

傅里叶鬼成像与正弦鬼成像的等价性分析*

陈星宇 周昕† 白星 余展 王玉杰 李欣家 刘洋 孙铭泽

(四川大学电子信息学院, 成都 610065)

(2022 年 12 月 5 日收到; 2023 年 5 月 6 日收到修改稿)

鬼成像技术已有几十年的发展历史, 目前正逐渐呈现多元化的趋势, 但相互之间的相关性较弱, 研究进展较以往缓慢. 研究鬼成像理论的本质, 是探索鬼成像未知领域的可行方向. 本文证明了傅里叶鬼成像和正弦鬼成像这两种鬼成像方法在原理上是等价的, 前者可以采用 N 步相移的方法来实现, 而后者则可等效为两步相移的方法. 同时结合正弦散斑成像的空间分解特性, 对结构散斑成像与传统鬼成像的关系进行分析, 并对以往在这两者基础上所构建的部分方法进行原理说明. 应用于边缘检测的仿真分析结果表明, 将两种方法结合起来可以同时具有傅里叶鬼成像的较好抗噪性能以及正弦鬼成像的较高成像效率.

关键词: 鬼成像, 傅里叶变换, 正交变换空间, 相移算法**PACS:** 42.30.-d, 82.80.Nj, 42.30.Wb, 42.30.Rx**DOI:** 10.7498/aps.72.20222317

1 引言

鬼成像又称关联成像, 是成像领域的研究热点之一^[1]. 随着计算成像^[2]方法和单像素探测器的引入, 研究者发现鬼成像与单像素成像在过程上是一致的, 鬼成像也因此成为单像素成像领域的一部分^[3]. 鬼成像最早起源于量子关联成像, 通过参量下转换纠缠光子对实现了最初的鬼成像: 在实验中如果仅凭其中任一光路信号均无法实现成像, 只有对两路信号应用关联算法时才能得到物体的像^[4]. 早期的鬼成像现象被认为是量子领域的特殊现象, 直到经典光源被证明可以用于实现鬼成像^[5], 鬼成像才脱离量子领域而进入传统光学领域. 一些研究者还对鬼成像进行了几何光学的分析^[6], 导出了经典热光源的相关成像方程, 为相关成像效应在光学设计中提供了应用前景, 大大提高了鬼成像技术的实用价值. 鬼成像因其非定域的特征^[3]以及独特的单像素探测单元结构, 比起传统光学成像有很多优势, 具备在特殊或极端条件下成像的能力, 例如可以实现

非可见光波段的红外成像^[7]和太赫兹成像^[8], 以及强散射环境的散射介质成像^[9]等. 另一方面, 经过几十年的发展, 目前鬼成像技术正逐渐呈现多元化的趋势, 出现了多种基础原理与实施架构存在一定差异的鬼成像系统, 但相互之间的相关性较弱, 需要在更深的理论层面做出进一步探讨.

传统鬼成像采用两条光路, 即物光路和参考光路; 物光路包含待成像物体, 末端为一个桶探测器, 参考光路则有一个探测器用来探测参考光的分布. 而引入计算成像方式的鬼成像技术由于能直接计算参考光路的光场分布, 因此仅需物光路即可恢复成像^[2]. 近年来, 在计算鬼成像的基础上不断提升成像质量, 缩短成像时间, 相继提出了差分鬼成像^[10]、对应鬼成像^[11]、归一化鬼成像^[12]、傅里叶鬼成像^[13]、正弦鬼成像^[14]等不同方案. 从散斑结构的角度出发, 现有的鬼成像方法可以分为两类, 即采用随机散斑和调制散斑的方式. 随机散斑是指投射光场的空间强度服从高斯分布, 基于传统光源的鬼成像就是利用强度涨落关联实现的; 调制散斑又称结构化散斑, 区别于随机散斑, 调制散斑满足

* 国家自然科学基金 (批准号: 62275080, 61475104) 和四川省自然科学基金 (批准号: 2022NSFSC0565) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhoxn@21cn.com

特定的调制结构, 常见的如 Hadamard 基散斑^[15]和傅里叶基散斑^[13]等. 傅里叶基散斑是一种特定的正交正余弦结构散斑, 由于图像可分解为一系列不同空间频率与不同初相位的条纹图案^[16], 当使用正余弦条纹散斑作为基底时, 投射图案与最终成像分解所得条纹基底一致, 而正余弦条纹的系数则包含物体信息.

通过研究发现, 傅里叶鬼成像与正弦鬼成像均采用同类型的正交正余弦散斑作为基底, 具备极高的相似性, 同时正弦鬼成像方法是完整的空域描述和空域成像过程, 因此可猜测这两种成像方法可以揭示空域成像与傅里叶域成像的关系. 在此基础上通过数学推导证明了傅里叶鬼成像与正弦鬼成像的成像原理的一致性, 通过数值仿真以及应用于边缘检测的效果进一步验证了推导的结论, 并可得到能够同时拥有正弦鬼成像和傅里叶鬼成像良好性能优势的新型鬼成像方案. 由于正弦鬼成像将图像空域分解的特性与传统鬼成像联系起来, 同时又与傅里叶鬼成像的正交傅里叶变换域表达等价, 进而可以推广得到鬼成像方法在傅里叶域乃至在整个正交变换域和空域的联系性, 该结论为探索不同鬼成像方法之间的关联提供了思路, 有望借此发展出更多新型鬼成像方法.

