

# 环形运动势搅拌下偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的 von Kármán 涡街\*

席忠红<sup>1)</sup> 赵永珍<sup>1)</sup> 王光弼<sup>1)</sup> 石玉仁<sup>2)3)†</sup>

1) (甘肃民族师范学院物理与水电工程系, 合作 747000)

2) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

3) (甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

(2022 年 12 月 5 日收到; 2023 年 1 月 15 日收到修改稿)

数值研究了偶极玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 在环形运动高斯势搅拌时的动力学行为. 当高斯势运动速度和尺寸逐渐变化时, 偶极 BEC 中将出现稳定层流、涡旋偶极子、Bénard-von Kármán (BvK) 涡街以及混乱激发 4 种模式. 结果表明高斯势在偶极 BEC 中圆周运动时产生涡街的条件非常苛刻, 只有适当尺寸的高斯势以合适的速度运动时, 尾流中周期性脱落的具有相同旋量的涡旋对稳定的分布在内外两个圆环上, 形成 BvK 涡街. 在实验参数下进行系统数值计算得到了不同偶极相互作用时的相图, 讨论了偶极相互作用以及高斯势速度和尺寸对不同激发模式的影响. 通过高斯势所受拖拽力的计算, 分析了不同激发的物理学机制.

**关键词:** 偶极 Bose-Einstein 凝聚, 偶极子, Bénard-von Kármán 涡街

**PACS:** 05.30.jp, 03.75.Kk, 03.75.Lm, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.72.20222312

## 1 引言

障碍物尾流中的涡旋脱落现象是经典流体中常见的行为. 在适当条件下, 从对称障碍物两侧周期性脱落的涡旋-反涡旋整齐地分布成两排并稳定地存在于经典流体中, 这就是人们熟知的 Bénard-von Kármán (BvK) 涡街<sup>[1-4]</sup>. 1912 年, von Kármán 深入研究了经典流体中 BvK 涡街的稳定性条件以及涡街结构与障碍物所受拖拽力之间的关系<sup>[5,6]</sup>. 玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 作为研究微观物理的理想平台, 为研究超流体中的 BvK 涡街提供了可能, 同时 BEC 中涡旋

对周期性脱落的研究有助于进一步加深对 BEC 认识和理解<sup>[7-10]</sup>.

2010 年, Sasaki 团队<sup>[11]</sup> 通过求解 Gross-Pitaevskii (GP) 方程首次数值研究了单分量 BEC 中的 BvK 涡街, 随后他们发现, 对于强相分离双组分 BEC, 当一个组分的气泡穿过另一组分并沿某一方向运动时, 气泡尾流中也会出现 BvK 涡街<sup>[12]</sup>. 不久之后, Stagg 团队<sup>[13,14]</sup> 研究了椭圆形障碍物尾迹中类似 BvK 涡街的量子化涡旋结构, 并且发现椭圆形障碍物更有利于 BEC 中涡旋的成核. Kwon 等<sup>[15-17]</sup> 进行了大量实验研究, 2016 年, 发现排斥高斯激光束在高度扁圆的 BEC 中运动时, 具有相同旋转方向的涡旋对周期性的从激光束脱落并在

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12065022)、2022 年陇原青年创新创业人才 (个人) 项目、2020 年甘肃省高等教育教学成果培育项目 (批准号: 184)、甘肃省 2023 年高校教师创新基金项目 (批准号: 2023B-219)、甘肃民族师范学院教学成果培育项目 (批准号: GNUNJXCGPY2216)、甘肃省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题 (批准号: 2060) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shiy@nwnu.edu.cn

尾流中整齐排列形成类似 BvK 涡街的结构 [18].

偶极相互作用作为一种各向异性的长程相互作用, 不仅为原子气体 BEC 提供了更多的控制参量, 而且使得 BEC 系统在理论和实验上表现出更加新奇的物理现象 [19–23], 也为偶极 BEC 在量子计算等领域的应用提供了更多的可能性 [24]. 就目前相关报道来看, 关于 BEC 中 BvK 涡街的理论和实验研究大多考虑障碍物沿某一方向直线运动的情形. 因此, 研究障碍物在偶极 BEC 中做圆周运动时能否产生 BvK 涡街, 以及偶极相互作用对环形运动障碍物尾流中涡旋结构的影响成为一个有趣的课题.

## 2 理论模型

首先将偶极 BEC 囚禁在谐振子势  $V_{\text{ext}}$  中, 然后引入一高斯势  $V_{\text{OP}}$  在 BEC 中做圆周运动, 则描述系统的 GP 方程可以表示为 [21–25]

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\psi|^2 + \Phi_{\text{dd}} \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中  $\psi(\mathbf{r}, t)$  为体系状态波函数, 满足  $\int |\psi|^2 d^3\mathbf{r} = N$ ,  $N$  为粒子总数,  $m$  为囚禁原子的质量,  $g = 4\pi \hbar^2 a_s/m$  表示短程接触相互作用,  $a_s$  为 s-波散射长度. 外势  $V(\mathbf{r}) = V_{\text{ext}} + V_{\text{OP}}$  中  $V_{\text{ext}} = \frac{1}{2} m\omega_r^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2$ ,  $\omega_r = \omega_x = \omega_y$ ,  $\omega_z$  为谐振子频率. 偶极势  $\Phi_{\text{dd}} = \int d^3\mathbf{r}' U_{\text{dd}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi(\mathbf{r}', t)|^2$  中, 偶极相互作用可表示为

$$U_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi} \frac{1 - 3\cos^2\theta}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (2)$$

