射、双线性方法研究这个系统的孤立子解、呼吸解、怪波解等^[15-24]. 随后他们又提出了一系列的

* 国家自然科学基金 (批准号: 12071304, 12201195)、湖北省自然科学基金 (批准号: 2022CFB818)、湖北科技学院博士启动基金 (批准号: BK202302) 和湖北科技学院科研创新团队资助项目 (批准号: 2022T05) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hejingsong@szu.edu.cn

PT 对称非局域可积系统 [25]. 楼森岳教授 [26-28] 也提出一系列非局域可积系统并研究了其孤立子解. 最近, Ablowitz 和 Musslimani [29] 通过对 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) 系统提出空间位移的 PT 对称约束推导出了下列空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程:

$$q_t(x, t) - i\frac{1}{2}q_{xx}(x, t) - iq(x, t)V(x, t) = 0,$$

$$V(x, t) = q(x, t)q^*(x_0 - x, t). \quad (2)$$

显然, 当 $x_0 = 0$ 时, 方程 (2) 退化为方程 (1). 方程 (2) 也是可积的, 可利用达布变换、反散射、双线性方法构造该系统的孤立子解、呼吸解、怪波解等 [29-38].

可积系统的怪波解是近年来非线性科学的一个热点问题 [39-53], 其在很多领域 (如海洋、玻色-爱因斯坦凝聚体、非线性光纤、等离子体、生物医学等) 中都有着非常重要的应用 [54-62]. 文献 [34] 利用达布变换研究了空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程 (2) 的部分怪波解, 但其仅直接给出了一阶和二阶怪波解的解析表达式, 三阶以上的怪波解的解析表达式是通过特征函数的展开式间接给出的. 关于怪波解中自由参数与高阶怪波模式之间的关系没有被研究过. 另外, Kadomtsev-Petviashvili (KP) 系列约束方法结合双线性方法能够构造方程 (2) 在非消失边界下的孤立子解 [37]. 但是到目前为止, 该方法没有被用于构造方程 (2) 的怪波解. 相比于构造孤立子解, 此方法构造怪波解的难度更大, 主要是使相关的 τ 函数为有理函数时满足空间位移的 PT 对称约束关系时难度较大. 本文将从以下两个方面研究空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程 (2) 的怪波解.

- 利用 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 系列约束方法结合双线性方法构造方程 (2) 的高阶怪波解, 其解析表达式利用舒尔多项式直接表示.

- 方程 (2) 中高阶怪波解的动力学行为, 以及高阶怪波的模式与解析解中自由参数之间的关系.

2 空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程的高阶怪波解及其动力学行为

本节首先通过一个定理给出空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程 (2) 的高阶怪波解, 然后进一步研究这些高阶怪波解的动力学行为.

2.1 非局域非线性薛定谔方程 (2) 的高阶怪波解

本小节利用舒尔多项式给出方程 (2) 的高阶怪波解的解析表达式. 为此, 先简单介绍舒尔多项式 $S_k(z)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(z)\epsilon^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k\epsilon^k\right), \quad (3)$$

及其具体表达式:

$$S_k(z) = \sum_{\ell_1+2\ell_2+\dots+m\ell_m=k} \left(\prod_{j=1}^m \frac{z_j^{\ell_j}}{\ell_j!}\right), \quad (4)$$

其中, $z = (z_1, z_2, \dots)$.

定理 1 空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程 (2) 有如下形式的 N 阶怪波解:

$$u_N = e^{it\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_0}}, \quad (5)$$

其中, N 表示怪波解的阶数. $\tilde{\tau}_n$ 为如下 N 阶行列式:

$$\tilde{\tau}_n = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(M_{2i-1, 2j-1}^{(n)}\right). \quad (6)$$

行列式元素 $M_{i,j}^{(n)}$ 的一般形式为

$$M_{i,j}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\min(i,j)} \frac{1}{4^\nu} S_{i-\nu}(x^+(n) + \nu s) \times S_{j-\nu}(x^-(n) + \nu s). \quad (7)$$

式中, $x^\pm(n)$ 和 s 为向量:

$$x^\pm(n) = (x_1^\pm(n), x_2^\pm, \dots), \quad s = (s_1, s_2, \dots),$$

x_j^\pm 的表达式为

$$x_1^\pm = \left(x - \frac{x_0}{2}\right) \pm it \pm n + ic_1^\pm,$$

$$x_k^\pm = \frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \pm 2^{k-1}it}{k!} + ic_k^\pm, k \geq 2, \quad (8)$$

这里 c_j^\pm 为任意实数, s_j 为下面展开式的系数:

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j \lambda^j = \ln \left[\frac{2}{\lambda} \tanh \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

注 1 利用文献 [40] 中相同的方法, 可以证明 x 和 t 的最高次项来自于 $C[x_1^+(n)x_1^-(n)]^{N(N+1)/2}$, C 是一个与 n 无关的常数项, 所以

$$\tilde{\tau}_n = C[(x-x_0)^2 + t^2]^{N(N+1)/2} + x \text{ 和 } t \text{ 的低阶项}. \quad (10)$$

由此可以得到

$$\tilde{\tau}_1/\tilde{\tau}_0 \rightarrow 1, \quad x, t \rightarrow \pm\infty. \quad (11)$$

即怪波解 u_N 满足边值条件:

$$u_N \rightarrow e^{it}, \quad x, t \rightarrow \pm\infty. \quad (12)$$

注 2 当 $c_1^+ = c_1^-, c_j^\pm = 0 (j \geq 2)$ 时, 怪波解 (5) 满足对称关系: $u_N^*(x_0 - x, t) = u_N(x, t)$. 且在此参数条件下, 如果怪波解 u_N 是光滑的, 则由 $N(N+1)/2$ 个一阶怪波组成的 N 阶怪波将呈现基本模式 (即存在一个最大的主峰和若干对称的小峰). 并且此基本模式的怪波的中心位于点 $(x_0, 0)$, 并在该点有最大振幅.