2 基础

2.1 传统鬼成像

传统鬼成像 (traditional ghost imaging, TGI) 系统如图 1 所示, 由赝热光源、光源调制器、物光路和参考光路构成, 物光路末端为一桶探测器, 参考光路末端由一个 CCD 采集投射光场的空间分布. 对两路光信号进行多次采样, 再经关联算法处理后可恢复出待测物体图像.

TGI 最常用的关联算法是迭代算法^[17]. 令桶探测器的探测信号为 S , CCD 测得光场信号为 $I(x, y)$, S 即为加权因子, $I(x, y)$ 则是连续但相互独立的光场信息. 将每个连续光场信号与对应的加权因子相乘再进行统计平均, 便得到迭代运算结果. 在物体后方检测到的透射光功率可表示为

$$S = \int_{\Omega} I(x_S, y_S) O(x_S, y_S) dx_S dy_S, \quad (1)$$

其中, Ω 表示参与成像的光场照射区域, $O(x_S, y_S)$ 为物函数 (透射式为透过率函数, 反射式则是反射

率函数), 从关联结果中可获取对象 $O(x, y)$. 为区分每次迭代的贡献, 可定义 i , 则每次迭代贡献表示为

$$O_i(x, y) = (S_i - \langle S \rangle)(I_i(x, y) - \langle I(x, y) \rangle), \quad (2)$$

其中 $\langle \cdot \rangle \equiv 1/M \cdot \sum r$ 表示 M 次迭代的总体平均值, 通过对所有迭代求平均值, 从而获得最终的重构结果, 使得 $O(x, y) = \langle O_i(x, y) \rangle$.

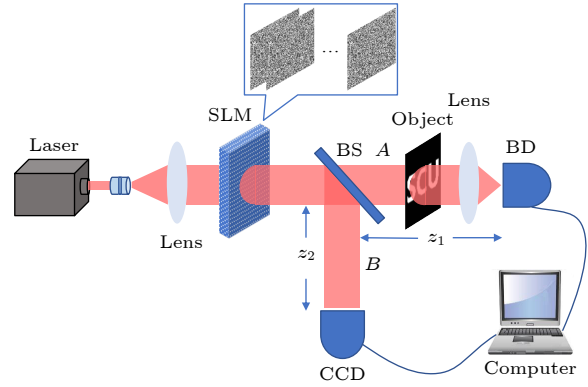


图 1 鬼成像系统原理图

Fig. 1. Schematic diagram of ghost imaging system.

2.2 傅里叶鬼成像

傅里叶鬼成像也称傅里叶单像素成像 (Fourier single-pixel imaging, FSI), 是由 Zhang 等^[13]在 2015 年提出. 如图 2 所示, 任意图像都可以看作一系列不同空间频率和不同初始相位的条纹散斑加权叠加的结果^[16], 对于具有相同尺寸和像素数的任意两幅图像, 分解后得到的基底散斑一致, 唯一不同的是不同基底散斑对应的权重值. 由于变换域的基底散斑已知, 所以只要知道不同基底的权重值就能重建出任何图像.

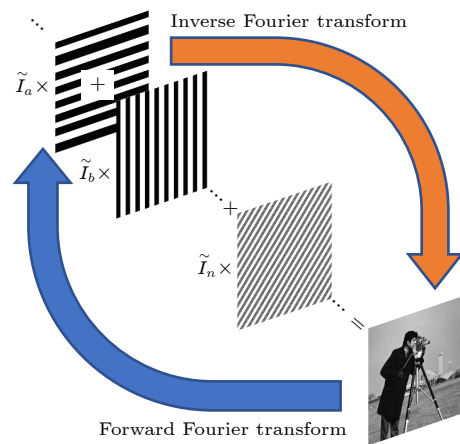


图 2 傅里叶正逆变换可实现图像分解与合成

Fig. 2. Fourier forward inverse transform can realize image decomposition and synthesis.

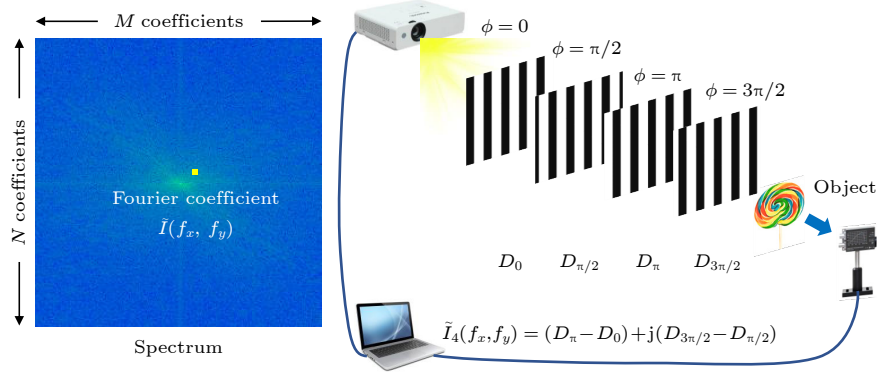


图 3 四步相移法获取傅里叶系数

Fig. 3. Fourier coefficients obtained by the four-step phase shift method.