其中,  $\theta$  表示两原子相对位置与极化轴  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  的夹角,  $\cos\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ . 对于磁偶极子,  $C_{\text{dd}} = \mu_0 \mu_d^2$  ( $\mu_0$  为真空磁导率,  $\mu_d$  为磁偶极矩), 实验中可以通过 Feshbach 共振将  $C_{\text{dd}}$  自由调节 [26,27].

在强囚禁条件  $\hbar\omega_z \gg \mu$ ,  $k_B T$ ,  $\hbar\omega_r$  (其中  $\mu$ ,  $k_B$ ,  $T$  分别为化学势、玻尔兹曼常数以及系统温度) 下, BEC 被束缚在  $xoy$  平面内. 首先对 (1) 式进行准二维近似 [21], 然后用  $\tilde{t} = \omega_0 t$ ,  $\tilde{x} = x/a_0$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{a_0}$ ,  $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{n_0/a_0}}$ ,  $\tilde{g} = \frac{gm n_0}{\sqrt{2\pi} \hbar^2 l_z}$  (其中  $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ ,  $l_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$ ,  $\omega_0 = \omega_x$ ,  $n_0$  为 BEC 中心粒子数密度) 对方程进行无量纲化处理, 得到描述体系的无

量纲化准二维 GP 方程为 [28]

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\varphi|^2 + \frac{a_{\text{dd}}}{(2\pi)^2} \times \int \hat{n}(k_x, k_y, t) h_{2D}(\kappa) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \right] \varphi, \quad (3)$$

其中  $a_{\text{dd}} = \frac{mn_0 C_{\text{dd}}}{3\sqrt{2\pi} \hbar^2 l_z}$ ,  $\hat{n}(k_x, k_y, t) = \int |\varphi(x, y, t)|^2 e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$ ,  $h_{2D}(\kappa) = 2 - 3\sqrt{\pi} \kappa e^{\kappa^2} \text{erfc}(\kappa)$ ,  $\kappa = \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{2\gamma_z}}$ ,  $\text{erfc}(\kappa) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\kappa}^{\infty} e^{-u^2} du$  为完全误差函数,  $\gamma_z = \omega_z/\omega_0$ .

数值计算时, 将高斯势

$$V_{\text{OP}} = V_0 \exp \left[ -\frac{[x - x_0(t)]^2 + [y - y_0(t)]^2}{d^2} \right]$$

( $V_0$  为高斯势深度,  $d$  为高斯势尺寸) 置于初始位置  $[x_0(0), y_0(0)] = [s, 0]$ , 并用虚时演化法计算系统的基态. 然后以所得到的基态作为初始状态, 采用时间劈裂谱方法 [23,29–31] 对方程 (3) 进行动力学演化, 研究高斯势在凝聚体中作圆周运动即  $x_0 = s \cos(vt/s)$ ,  $y_0 = s \sin(vt/s)$  时的动力学行为. 在实验中, 这种运动障碍势可以由沿  $z$  方向的排斥高斯激光束产生.

## 3 数值结果

用频率  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = 2\pi \times (4.3, 4.3, 350)$  Hz (Reeves 等 [32,33] 在实验上所用参数) 的谐振子外势将  $N = (2.0 \pm 0.5) \times 10^3$  个磁偶极矩为  $10\mu_B$  ( $\mu_B$  为玻尔磁子) 的  $^{164}\text{Dy}$  原子囚禁在二维平面内 [23]. 通过 Feshbach 共振调节  $a_s = 4.08 \times 10^{-9} \text{m} \approx 77a_B$  ( $a_B$  为玻尔半径), 可以得到  $g = 100$ ,  $a_{\text{dd}} = 20$  [23]. 取高斯势深度  $V_0 = 100$ , 初始位置  $[x_0(0), y_0(0)] = [10a_0, 0]$ , 数值计算范围为  $\{(x, y) | |x| < 30a_0, |y| < 30a_0\}$ .

图 1 所示为直径  $d = 1.8a_0$  的高斯势以圆周运动的形式搅拌 BEC 时尾流密度分布. 图 1(a) 为  $v = 0.6\sqrt{\hbar\omega_0/m}$  时的激发模式, 由于高斯势运动速度没有达到涡旋产生的临界速度, 尾流中没有涡旋产生, BEC 表现为稳定的层流模式. 当高斯势速度达到临界速度并逐渐增大时, 尾流依次出现涡旋偶极子 (图 1(b))、BvK 涡街 (图 1(c)) 以及混乱激发 (图 1(d)) 3 种模式.