注 3 以上怪波解中包含 $4N$ 个自由参数: $c_1^\pm, c_2^\pm, \dots, c_{2N}^\pm$. 但是利用文献 [40] 中类似的方法可以证明自由参数 $c_2^\pm, c_4^\pm, c_6^\pm, \dots$ 是无效参数, 将 δ_n 的行列式展开其可以自动消除, 故在关于怪波解动力行为的讨论中, 取 $c_2^\pm = c_4^\pm = \dots = c_{2N}^\pm = 0$. 所以, 怪波解 u_N 中仅包含 $2N$ 个自由参数: $c_1^\pm, c_3^\pm, \dots, c_{2N-1}^\pm$.

2.2 怪波解的动力学行为

本小节研究怪波解 (5) 的动力学行为以及高阶怪波解的模式与自由参数之间的关系.

2.2.1 一阶怪波解的动力学行为

取 $N = 1$ 时, 由方程 (5)–(9) 可得非局域非线性薛定谔方程 (2) 的一阶怪波解, 经过简单的代数计算可以整理为如下解析表达式:

$$u_1 = e^{it} \left[1 - \frac{\text{Si}(t + \hat{t}) + 4}{4(x + i\hat{x} - \frac{1}{2}x_0)^2 + 4(t + \hat{t})^2 + 1} \right], \quad (13)$$

其中 $\hat{x} = \frac{(c_1^+ + c_1^-)}{2}$, $\hat{t} = \frac{c_1^+ - c_1^-}{2}$. 当 $(c_1^+ + c_1^-)^2 < 1$ 时, u_N 解析表达式的分母始终不为 0. 所以, 当 $(c_1^+ + c_1^-)^2 < 1$ 时, u_N 是非奇异的.

对 $|u_N|$ 做极值分析, 可以得到此一阶怪波的波峰所在位置 (即怪波的中心) 为 $A_0 = (x_0/2, -\hat{t})$, 波峰处振幅 (即此一阶怪波的最大振幅) 为 $A_{\max} = 4/(1 - 4\hat{x}^2) - 1$. 说明位移参数 x_0 仅仅影响怪波的位置, 与怪波的振幅无关. 当 $\hat{x} \rightarrow 0$ 时, $A_{\max} \rightarrow +\infty$. 相较于非线性薛定谔方程的一阶怪波解, 其最大振幅一定是背景平面的三倍, 非局域非线性薛定谔方程 (2) 的一阶怪波解的最大振幅取决于自由参数 \hat{x} (即 $(c_1^+ + c_1^-)/2$) 的取值, 可以趋于无穷大. 说明非局域非线性薛定谔方程 (2) 的怪波具有更大的能量. 另外, 还可以得到两个波谷所在

的坐标为 $\left(\frac{x_0}{2} + \sqrt{\frac{4\hat{x}^2 + 3}{4\hat{x}^2 + 4}}, -\hat{t} + \hat{x}\sqrt{\frac{4\hat{x}^2 + 3}{4\hat{x}^2 + 4}}\right)$ 和 $\left(\frac{x_0}{2} - \sqrt{\frac{4\hat{x}^2 + 3}{4\hat{x}^2 + 4}}, -\hat{t} - \hat{x}\sqrt{\frac{4\hat{x}^2 + 3}{4\hat{x}^2 + 4}}\right)$. 波峰和两个波谷所在位置位于同一直线上, 且两个波谷所在位置关于波峰所在位置对称. 在波谷所在位置, 怪波的振幅为 0. 这两个特征与非线性薛定谔方程中的一阶怪波解是一致的.

下面通过图形展示此一阶怪波解. 为了突出相移参数 x_0 的作用, 取 $c_1^- = c_1^+ = c$, 即 $\hat{t} = 0$, 此怪波的中心始终在直线 $t = 0$ 上. 图 1(a) 给出的是一阶怪波解 (13) 在参数 $c_1^+ = c_1^- = 0, x_0 = 0$ 下的动力学行为. 图 1(a) 中, 怪波的振幅最大值为 91/9. 图 1(b) 给出的是一阶怪波解在参数 x_0 和 $c_1^- = c_1^+ = c$ 不同取值下沿着 $t = 0$ 的截面图. 从图可以观察到, c 的取值越接近于 1/2 时, 此怪波最大振幅越大. 另外还可以观察到, 参数 x_0 控制怪波的波峰所在的位置.

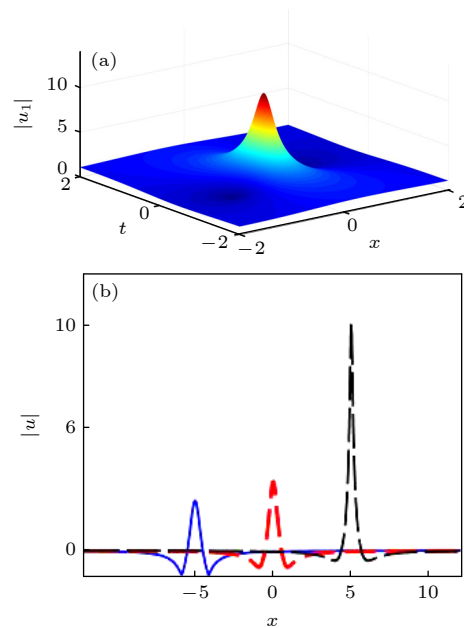


图 1 (a) 非局域非线性薛定谔方程 (2) 的一阶怪波解 (13), 参数取值为 $c_1^+ = 2/5, c_1^- = 2/5, x_0 = 0$; (b) 不同参数取值下一阶怪波解沿 $t = 0$ 的截面图: $c_1^+ = c_1^- = 0, x_0 = -10$ (蓝色实线), $c_1^+ = c_1^- = 1/5, x_0 = 0$ (红色短虚线), $c_1^+ = c_1^- = 2/5, x_0 = 10$ (黑色长虚线)

Fig. 1. (a) The first-order rogue wave solutions (13) of the nonlocal NLS equation (2) with parameters $c_1^+ = 2/5, c_1^- = 2/5, x_0 = 0$; (b) plot of the first-order rogue wave solutions along $t = 0$ with parameters $c_1^+ = c_1^- = 0, x_0 = -10$ (Blue solid line), $c_1^+ = c_1^- = 1/5, x_0 = 0$ (Red short dotted line), $c_1^+ = c_1^- = 2/5, x_0 = 10$ (Black long dotted line).