FSI 通常采用 N 步相移法来获取傅里叶系数, 图 3 为 $N=4$ 时的情况, 称为四步相移. 每个傅里叶系数对应唯一的空间频率 (f_x, f_y) , N 步相移法采用 N 张空间频率同为 (f_x, f_y) , 但初相位 ϕ 不同, 分别为 $2k\pi/N$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$) 的傅里叶基底散斑来调制照射光场, 相应的基底图案数学模型如下:

$$P_\phi(x, y; f_x, f_y) = a + b \cdot \cos(2\pi f_x \cdot x + 2\pi f_y \cdot y + \phi), \quad (3)$$

其中 a 是平均强度, b 是调制深度, x 和 y 是目标物体的空间坐标, f_x 和 f_y 是空间频率, 分别对应 x, y 两个方向, ϕ 是初相位. 相应的单像素测量值为

$$D_\phi(f_x, f_y) = D_n + \beta \iint_{\Omega} O(x, y) P_\phi(x, y; f_x, f_y) dx dy, \quad (4)$$

其中 D_n 是背景光的响应值, β 为与单像素探测器的光电响应系数以及单像素探测器与物体空间关系都有关的因子, $O(x, y)$ 为物函数. 最常用的三步相移法和四步相移法傅里叶系数计算公式如下:

$$\tilde{I}_3 = (2D_0 - D_{2\pi/3} - D_{4\pi/3}) + i(D_{2\pi/3} - D_{4\pi/3}), \quad (5)$$

$$\tilde{I}_4 = (D_0 - D_\pi) + i(D_{\pi/2} - D_{3\pi/2}). \quad (6)$$

最后, 对 N 步相移结果作离散逆傅里叶变换就能得到包含待测物体信息的二维图像, 即

$$G(x, y) = F^{-1}[\tilde{I}_N]. \quad (7)$$

2.3 正弦鬼成像

正弦鬼成像 (sinusoidal ghost imaging, SGI) 由 Khamoushi 等^[14] 在 2015 年提出. 与 FSI 相同, 都应用了正余弦结构条纹散斑, 不同的是 SGI 利用了傅里叶级数展开的正余弦基底条纹来调制投射光场, 而 FSI 则使用最基本的余弦条纹并且利用相

移生成多个基底图案.

在鬼成像实验中采用二维傅里叶级数生成正弦模式, 通过选择一个长度为 l 的方形边界条件, 可以将二维傅里叶级数表述如下:

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{m,n} \exp[j(mx + ny)], \quad (8)$$

其中 m 和 n 共同表示平面内的角频率, 由于正余弦条纹在空间上是无限延伸的, 所以完备的正负项 m, n 具有共轭对称性, 负项与正项对成像的贡献相同. 通过将角频率的零项、正负项分开, 并进行简单的计算, 可以得到如下二维傅里叶级数:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \sin(mx) + B_m \cos(mx)] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \sin(ny) + B'_n \cos(ny)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{m,n}^+ \sin(mx + ny) \\ & + B_{m,n}^+ \cos(mx + ny)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{m,n}^- \sin(mx - ny) \\ & + B_{m,n}^- \cos(mx - ny)], \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $A_m, B_m, A'_n, B'_n, A_{m,n}^+, B_{m,n}^+, A_{m,n}^-$ 和 $B_{m,n}^-$ 均为傅里叶系数, 可以由下式计算:

$$A_{m,n}^+ = \frac{2}{l^2} \int_0^l \int_0^l f_z(x, y) \sin(mx + ny) dx dy, \quad (10)$$

式中, z 表示 (9) 式中傅里叶级数展开式的对应项. 由 (9) 式可知, 共有 8 个傅里叶系数需要计算, 同时该式可看作是水平与垂直, $0^\circ-90^\circ$ 与 $90^\circ-180^\circ$

四种正余弦条纹的组合. 实际成像过程中, 使用连续的低频率基底条纹间隔投影并采集, 将不同频率单像素测量值作为权重值, 与基底图案相乘再统计平均便可重建图像.

3 分析

FSI 与 SGI 均采用正交正余弦散斑作为基底调制投射光场, 很容易联想到两者成像原理的一致性. 在 FSI 中, 傅里叶基底散斑是二维狄拉克函数的二维逆傅里叶变换 (取实部) 的结果, 因此, 傅里叶基底散斑有两种表达方法: 一是基于空间域的表达方法, 二是基于傅里叶变换域的表达方法. (3) 式所示的余弦函数表示法即为空间域的表达方法, 其中正弦和余弦条纹在空间频率不变的前提下相差 $\pi/2$ 相位.

在 N 步相移的选择上, 必须根据需求来确定. 已知四步相移抑制噪声的效果更明显, 而三步相移成像速度更快, 因此在不单独追求成像速度的情况下可以优先考虑成像质量. 并且四步相移以 $\pi/2$ 为相位分割节点, 有利于正余弦条纹的同类整合, 同时四步相移法可以直接抵消环境光以及对成像无效的直流量干扰, 只留下对应的调制系数 β . 运用四步相移法可以得到

$$F(f_x, f_y) = 2\beta \iint_{\Omega} O(x, y) \cos(2\pi f_x x + 2\pi f_y y) dx dy - i2\beta \iint_{\Omega} O(x, y) \sin(2\pi f_x x + 2\pi f_y y) dx dy. \quad (11)$$

为将傅里叶域的基散斑与空间域的基散斑进行比较, 需要将两类散斑放到同一变换域, 如果对 (11) 式进行二维离散逆傅里叶变换, 可以得到

$$G(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(f_x, f_y) \exp \left[j \left(\frac{u}{M} x + \frac{v}{N} y \right) \right], \quad (12)$$

其中 $u/M = 2\pi f_x$, $v/N = 2\pi f_y$, $G(x, y)$ 即为 FSI 最终重建的物体图像, M 和 N 分别为 f_x, f_y 的采样次数. 根据傅里叶级数展开的性质, (8) 式中 $A_{m,n}$ 的计算式表达如下

$$A_{m,n} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l O(x, y) \exp[-i(mx + ny)] dx dy, \quad (13)$$