图 2 为涡旋偶极子激发模式演化过程. 当高斯势速度达到涡旋激发临界速度时, 高斯势内部将出

现成对幽灵涡旋 (ghost vortices) 成核现象 (图 2(a)), 幽灵涡旋对随着演化时间的延长逐渐从高斯势表面脱落, 然后在 BEC 尾流中运动 (图 2(b)). 从图 2(b)

对应相图 (图 2(f)) 可以发现, 同时从高斯势表面脱落的涡旋对有着相反的旋量  $\pm h/m$  ( $h$  为普朗克常量) 并形成涡旋偶极子. 为了便于区分, 在密度

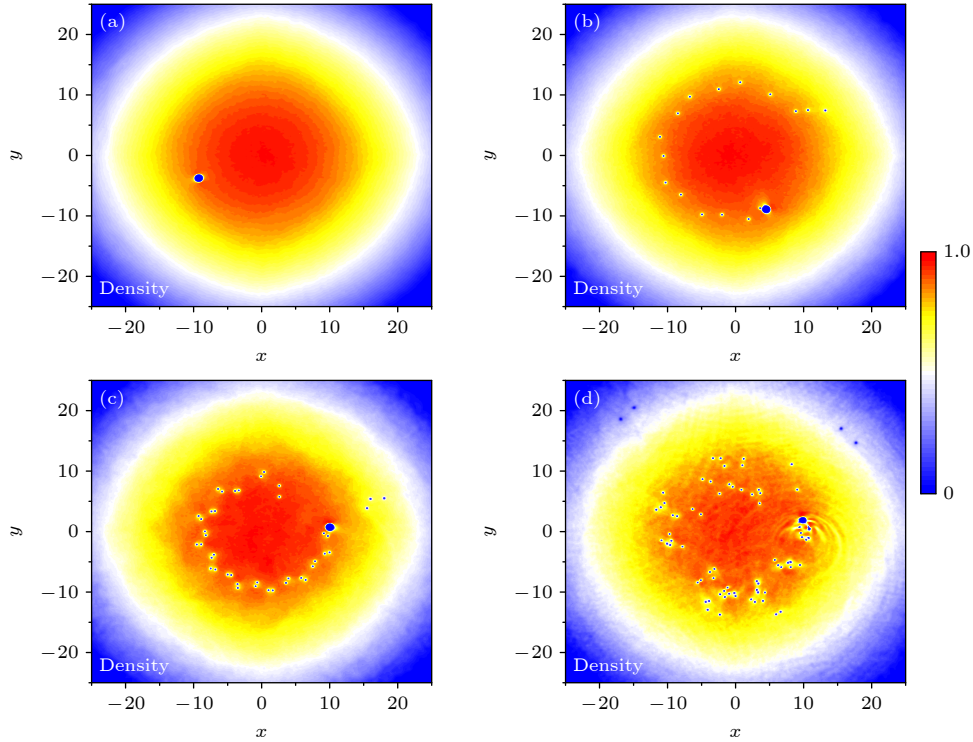


图 1 高斯势以不同速度  $v$  圆周运动时偶极 BEC 的密度分布,  $d = 1.8a_0$  (a)  $v = 0.6\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ ; (b)  $v = 0.8\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ ; (c)  $v = 0.9\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ ; (d)  $v = 1.1\sqrt{\hbar\omega_0/m}$

Fig. 1. Density distribution of dipolar BEC condensate which is circular stirred by Gaussian potential with different velocity  $v$ ,  $d = 1.8a_0$ : (a)  $v = 0.6\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ ; (b)  $v = 0.8\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ ; (c)  $v = 0.9\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ ; (d)  $v = 1.1\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ .

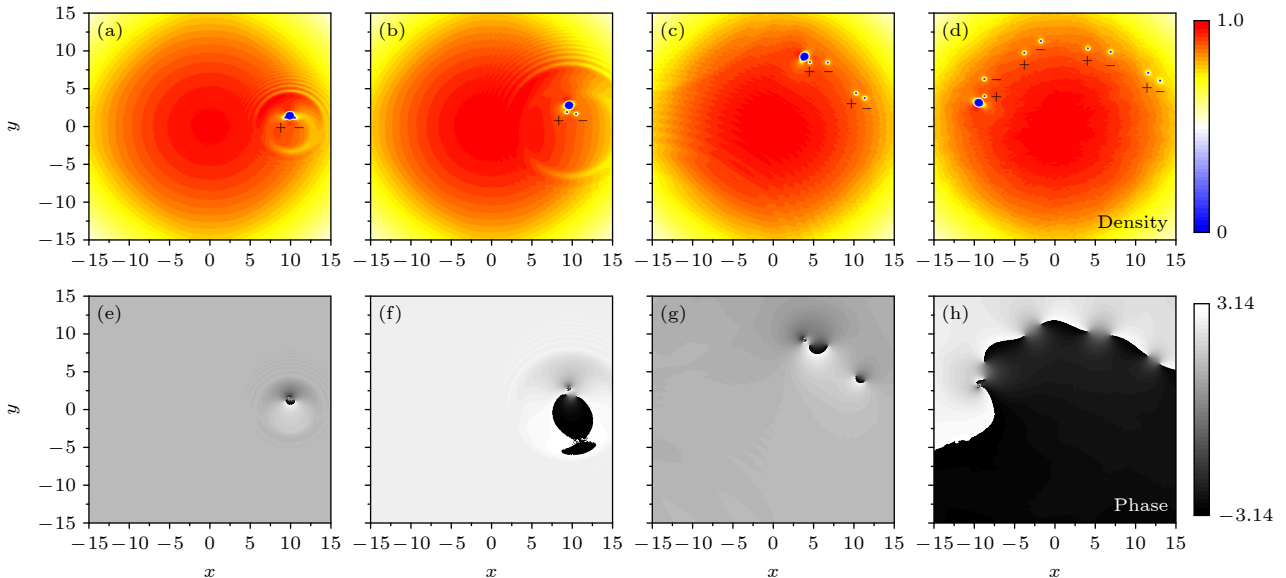


图 2 涡旋偶极子激发演化过程 (a)–(d) 为图 1(b) 参数下时间  $t = 30, 60, 250, 600$  时高斯势尾流密度分布, 观察区域为  $15a_0 \times 15a_0$ , 符号  $+$ ,  $-$  分别表示点涡旋逆时针与顺时针旋转; (e)–(h) 为对应时刻相图

Fig. 2. Evolution of the vortex dipole emission: (a)–(d) Display density distributions of the wake after Gaussian potential at  $t = 30, 60, 250, 600$  for the parameters in Fig. 1(b), the field of view is  $15a_0 \times 15a_0$ , the symbols  $+$  and  $-$  denote counterclockwise and clockwise circulations of point vortices; (e)–(h) depict phase profiles corresponding to Figs. (a)–(d).

图中用符号“+” (“-”) 对逆时针旋转 (顺时针旋转) 的点涡旋加以标注. 每一个偶极子离开高斯势后, 高斯势附近原子密度将恢复激发下一个偶极子的初始状态并持续周期性的产生偶极子, 偶极子脱落的周期主要取决于高斯势速度大小以及偶极相互作用的强弱. 从整个演化过程看, 周期性脱落的偶极子之间会发生相互作用, 使得偶极子相对自身中心旋转并形成头尾相接 (“+ -”, “+ -”...) 的圆环型排列方式, 这种偶极子激发模式能长时间稳定的出现在尾流中.

随着高斯势运动速度进一步增大, 偶极子脱落

的周期也逐渐缩短. 当高斯势速度达到一定程度并且高斯势大小满足一定条件时, 尾流中将形成稳定的 BvK 涡街, 如图 1(c) 所示. 图 3 详细展示了 BvK 涡街的形成过程.  $t = 40\omega_0^{-1}$  时第 1 对 “+ -” 涡旋基本同时从高斯势表面脱落 (图 3(a)), 有趣的是, 第 2 对涡旋脱落时 “-” 涡旋先于 “+” 涡旋从高斯势表面脱落 (图 3(b)), 而第 3 对涡旋脱落时 “+” 涡旋先于 “-” 涡旋从高斯势表面脱落 (图 3(c)), 形成了 (-, +)(+, -)(-, +)(+, -)... 的涡旋对脱落规律, 这一规律从第 2 对涡旋脱落开始出现在整个演化过程中. 当演化时间达到  $t = 170\omega_0^{-1}$  时, 第 3 对涡旋