2.2.2 二阶怪波解的动力学行为

取 $N = 2$ 时, 由定理 1 可得非局域非线性薛定谔方程 (2) 的二阶怪波解:

$$u_2 = e^{it} \frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_0}, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_n = & \left[\left(\tilde{S}_{1,0}^+ \tilde{S}_{1,0}^- \tilde{S}_{2,1}^+ \tilde{S}_{2,1}^- + \tilde{S}_{3,0}^+ \tilde{S}_{3,0}^- + \frac{1}{4} \tilde{S}_{1,0}^+ \tilde{S}_{1,0}^- \tilde{S}_{1,2}^+ \tilde{S}_{1,2}^- \right) \right. \\ & \left. - \left(\tilde{S}_{1,0}^+ \tilde{S}_{2,1}^+ \tilde{S}_{3,0}^- + \tilde{S}_{1,0}^- \tilde{S}_{2,1}^- \tilde{S}_{3,0}^+ \right) \right] \\ & + \frac{1}{16} \left(\tilde{S}_{1,0}^+ \tilde{S}_{1,0}^- + \tilde{S}_{1,2}^+ \tilde{S}_{1,2}^- \right) + \frac{1}{64}, \\ & \tilde{S}_{k,\ell}^\pm = x_k^\pm + ls_k. \end{aligned} \quad (15)$$

由注 2 可得, 当 u_2 是光滑的且 $c_1^\pm = c, c_3^\pm = 0$ 时, 此二阶怪波解 $|u_2|$ 在点 $(x_0, 0)$ 处达到最大振幅: $|u_2(x_0, 0)| = \left| \frac{-64c^6 - 80c^4 + 20c^2 + 45}{-64c^6 + 112c^4 - 76c^2 + 9} \right|$. 图 2(a) 所示为 $|u_2(x_0, 0)|$ 关于 c 值的变化. 从图可以看出, 当 $c \rightarrow c_0$ 时 (c_0 为 $u_2(x_0, 0)$ 分母的一个根), $|u_2(x_0, 0)| \rightarrow \pm\infty$, 且 $|u_2(x_0, 0)| \geq 5$. 从图 2(b) 可以进一步观察到, 此二阶怪波解是关于 $x = x_0$ 对称的, 并且其最大振幅随 c 值变化. 这是与局域非线性薛定谔方程

中的二阶怪波解的最大区别, 局域非线性薛定谔方程中的二阶怪波解的最大振幅始终是背景平面的 5 倍, 与参数取值无关. 二阶怪波解 $|u_2|$ 的基本模式如图 2(c) 所示. 另外, 当 $c_3^+ = -c_3^-$ 且 $|c_3^-| \gg 0$ 时, 该二阶怪波解将呈现三角模式, 如图 2(d) 所示.

2.2.3 高阶怪波解的模式

与文献 [63] 介绍的局域非线性薛定谔方程中的高阶怪波解一样, (5) 式中高阶怪波解 u_N 关于参数 c_{2N-1} 的渐近行为同样可以利用 Yablonskii-Vorob'ev 多项式的根进行分析. 基于类似分析, 可以给出在参数 $c_1^+ = c_1^- = c_1, 0 < |c_1| \ll 1, c_{2j-1}^+ = c_{2j-1}^- = c_{2j-1} (j = 2, \dots, N)$ 下高阶怪波解 u_N 关于参数 c_{2j-1} 的一些模式:

- 当 $c_{2j-1} = 0$ 时, N 阶怪波解 u_N 为基本模式.
- 当 $|c_3| \gg 0, c_{2j-1} = 0$, 其中 $j = 3, \dots, N$ 时, N 阶怪波解 u_N 为三角模式.
- 当 $N \geq 3, c_j = 0, |c_{2N-1}| \gg 0$, 其中 $j = 2, \dots, N-1$ 时, N 阶怪波解 u_N 怪波模式表现为: 中心是一个 $(N-2)$ 阶基本模式的怪波, 而外部为 $(2N-1)$ 个一阶怪波环绕形成一个圆形.

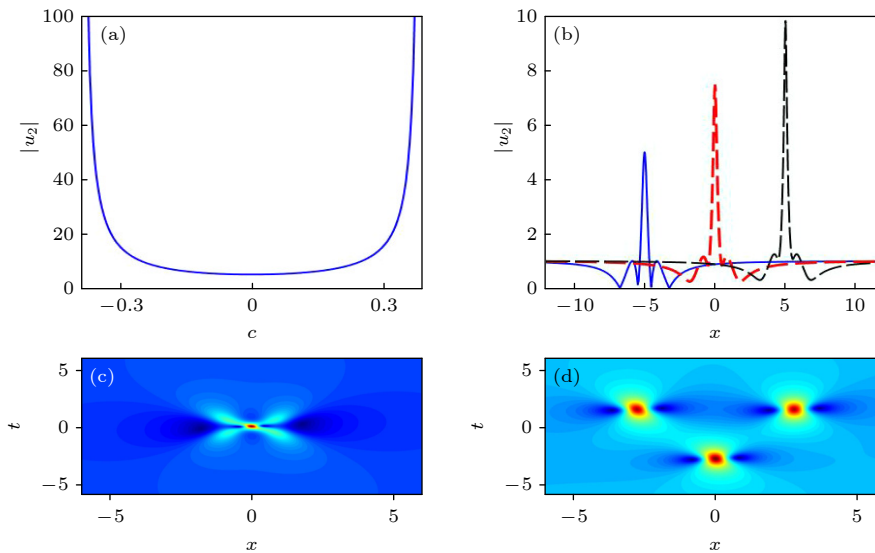


图 2 (a) 二阶怪波解的最大值 $|u_2(x_0, 0)|$ 随 $c_1^+ = c_1^-$ 变化; (b) 不同参数取值下一阶怪波解沿 $t = 0$ 的截面图: $c_1^+ = c_1^- = 0, x_0 = -10$ (蓝色实线), $c_1^+ = c_1^- = 1/5, x_0 = 0$ (红色短虚线), $c_1^+ = c_1^- = 1/4, x_0 = 10$ (黑色长虚线); (c) 二阶怪波解 $|u_2|$ 的基本模式, 参数 $c_1^+ = c_1^- = 1/10, c_3^+ = c_3^- = 0$; (d) 二阶怪波解 $|u_2|$ 的三角模式, 参数 $c_1^+ = c_1^- = 1/10, c_3^+ = -c_3^- = 10$