通过欧拉公式可将 (13) 式改写成以下形式:

$$A_{m,n} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l O(x, y) \cos(mx + ny) dx dy - i \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l O(x, y) \sin(mx + ny) dx dy. \quad (14)$$

将傅里叶基的正交性^[18]代入 (12) 式可得

$$f(x, y) = \begin{cases} \sum_{f_x=0}^M \sum_{f_y=0}^N F_i(f_x, f_y) \exp[j(2\pi f_x x + 2\pi f_y y)] = 0, & i \neq j, \\ \sum_{f_x=0}^M \sum_{f_y=0}^N F_i(f_x, f_y) \exp[j(2\pi f_x x + 2\pi f_y y)] = f(x, y), & i = j. \end{cases} \quad (15)$$

对比 (11) 式与 (14) 式可知, $A_{m,n}$ 即等价于 $F(f_x, f_y)$, 说明 (12) 式与 (8) 式等价, 由此可知 FSI 的特定傅里叶谱变换到空域中, 即为 SGI 的包含待测物体信息的图像, 而 SGI 实验中投射条纹同样为调制后的条纹图案, 如果采用同样的采样频率、调制深度、初相位和相同的图像尺寸, 则两者在数学上完全等价, 也就是说从数学角度讲, SGI 与 FSI 成像原理相同.

4 讨论

4.1 FSI 与 SGI 成像过程仿真

由 (10) 式可以看到, 相较于四步相移获得傅里叶系数的方法, SGI 傅里叶系数的构造方法可等效为两步相移. 虽然两步相移没有四步相移抑制背景噪声和电路噪声的能力强, 但可以降低计算量并提升图像重建速度. 分别对 FSI 和 SGI 进行仿真, 原始图像是大小为 256×256 像素的 cameraman 灰度图, 仿真结果如图 4 和图 5 所示.

以上结果是在无噪声条件下得到的, 可以看出在相同采样率下, SGI 的信噪比优于 FSI. 原因是等效于两步移相的 SGI, 其采样频次仅是 FSI 的一半, 在相同采样次数下, 参与重构的空间频率成分多于 FSI, 而在正交变换域鬼成像中, 影响最终图像质量的就是空间频率成分的数量.

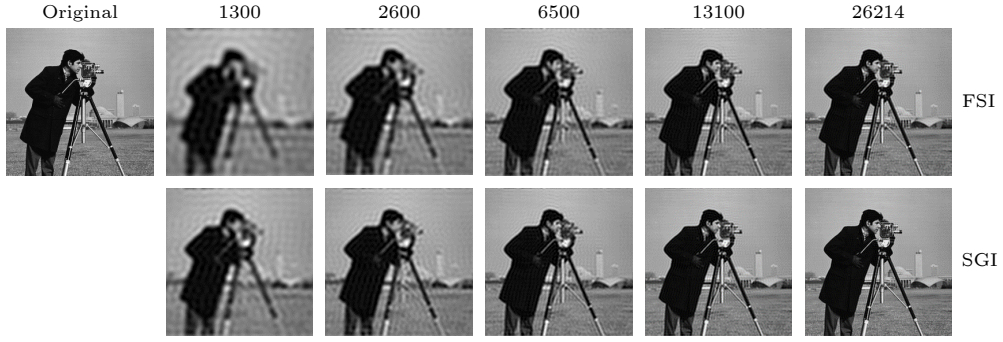


图 4 不同测量次数下的灰度 FSI 和 SGI 重建图像

Fig. 4. Reconstructed images of grayscale FSI and SGI under different measurement times.

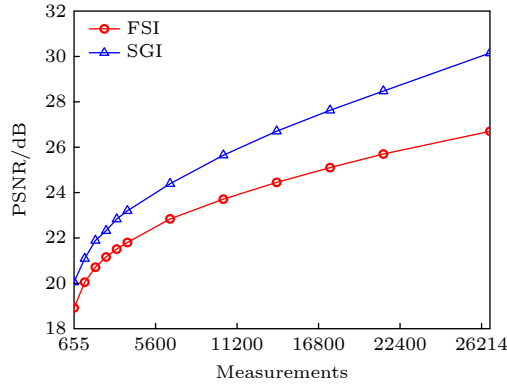


图 5 灰度 FSI 和 SGI 在不同测量次数下的 PSNR 值

Fig. 5. PSNR value of grayscale FSI and SGI under different measurement times.

考虑到在实际条件下必然存在各种噪声的影响,引入随机噪声进行另一次数值模拟,结果如图 6 所示,测量次数设置为 13100.从图 6(b) 可以看到,随着引入噪声能量的增大,SGI 信噪比的下降程度比 FSI 更明显,而图 6(c) 中在相同噪声水平下,SGI 的 PSNR 变化值约为 FSI 的 3 倍,说明 SGI 的抗噪能力明显低于 FSI,这也与预期结果一致.图 6(a) 的 SGI 结果还显示,图像的 4 个角存在明显的异常噪声,这种情况也反映在 Khamoushi 等^[14]的研究结果中.经过研究可知,异常噪声是由 SGI 的非差分测量引起的,而 FSI 的四步移相是对称差分测量,具有明显的噪声抑制效果,因此没有异常噪声.