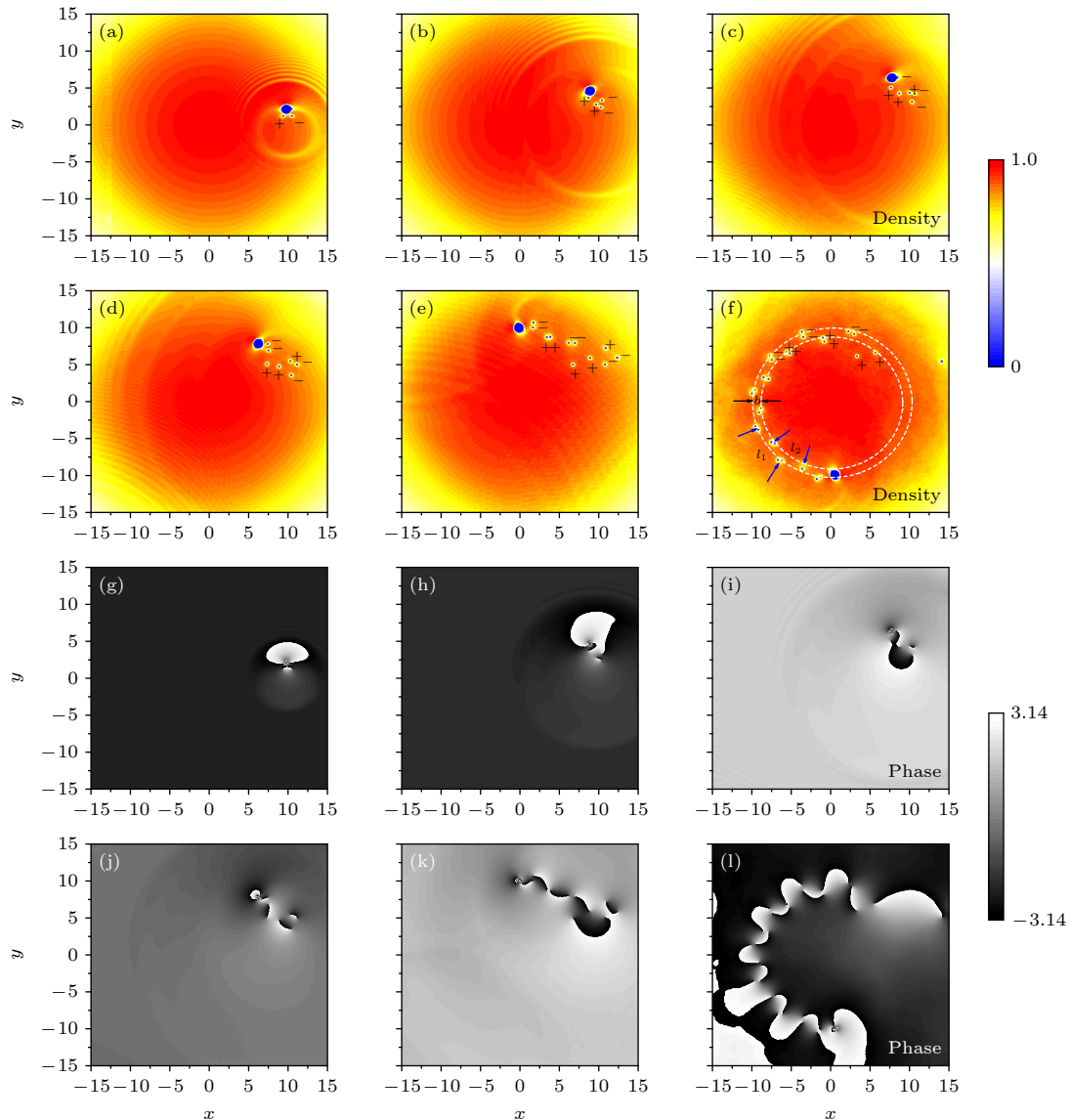


图 3 BvK 涡街演化过程 (a)–(f) 为图 1(c) 参数下时间  $t = 40, 90, 130, 170, 300, 900$  时高斯势尾流密度分布, 观察区域为  $15a_0 \times 15a_0$ , (f) 中白色虚线圆环分别表示内外两列涡旋对阵列稳定出现的位置; (g)–(l) 为对应时刻相图

Fig. 3. Evolution of the BvK vortex street: (a)–(f) Display density distributions of the wake after Gaussian potential at  $t = 40, 90, 130, 170, 300, 900$  for the parameters in Fig. 1(c), the field of view is  $15a_0 \times 15a_0$ , the white dotted ring in (f) represent the position where the inner and outer vortex pair arrays appear stably; (g)–(l) depict phase profiles corresponding to Figs. (a)–(f).

中后脱落的“-”涡旋与第4对涡旋中先脱落的“-”涡旋基本同时从高斯势表面脱落形成具有相同旋量  $-h/m$  的涡旋对 (图 3(d) 中“-”涡旋对), 之后相继出现“++”, “-”... 涡旋对同时脱落的现象 (图 3(e)). 具有相同旋量的涡旋对周期性脱落后以角频率  $2\hbar/(md_0^2)$  绕着两个点涡旋的中心旋转, 并且保持点涡旋之间的距离  $d_0$  不变, 所有“++”涡旋对分布在半径较小而所有“-”涡旋对分布在半径较大的同心圆环上, 并形成如图 3(f) 所示的环状 BvK 涡街. 数值计算容易发现, 外环上两“-”涡旋对中心的平均距离为  $l_1 = 5.2a_0$ , 内环上两“++”涡旋对中心的平均距离为  $l_2 = 4.66a_0$ ,  $\bar{l} = (l_1 + l_2)/2 = 4.93a_0$ , 内外两列涡旋对阵列之间的平均距离  $b = 1.23a_0$ , 故  $b/\bar{l} = 0.25$ , 这一比值虽然略小于无偶极相互作用 BEC 以及经典流体中 BvK 涡街稳定性条件  $b/l = \pi^{-1} \cosh^{-1} \sqrt{2} \approx 0.28$ , 但仍然很好地满足文献 [5] 中报道的经典流体 BvK 涡街稳定出现的比值区间  $0.12 < b/l < 0.4$ . 当高斯势的运动速度  $v$  或高斯势尺寸  $d$  继续增大时, 高斯势尾流中周期性涡旋对脱落的现象消失, BEC 中将出现混乱激发模式, 如图 1(d) 所示.