Fig. 2. (a) Changes in the maximum of the second-order rogue wave $|u_2(x_0, 0)|$ along $c_1^+ = c_1^-$; (b) pot of the second-order rogue waves along $t = 0$ with different parameters: $c_1^+ = c_1^- = 0, x_0 = -10$ (Blue solid line), $c_1^+ = c_1^- = 1/5, x_0 = 0$ (Red short dotted line), $c_1^+ = c_1^- = 1/4, x_0 = 10$ (Black long dotted line); (c) fundamental pattern of the second-order rogue wave solution $|u_2|$ with parameters $c_1^+ = c_1^- = 1/10, c_3^+ = c_3^- = 0$; (d) triangle pattern of the second-order rogue wave solution $|u_2|$ with parameters $c_1^+ = c_1^- = 1/10, c_3^+ = -c_3^- = 10$.

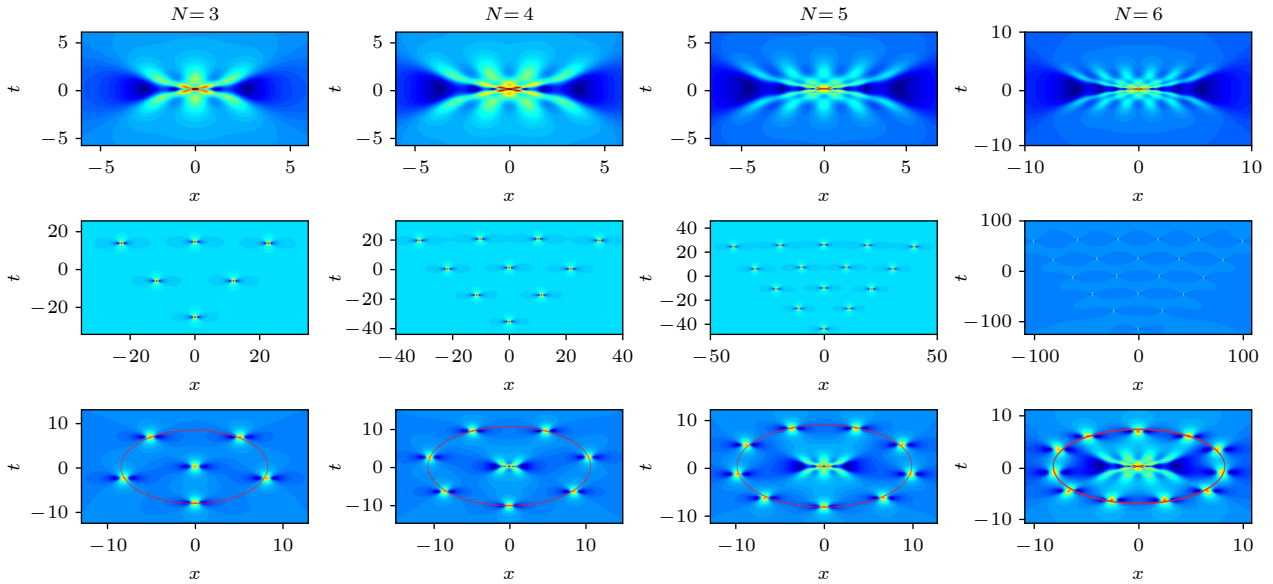


图 3 从左往右四列依次为 3 阶至 6 阶怪波在不同参数下的模式, 所有图形中参数 $c_1^\pm = (1/100)i$. 第一行: 3 阶至 6 阶怪波的基本模式, $c_{2j-1}^\pm = 0$; 第二行: 3 阶至 6 阶怪波的三角模式, $c_3^\pm = \pm 10^{N-2}$ (从左往右图形中 N 的值依次为 3, 4, 5, 6), 其他参数均为 0; 第三行: 3 阶至 6 阶怪波的圆形模式, $c_{2N-1}^\pm = \pm 10000$ (从左往右图形中 N 的值依次为 3, 4, 5, 6), 其他参数均为 0

Fig. 3. The four columns from left to right correspond to the patterns of third-order to sixth-order rogue waves with $c_1^\pm = (1/100)i$ and different parameters: The first row: The fundamental patterns of third-order to sixth-order rogue waves with parameters $c_{2j-1}^\pm = 0$; The second row: The triangle patterns of third-order to sixth-order rogue waves with parameters $c_3^\pm = \pm 10^{N-2}$ (The value of N in the figures from left to right is 3, 4, 5, 6), and the other parameters are zero; The third row: The circular patterns of third-order to sixth-order rogue waves with parameters $c_{2N-1}^\pm = \pm 10000$ (The value of N in the figures from left to right is 3, 4, 5, 6), and the other parameters are zero.

• 当 $N \geq 5$, $c_j = 0$, $|c_{2N-3}^\pm| \gg 0$, 其中 $j = 2, \dots, N$ 且 $j \neq N - 2$ 时, u_N 的怪波模式表现为: 中心是一个 $(N - 4)$ 阶基本模式的怪波, 而外部为 $(4N - 6)$ 个一阶怪波环绕形成两个圆形, 且每一个圆形由 $(2N - 3)$ 个一阶怪波组成.