4.2 FSI、SGI 及结合方法的边缘检测模拟实验仿真

两种方法一定程度上可以互相弥补彼此的缺陷,如果将 FSI 的频域处理过程保留,将四步相移算法替换为 SGI 的图像重建算法就可得到一个新的结合方法 (combination method, CM).为对比 FSI,

SGI 和 CM 三种方法在实际应用中的效果,引用文献 [19] 中所提出的基于傅里叶单像素成像的边缘检测方法进行模拟仿真实验.基于边缘检测理论对待投影的基底图案进行处理后,分别得到水平和垂直方向的新的梯度条纹基底 P_{ϕ}^H 和 P_{ϕ}^V ,可表示为

$$P_{\phi}^H = P_{\phi}^y + P_{\phi}^{xy} - P_{\phi}^x - P_{\phi}^0, \quad (16)$$

$$P_{\phi}^V = P_{\phi}^y + P_{\phi}^0 - P_{\phi}^x - P_{\phi}^{xy}, \quad (17)$$

其中 P_{ϕ}^x , P_{ϕ}^y , P_{ϕ}^{xy} 分别表示图像沿 x 方向、 y 方向以及同时沿 x 和 y 方向移动一个像素的宽度.由于单个频率模式基底由原本模式以及 3 个新的模式构成,采样率则扩大为原来的 4 倍.对采样图像尺寸为 256×256 像素的二值图像 SCU 进行模拟实验,模拟结果如图 7 和图 8 所示.

从模拟实验结果可看到,SGI 随着采样率提高拥有比 FSI 更高的边缘图像质量,而 SGI 在低采样率下的 PSNR 值较低,边缘图像锐度和对比度过高.原因是 SGI 的空域过程相比频域处理光强更加粗糙,难以对少量模式找到准确的权重.随着采样率提升边缘图像质量明显提高,进一步说明在相同采样率下 SGI 方法比 FSI 能获得更高的成像质量. CM 方法保留了 FSI 的频域处理过程,因此不同采样率下的整体边缘图像质量更加稳定,同时结合了 SGI 重建算法也同样具有 SGI 的成像效率,并且成像质量相比 SGI 拥有略微优势.随后对该模拟实验添加随机噪声进行另一次模拟实验,采样数恒定为 52429 次,结果如图 9 所示.

模拟实验结果进一步表明 FSI 拥有比 SGI 更强的抗噪性能,同时证明真实实验环境中结合方法 CM 同样有效. CM 抗噪性能弱于 FSI 但优于 SGI,特别在低噪声环境下,频谱采样范围仅为 20% 时边缘图像的 PSNR 值也能达到 22 以上.

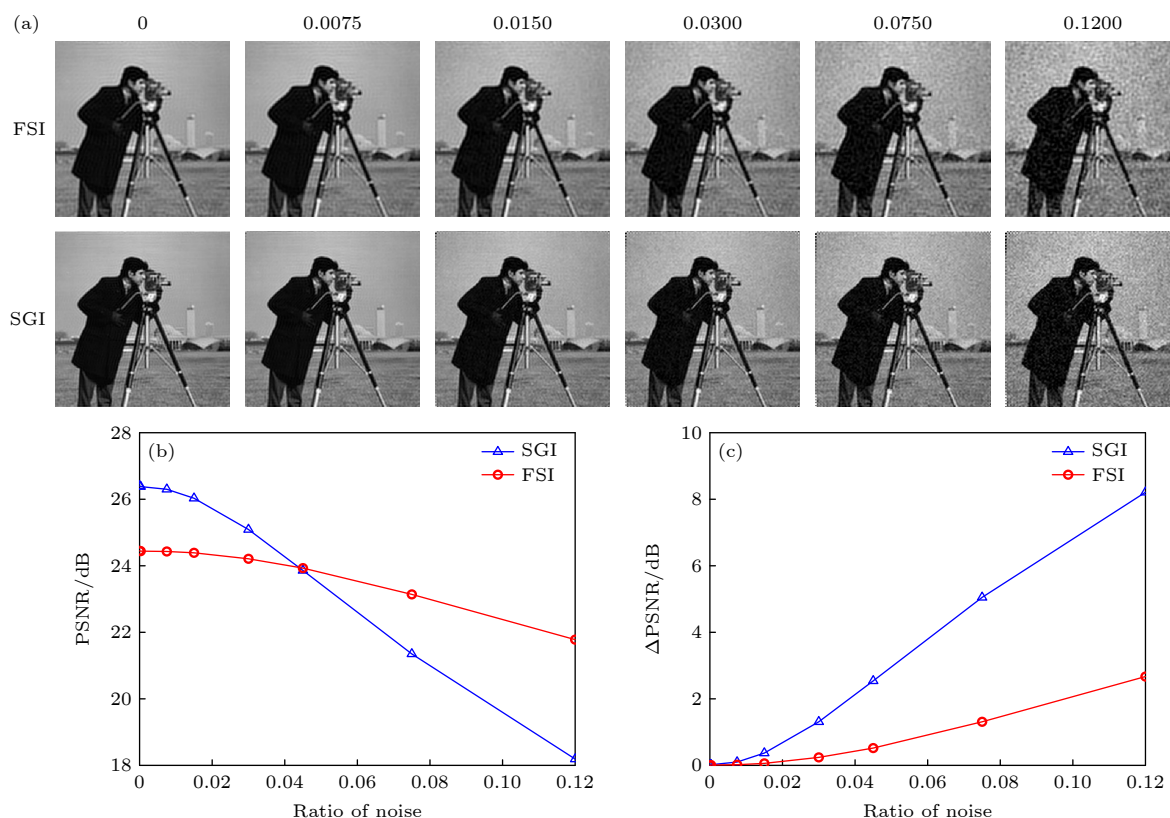


图 6 灰度 FSI 和 SGI 在叠加不同强度随机噪声下的重建结果, 随机噪声幅值的浮动范围分别为图像低频部分模拟测量值最大浮动范围的 0, 0.0075, 0.015, 0.03, 0.075, 0.12 倍 (a) 两种方法在不同噪声水平下的最终重建图像; (b) 最终重建图像的 PSNR 值; (c) 最终图像与无噪声图像的 PSNR 差值