为了清晰比较偶极相互作用的影响, 通过系统的数值计算得到偶极相互作用分别为  $a_{dd} = 20, 40$  时各种激发模式随高斯势速度  $v$  和尺寸  $d$  变化的参数区间如图 4 所示. 图 4 中浅绿色、粉红色、绿色、红色区域依次表示稳定层流、涡旋偶极子、BvK 涡街以及混乱激发 4 种激发模式. 需要说明的是每两个相邻的激发模式之间都存在着一定的

过渡区域, 而不是两种激发模式之间的突变. 图 4(a) ( $a_{dd} = 20$ ) 中, BvK 涡街稳定出现的参数区间为  $0.95a_0 < d < 2.55a_0, 0.68\sqrt{\hbar\omega_0/m} < v < 1.09\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ , 而图 4(b) ( $a_{dd} = 40$ ) 中, BvK 涡街稳定出现的区间急剧缩小, 约为  $1.13a_0 < d < 2.13a_0, 0.67\sqrt{\hbar\omega_0/m} < v < 0.92\sqrt{\hbar\omega_0/m}$ . 同时, 随着偶极相互作用的增强, 涡旋偶极子出现的参数区间也有明显缩小的趋势,  $a_{dd} = 20$  时  $d < 3.53a_0$  的情况下在临界速度以上都会出现涡旋偶极子激发现象, 而  $a_{dd} = 40$  时涡旋偶极子激发发生在  $d < 2.85a_0$  的条件下, 在  $d > 2.85a_0$  的情况下沿着图中黑色虚线箭头方向增大速度  $v$  时, BEC 尾流中的激发直接从层流模式过渡到混乱激发模式. 可见偶极相互作用的增强将明显破坏涡旋对的稳定性, 导致在 BEC 尾流中更难形成涡旋偶极子, BvK 涡街.

涡旋的激发导致高斯势受到拖拽力  $F = \partial_t \int dr \psi^* (i\hbar \nabla) \psi$ , 图 5 给出了偶极相互作用  $a_{dd} = 20$  时拖拽力的演化过程. 图 5(a) 为涡旋偶极子激发时拖拽力随时间的变化, 与图 1(b) 对应.  $F_r$  在  $t < 150\omega_0^{-1}$  时没有规律,  $t \geq 150\omega_0^{-1}$  开始周期性振荡,  $F_r$  的每个峰值对应着一个涡旋对从高斯势脱落.  $F_n$  在  $t \geq 150\omega_0^{-1}$  时开始周期性振荡表明涡旋偶极子脱落以后相对于高斯势运动轨迹向内或者向外运动, 而  $t < 150\omega_0^{-1}$  时  $F_n$  在平衡位置附近也存在微小的振荡情况, 这与障碍势在 BEC 中沿直线运动的情况有着明显的区别. 图 5(b) 为 BvK 涡街激发模式下高斯势所受拖拽力随时间的变化, 与图 1(c) 对应. 当  $t \geq 50\omega_0^{-1}$  时  $F_r$  与  $F_n$  同时周期性振荡, 表

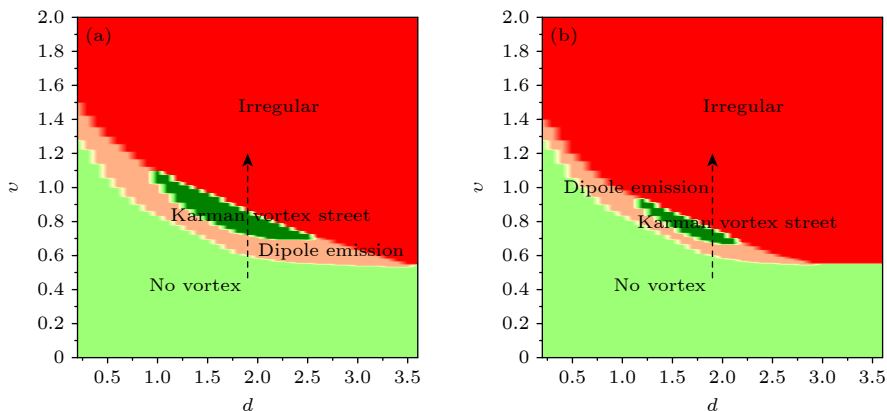


图 4 不同偶极相互作用下 BEC 各种激发模式的参数区间 (a)  $g = 100, a_{dd} = 20$ ; (b)  $g = 100, a_{dd} = 40$ . 黑色虚线箭头表示图 1 中速度  $v$  的变化

Fig. 4. Parameter regimes of different vortex emission in Dipole BEC under different dipole interactions: (a)  $g = 100, a_{dd} = 20$ ; (b)  $g = 100, a_{dd} = 40$ . The black dotted arrows indicate the change of  $v$  used in Fig. 1.

明高斯势尾流中具有相同旋量的涡旋对周期性脱落并沿着径向分别向内或者外运动. 对比容易发现, 图 5(b) 中  $F_\tau$  与  $F_n$  的振荡频率和振幅都明显大于图 5(a) 中的数值, 表明随着高斯势运动速度增大尾流中产生了更多的涡旋对, 障碍势受到的拖拽力也更强, 较强的径向分量使涡旋对相对高斯势轨迹运动的距离更远并形成稳定的 BvK 涡街. 图 5(c) 中  $F_\tau$  与  $F_n$  的振荡频率更大, 但明显没有周期性, 说明涡旋对随机脱落后与高斯势发生着复杂的相互作用并形成混乱的涡旋结构.