下面通过图形展示怪波解 u_N 在不同参数 c_j 下的高阶怪波模式. 首先展示的是 3 阶至 6 阶怪波基本模式, 对应参数是 $c_{2j-1} = 0$ ($j = 2, 3, \dots, N$), 见图 3 的第一排. 从图中可以直接观察到怪波解关于点 $(x_0, 0)$ 是对称的, 并且此对称点是怪波的主峰, 主峰附近伴随着一些对称的小峰. 然后我们展示三角模式的高阶怪波, 对应的参数取值为 $|c_3| \gg 0$, $c_{2j-1} = 0$. 图 3 的中间一排从左往右依次展示的是 3 阶至 6 阶怪波, 可以观察到整个怪波分布呈现三角模式, 每条三角形边上有 N 个一阶怪波解. 另外, 这类三角模式下的怪波可以分为 N 行, 沿 t 轴正方向这 N 行包含一阶怪波个数依次呈等差递增数列. 外部为圆形模式而中心为 $N - 2$ 阶基本模式的 3 阶至 6 阶怪波, 对应的参数条件为 $N \geq 3$,

$c_j = 0$, $|c_{2N-1}| \gg 0$, 展示在图 3 的最下排. 最后, 图 4 给出了 5 阶和 6 阶怪波的另一模式, 其中心为一个 $(N - 4)$ 阶怪波的基本模式, 外部由一阶怪波环绕的两个圆形.

3 定理 1 的证明

本节利用 KP 系列约束方法构造空间位移 PT 对称非局域非线性薛定谔方程 (2) 高阶怪波解 u_N , 即证明定理 1.

做双线性变换 $u = e^{it} \frac{g}{f}$, 方程 (2) 可以转换为双线性形式:

$$\begin{aligned} (D_x^2 + 2iD_t)g \cdot f &= 0, \\ (D_x^2 - 2)g \cdot f &= -2gg^*(x_0 - x, t), \end{aligned} \quad (16)$$

函数 f 满足约束关系

$$f(x, t) = f^*(x_0 - x, t), \quad (17)$$

此处 D 为双线性算子^[64].

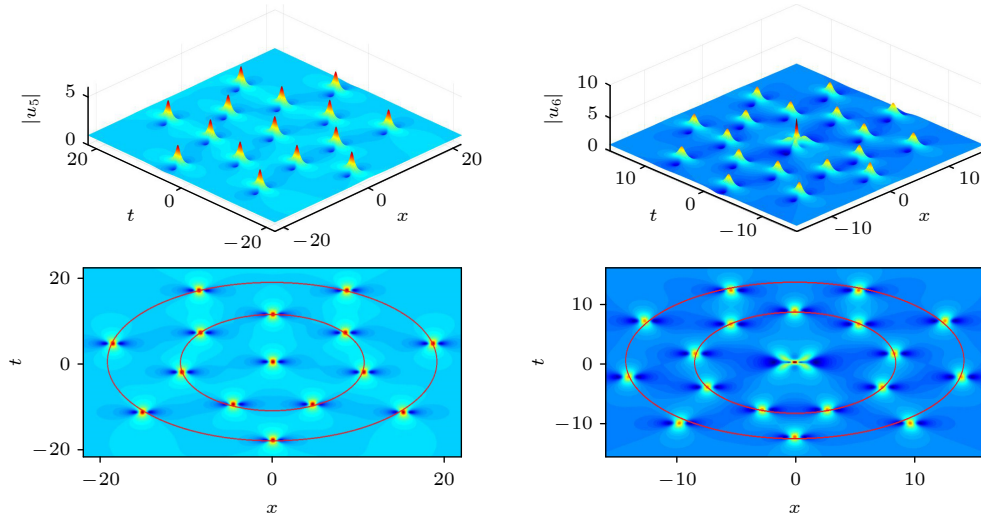


图 4 左列为 5 阶怪波的双环形模式, 参数取值为 $c_7^\pm = \pm 10000$, 其他参数为 0. 右列为 6 阶怪波的双环形模式, 参数取值为 $c_9^\pm = \pm 10000$, 其他参数为 0

Fig. 4. The left column is double ring pattern of the fifth-order rogue wave with parameters $c_7^\pm = \pm 10000$ and the other parameter being zero. The right column is double ring pattern of the sixth-order rogue wave with parameters $c_9^\pm = \pm 10000$ and the other parameters being zero.

由 Sato 理论^[65,66]及文献 [40] 中引理 3.1 结论可知, KP 系列的双线性方程

$$\begin{aligned} (D_{x_1}^2 - D_{x_2})\tau_{n+1} \cdot \tau_n &= 0, \\ (D_{x_1}D_{x_{-1}} - 2)\tau_n \cdot \tau_n &= -2\tau_{n+1}\tau_{n-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

有如下形式的 τ 函数:

$$\tau_n = \det \left(m_{i,j}^{(n)} \right). \quad (19)$$

行列式元素 $m_{i,j}^{(n)}$ 满足如下偏微分关系:

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} m_{i,j}^{(n)} &= \psi_i^{(n)} \phi_j^{(n)}, \\ \partial_{x_2} m_{i,j}^{(n)} &= \psi_i^{(n+1)} \phi_j^{(n,k)} + \psi_i^{(n)} \phi_j^{(n-1)}, \\ \partial_{x_{-1}} m_{i,j}^{(n)} &= -\psi_i^{(n-1)} \phi_j^{(n+1)}, \\ m_{i,j}^{(n+1)} &= m_{i,j}^{(n)} + \psi_i^{(n)} \phi_j^{(n+1)}, \\ \partial_{x_k} \psi_i^{(n)} &= \psi_i^{(n+k)}, \\ \partial_{x_k} \phi_i^{(n)} &= -\psi_i^{(n-k)}, \quad (k = -1, 1, 2). \end{aligned} \quad (20)$$

为了构造定理 1 中的高阶怪波解 u_N , 选取 $m_{i,j}^{(n)}$ 为如下形式:

$$\begin{aligned} m_{i,j}^{(n)} &= A_i B_j \frac{(p+1)(q+1)}{2(p+q)} \left(-\frac{p}{q} \right)^n e^{\xi+\eta}, \\ \psi_i^{(n)} &= A_i \frac{\sqrt{2}}{2} (p+1) p^n e^\xi, \\ \phi_j^{(n)} &= B_j \frac{\sqrt{2}}{2} (q+1) (-q)^{-n} e^\eta, \end{aligned}$$

$$A_i = \frac{1}{i!} (p\partial_p)^i, \quad B_j = \frac{1}{j!} (q\partial_q)^j,$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{p} x_{-1} + p x_1 + p^2 x_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} p x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ (\ln p)^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{q} x_{-1} + q x_1 - q^2 x_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} q x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- (\ln q)^k. \end{aligned} \quad (21)$$