Fig. 6. The reconstruction results of grayscale FSI and SGI under the superposition of random noise with different intensities, the floating range of random noise amplitude is 0, 0.0075, 0.015, 0.03, 0.075, 0.12 times of the maximum floating range of the simulated measurement value for the low frequency part of the image, respectively: (a) The final reconstructed image of the two methods under different noise levels; (b) PSNR value of the final reconstructed image; (c) PSNR difference between the final image and the noiseless image.

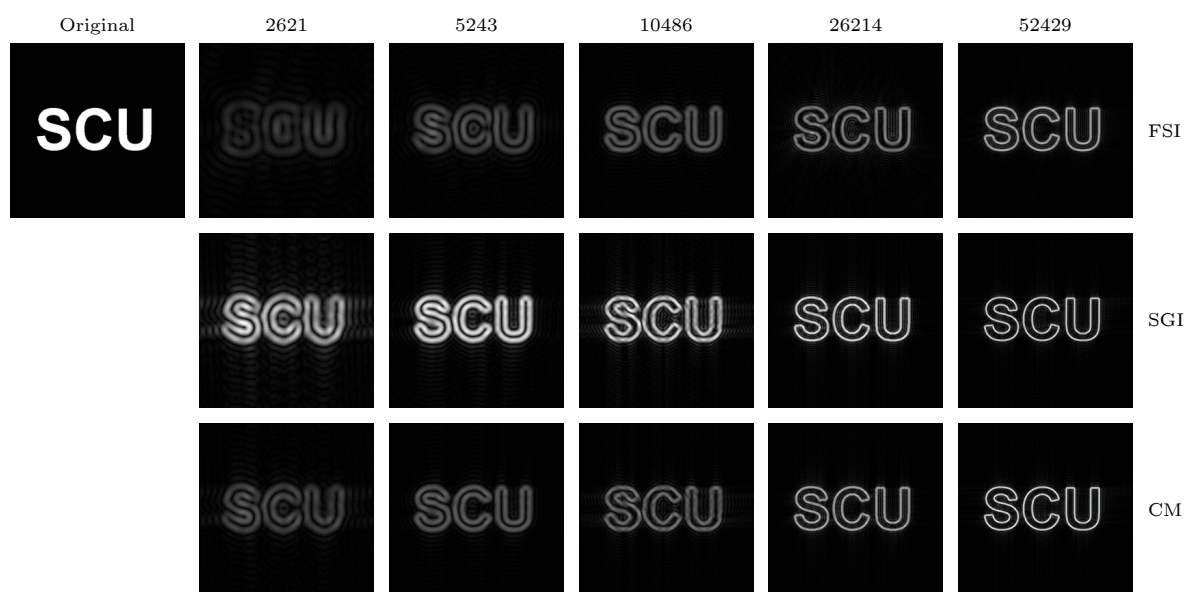


图 7 不同采样数下二值图 SCU 对应 3 种不同方法的边缘检测结果

Fig. 7. Edge detection results of binary graph SCU under different sampling numbers correspond to three different methods.

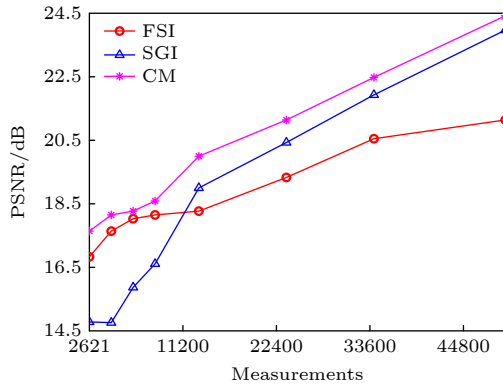


图 8 三种方法在不同采样数下的边缘检测 PSNR 值

Fig. 8. PSNR values of the edge detection for the three methods under different sampling numbers.

4.3 鬼成像关联性质讨论

从 Khamoushi 等^[20]的研究可以看出, SGI 方法更接近于 TGI, 即通过多次测量再统计平均的方式来获得包含待测物体信息的图像, 也就是说正弦鬼成像 SGI 是可以在 TGI 框架下采用下式进行描述:

$$G(x, y) = \langle I_0 I_r(x, y) \rangle, \quad (18)$$

其中 $I_r(x, y)$ 是调制后的投射光场, I_0 是来自待测物体的透射光 (或反射光) 强度, I_0 可以表示为

$$I_0 = \int_{\Omega} O(x, y) I_r(x, y) dx dy. \quad (19)$$

通过将 (17) 式与 (13) 式比较可知, $I_r(x, y)$ 是基于

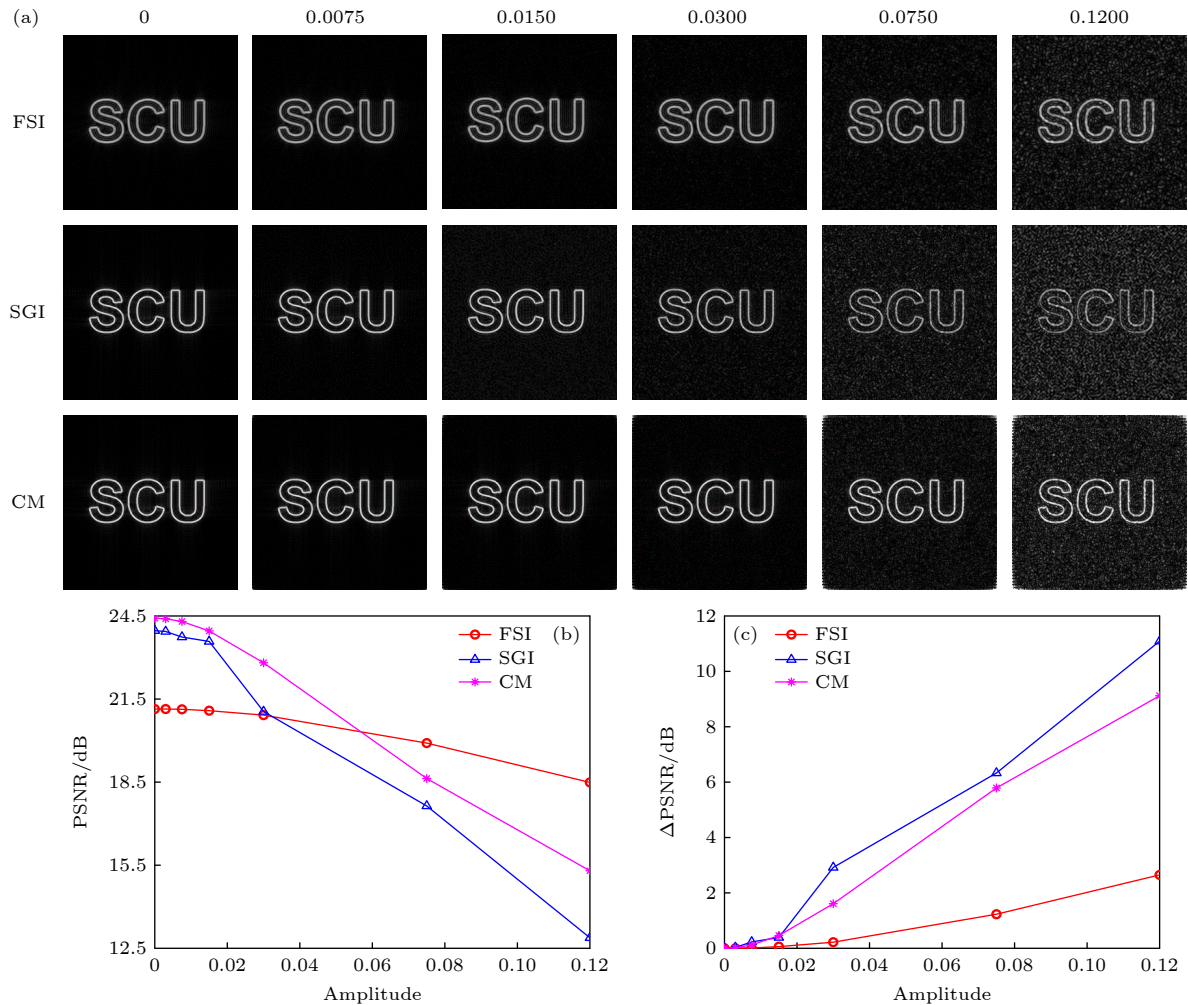


图 9 三种方法在叠加不同强度随机噪声下的重建结果, 随机噪声幅值的浮动范围分别为图像低频部分模拟测量值最大浮动范围的 0, 0.0075, 0.015, 0.03, 0.075, 0.12 倍 (a) 3 种方法在不同噪声水平下的最终重建图像; (b) 最终重建图像的 PSNR 值; (c) 最终图像与无噪声图像的 PSNR 差值

Fig. 9. Reconstruction results of the three methods under different intensities of random noise. The floating range of random noise amplitude is 0, 0.0075, 0.015, 0.03, 0.075, 0.12 times of the maximum floating range of the simulated measurement value for the low frequency part of the image: (a) Final reconstructed images of the three methods under different noise levels; (b) PSNR value of the final reconstructed image; (c) PSNR difference between the final image and the noiseless image.

傅里叶级数展开的正余弦模式, 在该框架下 I_0 即等价于傅里叶系数. 因此, 通过代入调制后的投射光场和计算相应的傅里叶系数, $G(x, y)$ 将变为待重建的物体图像.

TGI 基于光强涨落的二阶关联函数表示为

$$\begin{aligned} T_{GI}(x, y) &= \langle O(x, y) \rangle \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (S_i - \langle S \rangle) (I_i(x, y) - \langle I(x, y) \rangle) \\ &= \langle SI(x, y) \rangle - \langle S \rangle \langle I(x, y) \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

可以看到 TGI 基于光强涨落, 待测物体信息需要测量值与均值相减再统计平均得到. 而 SGI 利用结构化散斑, 仅需用单像素探测器测得基底对应的权重值, 再与基底相乘并对所有基底平均后重建图像, 因此从重建算法来看, 正弦鬼成像算法比传统鬼成像关联算法更加简化.