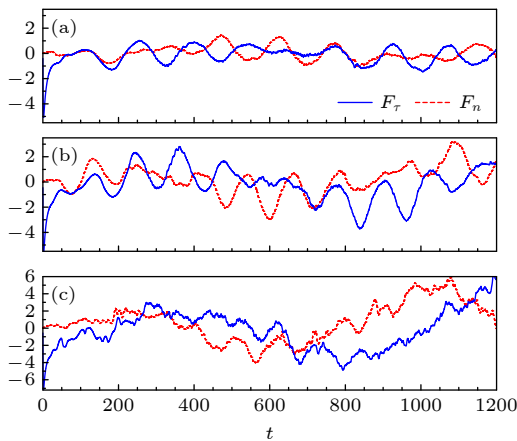


图 5 高斯势所受拖拽力随时间的变化, 蓝色实线, 红色虚线分别表示拖拽力的切向和法向分量, (a)—(c) 各参数分别与图 1(b)—(d) 对应

Fig. 5. Evolution of the normalized drag force acting on the Gaussian potential. The solid blue lines and dotted red lines show the tangential and normal components of the drag force. The parameters used in (a)–(c) are the same as those in Fig.1(b)–(d), respectively.

## 4 结 论

基于平均场理论, 利用时间劈裂傅里叶谱方法数值研究了偶极玻色-爱因斯坦凝聚体在圆周运动高斯势搅拌时的动力学行为. 在不同偶极相互作用条件下发现了 4 种激发模式并在实验参数下通过大量的数值计算得到了各种激发模式对应的参数区间. 数值结果发现高斯势圆周运动时 BvK 涡街激发的参数区间很窄, 并且随着偶极相互作用的增强, BvK 涡街现象发生的参数区间急剧缩小. 本文重点关注涡街的动力学特征, BvK 涡街形成时具有相同旋量的涡旋对绕着两个点涡旋的中心以一定的角速度旋转, 并且保持两点涡之间的距离不

变. 同时, 计算得到环形涡街的稳定性条件为  $b\bar{l} = 0.25$ , 这一比值略小于经典流体中 BvK 涡街稳定性条件, 但是涡街仍然长时间稳定的出现在高斯势尾流中. 最后, 计算并分析了不同激发模式下高斯势所受拖拽力和不同激发的物理学机制, 比较了高斯势圆周运动与直线运动时所受拖拽力异同.

## 参考文献

- [1] Kim I, Wu X L 2015 *Phys. Rev. E* **92** 043011
- [2] Crowdy D G, Krishnamurthy V S 2017 *Phys. Rev. Fluids* **2** 114701
- [3] Iima M 2019 *Phys. Rev. E* **99** 062203
- [4] Ponta F L Aref H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 084501
- [5] Wille R 1960 *Adv. Appl. Mech.* **6** 273
- [6] Williamson C H K 1996 *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **28** 477
- [7] Thoraval M J, Takehara K, Etoh T G, Popinet S, Ray P, Josserand C, Zaleski S, Thoroddsen S T 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 264506
- [8] Reeves M T, Billam T P, Anderson B P, Bradley A S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 155302
- [9] Fujimoto K, Tsubota M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043611
- [10] Fujimoto K, Tsubota M 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053609
- [11] Sasaki K, Suzuki N, Saito H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 150404
- [12] Sasaki K, Suzuki N, Saito H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033602
- [13] Stagg G W, Parker N G, Barengchi C F 2014 *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **47** 095304
- [14] Stagg G W, Allen A J, Barengchi C F, Parker N G 2015 *J. Phys. Conf. Ser.* **594** 012044
- [15] Kwon W J, Moon G, Choi J, Seo S W, Shin Y 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063627
- [16] Kwon W J, Moon G, Seo S W, Shin Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 053615
- [17] Kwon W J, Seo S W, Shin Y 2015 *Phys. Rev. A* **92** 033613
- [18] Kwon W J, Kim J H, Seo S W, Shin Y 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 245301
- [19] Wang D S, Song S W, Xiong B, Liu W M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053607
- [20] Wang L X, Dong B, Chen G P, Han W, Zhang S G, Shi Y R, Zhang X F 2016 *Phys. Lett. A* **380** 435
- [21] Cai Y Y, Matthias R, Lei Z, Bao W Z 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043623
- [22] Yi S and You L 2000 *Phys. Rev. A* **61** 041604
- [23] Xi Z H, Zhao Y Z, Shi Y R 2021 *Phys. A* **572** 125866
- [24] Marinescu M and You L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4596
- [25] Deb B and You L 2001 *Phys. Rev. A* **64** 022717
- [26] Nath R, Pedri P, Santos L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 050401
- [27] Giovanazzi S, Gorlitz A, Pfau T, 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 130401
- [28] Pedri P, Santos L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 200404
- [29] Bao W, Chem L L, Lim F Y 2006 *J. Comput. Phys.* **219** 836
- [30] Bao W, Wang H 2006 *J. Comput. Phys.* **217** 612
- [31] Fu F F, Kong L H, Wang L, Yuan X U, Zeng Z 2018 *Chin. J. Comput. Phys.* **35** 657
- [32] Reeves M T, Anderson B P, Bradley A S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 053621
- [33] Sadler L E, Higbie J M, Leslie S R, Vengalattore M, Stamper-Kurn D M 2006 *Nature* **443** 7109