显然, $m_{i,j}^{(n)}, \psi_i^{(n)}, \phi_j^{(n)}$ 依然满足偏微分关系组 (20). 当改写 $m_{i,j}^{(n)}$ 下标为 $m_{2i-1, 2j-1}^{(n)}$ 时, $m_{2i-1, 2j-1}^{(n)}$ 依然满足偏微分关系组 (20). 所以, 如下形式的 τ 函数:

$$\hat{\tau}_n = \det \left(m_{2i-1, 2j-1}^{(n)} \right). \quad (22)$$

依然满足双线性方程组 (18). 当 $p = q = 1$ 时, 此 τ 函数满足如下维数约束关系:

$$(\partial_{x_1} + \partial_{x_{-1}}) \hat{\tau}_n |_{p=1, q=1} = 4N \hat{\tau}_n |_{p=1, q=1}. \quad (23)$$

所以 τ 函数 $\tilde{\tau}_n = \hat{\tau}_n |_{p=1, q=1}$ 满足如下双线性方程组:

$$\begin{aligned} (D_{x_1}^2 - D_{x_2}) \tilde{\tau}_{n+1} \cdot \tilde{\tau}_n &= 0, \\ (D_{x_1}D_{x_{-1}} - 2) \tilde{\tau}_n \cdot \tilde{\tau}_n &= -2\tilde{\tau}_{n+1} \tilde{\tau}_{n-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

另外, $m_{i,j}^{(n)} |_{p=1, q=1}$ 可以写成舒尔多项式形式:

$$m_{i,j}^{(n)} \Big|_{p=1,q=1} = e^{2x_1} \sum_{\nu=0}^{\min(i,j)} \frac{1}{4^\nu} S_{i-\nu}(\tilde{x}^+(n) + \nu s) S_{j-\nu}(\tilde{x}^-(n) + \nu s), \quad (25)$$

其中

$$\tilde{x}_1^\pm(n) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_0\right) \pm 2x_2 \pm n + a_1^\pm, \quad \tilde{x}_k^\pm = \frac{\left(x - \frac{1}{2}x_0\right) \pm 2^k x_2}{k!} + a_k^\pm, \quad k \geq 2. \quad (26)$$

所以, $\tilde{\tau}_n$ 可以整理为如下形式:

$$\tilde{\tau}_n = e^{2Nx_1} \det_{1 \leq 2i-1, 2j-1 \leq N} \left[\sum_{\nu=0}^{\min(2i-1, 2j-1)} \frac{1}{4^\nu} S_{2i-1-\nu}(\tilde{x}^+(n) + \nu s) S_{2j-1-\nu}(\tilde{x}^-(n) + \nu s) \right]. \quad (27)$$

因为在定理 1 中, 怪波解的表达式形如 $\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_0}$, 所以以上 $\tilde{\tau}$ 中 e 指数因子 e^{2Nx_1} 可以约掉, 于是可以进一步将 $\tilde{\tau}$ 写为如下形式:

$$\tilde{\tau}_n = \det_{1 \leq 2i-1, 2j-1 \leq N} \left[\sum_{\nu=0}^{\min(2i-1, 2j-1)} \frac{1}{4^\nu} S_{2i-1-\nu}(\tilde{x}^+(n) + \nu s) S_{2j-1-\nu}(\tilde{x}^-(n) + \nu s) \right]. \quad (28)$$

做如下变换:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{1}{2}it, \quad (29)$$

并且如果 $\tilde{\tau}$ 满足如下非局域约束关系:

$$\tilde{\tau}_n^*(x_0 - x, t) = \tilde{\tau}_{-n}(x, t). \quad (30)$$

那么, 取 $f = \tau_0, g = \tau_1, g^*(x_0 - x) = \tau_{-1}$, 双线性方程组 (24) 将转换为双线性方程组 (16), 所以, $\tilde{\tau}_0 = f, \tilde{\tau}_1 = g, \tilde{\tau}_{-1} = g^*(x_0 - x)$ 为双线性方程组 (16) 的解.

下面将实现非局域约束关系 (30) 式. 为此取 $a_j^\pm = ic_j^{(\pm)}$, 其中 c_j^\pm 为实数. 在变换 (29) 式下, \tilde{x}_j^\pm 可以改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^\pm(n) &= \left(x - \frac{1}{2}x_0\right) \pm it \pm n + ic_1^\pm, \\ \tilde{x}_k^\pm &= \frac{\left(x - \frac{1}{2}x_0\right) \pm 2^{k-1}it}{k!} + ic_k^\pm, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (31)$$

其与定理 1 中 x_j^\pm 满足如下关系:

$$\bar{x}_j^\pm(x, t) = -\tilde{x}_j^\pm(x, t), \quad j \geq 2, \quad (32)$$

其中 $\bar{x}_j^\pm(x, t) = x_j^{\pm*}(x_0 - x, t)$. 如果定义

$$\tilde{y}^\pm(n) = (-\tilde{x}_1^\pm(n), \tilde{x}_2^\pm, -\tilde{x}_3^\pm, \tilde{x}_4^\pm, \dots),$$

$$\tilde{z} = (0, -2\tilde{x}_2^\pm, 0, -2\tilde{x}_4^\pm, 0, \dots),$$

则有

$$\bar{x}(n) + \nu s = \tilde{y}^\pm(n) + \nu s + \tilde{z}. \quad (33)$$

由 (33) 式以及舒尔多项式性质有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} S_j(\bar{x}(n) + \nu s) \lambda^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j(\tilde{y}^\pm(n) + \nu s) \lambda^j \sum_{j=0}^{\infty} S_j(\tilde{z}) \lambda^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\mu_1 + \mu_2 = j} S_{\mu_1}(\tilde{y}^\pm(n) + \nu s) S_{\mu_2}(\tilde{z}) \lambda^j. \end{aligned} \quad (34)$$

另外, 由 (9) 式可得 $s_1 = s_3 = \dots = s_{\text{odd}} = 0$, 则利用舒尔多项式的性质, 可以得到如下关系:

$$S_j(\bar{x}^\pm + \nu s) = (-1)^j \sum_{\mu=0}^{[j/2]} S_j(\mathbf{w}^\pm) S_{j-2\mu}(\bar{x}^\pm + \nu s), \quad (35)$$

此处 $\mathbf{w} = (-2\tilde{x}_2^\pm, -2\tilde{x}_4^\pm, \dots)$. 与文献 [40] 中一样, 将 $\tilde{\tau}_n^*(x_0 - x, t)$ 写成一个形如 $3N \times 3N$ 的行列式,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{-n}^*(x_0 - x, t) &= \det_{1 \leq 2i-1, 2j-1 \leq N} \left[\sum_{\nu=0}^{\min(2i-1, 2j-1)} \frac{1}{4^\nu} S_{2i-1-\nu}(\bar{x}^+(n) + \nu s) S_{2j-1-\nu}(\bar{x}^-(n) + \nu s) \right] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & \Phi_{N \times 2N} \\ -\Psi_{2N \times N} & \mathbf{I} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (36)$$

其中, $\phi_{i,j} = \frac{1}{2^{j-1}} S_{2i-j} [\bar{x}^+(n) + (j-1)\mathbf{s}]$, $\psi_{i,j} = \frac{1}{2^{i-1}} S_{2j-i} [\bar{x}^-(n) + (i-1)\mathbf{s}]$. 对此行列式做初等行变换, 并且利用 (35) 式可以将其转化为如下形式:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & \tilde{\Phi}_{N \times 2N} \\ -\tilde{\Psi}_{2N \times N} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = \tilde{\tau}_n(x, t), \quad (37)$$

其中, $\tilde{\phi}_{i,j} = \frac{1}{2^{j-1}} S_{2i-j} [\tilde{x}^+(n) + (j-1)\mathbf{s}]$, $\tilde{\psi}_{i,j} = \frac{1}{2^{i-1}} S_{2j-i} [\tilde{x}^-(n) + (i-1)\mathbf{s}]$.

综上, 可以得到定理 1 中非局域非线性薛定谔方程 (2) 的高阶怪波解 (5) 式, 即完成定理 1 证明.

4 结 论

本文利用 KP 系列约束方法和双线性方法, 构造了空间位移 \mathcal{PT} 对称非局域非线性薛定谔方程 (2) 的高阶怪波解. 这些高阶怪波解的解析表达式均是利用舒尔多项式表达. 详细分析了一阶和二阶怪波解的动力学行为, 发现方程 (2) 中相移参数 x_0 仅影响怪波的位置, 不影响怪波的最大振幅. 另外与局域非线性薛定谔方程的怪波解相比, N 阶怪波解的最大振幅除了与阶数 N 有关, 还与解析解的参数有关. 例如, 局域非线性薛定谔的 N 阶怪波解最大振幅为背景平面的 $2N+1$ 倍, 但是非局域非线性薛定谔方程的 N 阶怪波解的最大振幅可以是大于或者等于 $2N+1$ 倍背景平面的任意高度. 另外, 给出了高阶怪波解的模式与解析解参数之间的联系. 与文献 [34] 中方程 (2) 怪波解研究结果相比, 本文的研究有三点不同. 第一, 研究方法不同. 本文中怪波解是利用 KP 系列约束方法和双线性方法构造的, 而文献 [34] 是利用达布变换构造的. 第二, 解析解的表达形式不同. 文献 [34] 给出的 N 阶怪波解的解析表达式是通过特征函数的展开式间接表示的, 并没有直接给出解析表达式的显式形式. 文中任意 N 阶怪波解显式形式通过舒尔多项式直接给出, 且表达式更加简洁. 第三, 文献 [34] 中关于高阶怪波解的模式与解析表达式中的参数之间的关系并没有研究, 本文给出了相关研究, 并且展示了 3 阶至 6 阶怪波的几种模式.

参考文献

[1] Ablowitz M J, Segur H 1981 *Solitons and Inverse Scattering Transform* (Philadelphia: SIAM)
 [2] Yang J K 2010 *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems* (Philadelphia: SIAM)
 [3] Bender C M, Boettcher S 1988 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243