# von Kármán vortex street in dipole BEC induced by a circular moving potential\*

Xi Zhong-Hong<sup>1)</sup> Zhao Yong-Zhen<sup>1)</sup> Wang Guang-Bi<sup>1)</sup> Shi Yu-Ren<sup>2)3)†</sup>

1) (*Department of Physics and Hydropower Engineering, Gansu Normal College for Nationalities, Hezuo 747000, China*)

2) (*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

3) (*Laboratory of Atomic Molecular Physics & Functional Material of Gansu Province, Lanzhou 730070, China*)

( Received 5 December 2022; revised manuscript received 15 January 2023 )

## Abstract

The dynamical behaviors of a dipole Bose-Einstein condensate (BEC), which is stirred by a circular moving Gaussian potential, are numerically investigated by using the mean-field theory. In this work, the atom is assumed to polarize along the  $z$ -axis. Firstly, the stationary state of the system is obtained by solving the quasi-two-dimensional Gross-Pitaevskii equation numerically under periodic boundary conditions. And then, taking the obtained ground state as the initial condition, the dynamic evolution of the dipole BEC system is studied by the time-splitting Fourier spectrum method. Four types of emissions, namely, the stable laminar flow, vortex dipole, Bénard–von Kármán (BvK) vortex street and irregular turbulence, are observed in the wake when the velocity and size of the Gaussian potential change gradually. When the velocity of the Gaussian potential reaches the critical velocity of vortex excitation, vortex pairs with opposite circulations alternately fall off from the surface of the Gaussian potential. Owing to the interaction between the vortex dipoles, the dipoles rotate around their own centers. Finally, a ring structure will be formed and exist in the wake stably for a long time. With the increase of the velocity of Gaussian potential, the period of dipoles shedding is also shortened. For the appropriate velocity and size of the Gaussian potential, the vortex pairs with the same circulations will periodically fall off from the Gaussian potential and stably distributed on the inner and outer rings, forming BvK vortex street. Our calculation reveals that the conditions for forming BvK vortex street when the dipole BEC is stirred with a circular moving potential are very restricted. When the velocity or size of the Gaussian potential continues to increase, the phenomenon of the periodic vortex pairs shedding in the wake of the Gaussian potential will disappear, and the shedding pattern of the dipole BEC becomes irregular. Using experimental parameters, the parameter ranges of different dipole interactions are obtained through numerical calculation. The influences of dipole interactions, velocity and size of the Gaussian potential on different emission are discussed. In the end, the physical mechanisms of different emissions are analyzed by calculating the drag force acting on Gaussian potential.

**Keywords:** dipolar Bose-Einstein condensate, vortex dipole, Bénard–von Kármán vortex street

**PACS:** 05.30.jp, 03.75.Kk, 03.75.Lm, 67.85.–d

**DOI:** 10.7498/aps.72.20222312

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12065022), the 2022 Longyuan Youth Innovation and Entrepreneurship Talents (Individual) Project, the Higher Education Teaching Achievement Cultivation of Gansu Province, China (Grant No. 2020-184), the Innovation Foundation for Colleges and Universities Teachers of Gansu Province, China (Grant No. 2023B-219), the Project of Teaching Achievement Cultivation of Gansu Normal College for Nationalities, China (Grant No. GNUNJXCGPY2216), and the Education Science “the Fourteenth Five-year Plan” Project of Gansu Province, China (Grant No. 2021-2060).

† Corresponding author. E-mail: [shiyu@nwnu.edu.cn](mailto:shiyu@nwnu.edu.cn)



环形运动势搅拌下偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的von Kármán涡街

席忠红 赵永珍 王光弼 石玉仁

von Kármán vortex street in dipole BEC induced by a circular moving potential

Xi Zhong-Hong Zhao Yong-Zhen Wang Guang-Bi Shi Yu-Ren

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 080501 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222312

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222312>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

偶极玻色-爱因斯坦凝聚体在类方势阱中的Bénard-von Kármán涡街

Bénard-von Kármán vortex street in dipolar Bose-Einstein condensate trapped by square-like potential

物理学报. 2018, 67(23): 230501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181604>

偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的各向异性耗散

Anisotropic dissipation in a dipolar Bose-Einstein condensate

物理学报. 2020, 69(8): 080302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200025>

玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191424>

简谐与光晶格复合势阱中旋转二维玻色-爱因斯坦凝聚体中的涡旋链

Vortex chains in rotating two-dimensional Bose-Einstein condensate in a harmonic plus optical lattices potential

物理学报. 2022, 71(22): 220304 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221312>

环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展

The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010303 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191648>