[4] Bender C M, Boettcher S, Meisinger P N 1999 *J. Math. Phys.* **40** 2201
 [5] Mostafazadeh A 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 7081
 [6] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
 [7] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
 [8] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904
 [9] Ruter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
 [10] Regensburger A, Miri M A, Bersch C, Nager J, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 223902
 [11] Yan Z Y, Wen Z C, Konotop V V 2015 *Phys. Rev. A* **92** 023821
 [12] Yan Z Y, Wen Z C, Hang C 2015 *Phys. Rev. E* **92** 022913
 [13] Yan Z Y 2013 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **371** 20120059
 [14] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 064105
 [15] Lin M, Xu T 2015 *Phys. Rev. E* **91** 033202
 [16] Xu T, Lan S, Li M, Zhang G W 2019 *Physica D* **390** 47
 [17] Huang X, Ling L M 2016 *Eur. Phys. J. Plus* **131** 148
 [18] Wen X Y, Yan Z Y, Yang Y Q 2016 *Chaos* **26** 063123
 [19] Rao J G, He J S, Mihalache D, Cheng Y 2021 *Z. Angew. Math. Phys.* **72** 1
 [20] Yang B, Yang J K 2019 *Lett. Math. Phys.* **109** 945
 [21] Yang B, Yang J K 2020 *J. Math. Anal. Appl.* **487** 124023
 [22] Yang B, Chen Y 2018 *Chaos* **28** 053104
 [23] Rao J G, Cheng Y, Porsezian K, Mihalache D, He J S 2020 *Physica D* **401** 132180
 [24] Rao J G, Zhang Y S, Fokas A S, He J S 2018 *Nonlinearity* **31** 4090
 [25] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2017 *Stud. Appl. Math.* **139** 7
 [26] Lou S Y, Huang L 2017 *Sci. Rep.* **7** 1
 [27] Lou S Y 2018 *J. Math. Phys.* **59** 083507
 [28] Zhao Q, Jia M, Lou S Y 2019 *Commun. Theor. Phys.* **71** 1149
 [29] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2021 *Phys. Lett. A* **409** 127516
 [30] Gürses M, Pekcan A 2022 *Phys. Lett. A* **422** 127793
 [31] Liu S M, Wang J, Zhang D J 2022 *Rep. Math. Phys.* **89** 199
 [32] Wang X, Wei J 2022 *Appl. Math. Lett.* **130** 107998
 [33] Wang M M, Chen Y 2022 *Nonlinear Dyn.* **110** 753
 [34] Yang J, Song H F, Fang M S, Ma L Y 2022 *Nonlinear Dyn.* **107** 3767
 [35] Ren P, Rao J G 2022 *Nonlinear Dyn.* **108** 2461
 [36] Wu J 2022 *Nonlinear Dyn.* **108** 4021
 [37] Wei B, Liang J 2022 *Nonlinear Dyn.* **109** 2969
 [38] Wang X B, Tian S F 2022 *Theor. Math. Phys.* **212** 1193
 [39] Guo B L, Ling L L, Liu Q P 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026607
 [40] Ohta Y, Yang J K 2012 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **468** 1716
 [41] He J S, Zhang H R, Wang L H, Porsezian K, Fokas A S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 052914
 [42] Akhmediev N, Ankiewicz A, Soto-Crespo J M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 026601
 [43] Ling L M, Guo B L, Zhao L C 2014 *Phys. Rev. E* **89** 041201
 [44] Zhao L C, Guo B L, Ling L L 2016 *J. Math. Phys.* **57** 043508
 [45] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, Lombardo S, Onorato M, Wabnitz S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 034101
 [46] Chen S H, Mihalache D 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 215202
 [47] Zhang G Q, Yan Z Y 2018 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **62** 117
 [48] Bilman D, Miller P D 2019 *Commun. Pure Appl. Math.* **72** 1722

- [49] Bilman D, Ling L M, Miller P D 2020 *Duke Math. J.* **169** 671
- [50] Rao J G, Mihalache D, He J S 2022 *Appl. Math. Lett.* **134** 108362
- [51] Rao J G, He J S, Malomed B A 2022 *J. Math. Phys.* **63** 1
- [52] Rao J G, He J S, Cheng Y 2022 *Lett. Math. Phys.* **112** 75
- [53] Guo B L, Tian L X, Tian Z Y, Ling L M 2015 *Rogue Wave and Its Mathematical Theory* (Zhejiang: Zhejiang Science and Technology Press) (in Chinese) [郭柏灵, 田立新, 闫振亚, 凌黎明 2015 怪波及其数学理论 (浙江: 浙江科学技术出版社)]
- [54] Peregrine D H 1983 *J. Aust. Math. Soc. B* **25** 16
- [55] Hopkin M 2004 *Nature* **430** 492
- [56] Muller P, Garret C, Osborne A 2005 *Oceanography* **18** 66
- [57] Perkins S 2006 *Science News* **170** 328
- [58] Kharif C, Pelinovsky E, Shun'yaev A 2009 *Rogue Waves in the Ocean* (Heidelberg: Springer)
- [59] Pelinovsky E, Kharif C 2008 *Extreme Ocean Waves* (Berlin: Springer)
- [60] Solli D R, Ropers C, Koonath P, Jalali B 2007 *Nature* **450** 06402
- [61] Ganshin A N, Efimov V B, Kolmakov G V, Mezhev-Deglin L P, McClintock P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 065303
- [62] Onorato M, Waseda T, Toffoli A, Cavaleri L, Gramstad O, Janssen P A E M, Kinoshita T, Monbaliu J, Mori N, Osborne A R, Serio M, Stansberg C T, Tamura H, Trulsen K 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 114502
- [63] Yang B, Yang J K 2021 *Physica D* **419** 132850
- [64] Hirota R 2004 *The Direct Method in Soliton Theory* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [65] Jimbo M, Miwa T 1983 *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **19** 943
- [66] Date E, Kashiwara M, Jimbo M, Miwa T 1983 *Transformation Groups for Soliton Equations, in Nonlinear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory* (Singapore: World Scientific)

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

General higher-order rogue waves in the space-shifted \mathcal{PT} -symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation*

Rao Ji-Guang¹⁾²⁾ Chen Sheng-An¹⁾ Wu Zhao-Jun¹⁾ He Jin-Song^{2)†}

1) (School of Mathematics and Statistics, Hubei University of Science and Technology, Xianning 437000, China)

2) (Institute for Advanced Study, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

(Received 2 December 2022; revised manuscript received 25 December 2022)

Abstract

General higher-order rogue wave solutions to the space-shifted \mathcal{PT} -symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation are constructed by employing the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy reduction method. The analytical expressions for rogue wave solutions of any N th-order are given through Schur polynomials. We first analyze the dynamics of the first-order rogue waves, and find that the maximum amplitude of the rogue waves can reach any height larger than three times of the constant background amplitude. The effects of the space-shifted factor x_0 of the \mathcal{PT} -symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation in the first-order rogue wave solutions are studied, which only changes the center positions of the rogue waves. The dynamical behaviours and patterns of the second-order rogue waves are also analytically investigated. Then the relationships between N th-order rogue wave patterns and the parameters in the analytical expressions of the rogue wave solutions are given, and the several different patterns of the higher-order rogue waves are further shown.

Keywords: rogue waves, \mathcal{PT} -symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation, Kadomtsev-Petviashvili hierarchy reduction method

PACS: 42.65.Tg, 05.45.Yv, 02.30.Ik, 04.20.Jb

DOI: 10.7498/aps.72.20222298

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12071304, 12201195), the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant No. 2022CFB818), the Doctoral Initiation Fund of Hubei University of Science and Technology, China (Grant No. BK202302), and the Innovation Research Eerm of Hubei University of Science and Technology, China (Grant No. 2022T05).

† Corresponding author. E-mail: hejingsong@szu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica



Chinese Physical Society



Institute of Physics, CAS