目前基于傅里叶变换域的鬼成像方法有高效傅里叶单像素成像^[18]、基于空间抖动方法将灰度傅里叶调制散斑转换为二值化散斑的快速傅里叶单像素成像^[21]、基于变密度抽样方法并结合压缩感知算法的稀疏傅里叶单像素成像^[22]等, 这几种鬼成像方法都是由 FSI 衍生而来, 此外还有本文所讨论的正弦鬼成像. 通过前面的论证可知, 在傅里叶变换域下的鬼成像方法原理一致, 只是成像的具体方法或重建图像的算法不同.

如果将上述思考进一步扩展, 考虑到图像本身是一种二维空间信号, 一般都由空间域的方式表达. 在空间域中同样有基函数即脉冲函数, 而空间域的脉冲函数也就是像素, 像素值的大小称为灰度, 所以鬼成像的空间域表达也为脉冲基底散斑投影成像. 除了空间域图像还可以在其他正交变换域有等价的表达, 如傅里叶变换域^[18]、小波变换域^[23]、离散余弦变换域^[24]、哈达玛变换域^[25]等.

其中傅里叶变换域的正交性体现在正余弦函数的正交性以及复空间的正交性上, 复空间的正交性即 (16) 式所示, 而正余弦函数正交性即:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)(\cos kx)dx &= \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \pi, & n = k \end{cases} \\ & \quad (\text{正弦函数同理}), \\ \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)(\sin kx)dx &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

该式表明在傅里叶域柯西主值积分条件下, 不同频

率不同初相位的正余弦条纹间互不干扰.

离散余弦变换则为离散傅里叶变换的特殊情况, 重构的离散余弦基底关于原点对称, 不再具有虚部, 仅体现正余弦函数的正交性. 离散余弦单像素成像由于周期延展的平滑特性其频谱成分更集中, 从而欠采样成像效果略优于傅里叶单像素成像. 小波变换单像素成像包含时域特性, 能处理随时间变化的图像. 小波函数正交表示不同空间尺度和时间尺度的小波间互不干扰, 物理意义上与正余弦函数正交等同. 而不同于以傅里叶变换为基础的单像素成像是依靠图像分解来获得基底, 哈达玛单像素成像的正交基由 Hadamard 矩阵导出, 为矩阵或向量正交, 也就是通过矩阵构造正交基底.

可以看到鬼成像过程是一个对图像编码再解码的过程, 选择合适的方法编码并能低损耗解码就是鬼成像的关键. 上述提到的正交变换域均有已被实现的鬼成像方法, 如小波变换鬼成像^[23]、离散余弦彩色鬼成像^[24]、哈达玛鬼成像^[25]等. 在 Bian 等^[18]的研究成果中可以看到通过研究傅里叶鬼成像并且参考正弦鬼成像的实现方式, 还获得了新的鬼成像方法. 在尚未验证等价性基础的情况下已经出现部分应用方面的成果, 并且从 (16) 式和 (17) 式可知, 鬼成像在傅里叶变换域中的表达与传统鬼成像空间域表达可以相互转化. 考虑到在实际中所有成像过程都是在空域实现的, 该发现表明空域的成像理论描述可以作为所有正交变换域成像的纽带, 同时也揭示着正交变换域成像的完备空域描述是建立这种联系的关键. 我们也正在探求将这种关系推广到所有正交变换域, 将传统鬼成像与其他各个正交变换域鬼成像联系起来, 丰富鬼成像理论体系, 开辟新的鬼成像研究领域, 拓展鬼成像应用方向. 相信更加完善的鬼成像理论体系能有助于鬼成像领域研究工作进一步深入.

5 结 论

本文证明了 FSI 和 SGI 成像原理的一致性. 与传统鬼成像相比, 正交变换鬼成像使用复杂散斑, 但简化了重构算法. 正交基是正交变换成像的关键, 选择合适的正交空间结构基是正交变换鬼成像的基础. 研究表明, 可以将 FSI 和 SGI 两种方法相结合而获得具有两者优势新型鬼成像方案, 同时不同的鬼成像方法之间存在一定的共性, 探索这种共

性对鬼成像的研究具有积极的意义. 基于这一共性, 可将不同的鬼成像方法整合在同一理论框架下, 完善鬼成像的理论体系, 探索新的鬼成像方法.

参考文献

- [1] Welsh S S, Edgar M P, Jonathan P, Sun B Q, Padgett M J 2013 *Conference on Emerging Digital Micromirror Device Based Systems and Applications V* San Francisco, CA, Feb. 05–06, 2013 p1
- [2] Shapiro J H 2008 *Phys. Rev. A* **78** 061802
- [3] Erkmen B I, Shapiro J H 2010 *Adv. Opt. Photonics* **2** 405
- [4] Pittman T B, Shih Y H, Strekalov D V, Sergienko A V 1995 *Phys. Rev. A* **52** R3429
- [5] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 113601
- [6] Cao D Z, Xiong J, Wang K 2005 *Phys. Rev. A* **71** 013801
- [7] Edgar M P, Gibson G M, Bowman R W, Sun B, Radwell N, Mitchell K J, Welsh S S, Padgett M J 2015 *Sci. Rep.* **5** 10669
- [8] Chan W L, Charan K, Takhar D, Kelly K F, Baraniuk R G, Mittleman D M 2008 *Appl. Phys. Lett.* **93** 121105
- [9] Tajahuerce E, Duran V, Clemente P, Irlles E, Soldevila F, Andres P, Lancis J 2014 *Opt. Express* **22** 16945
- [10] Ferri F, Magatti D, Lugiato L A, Gatti A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 253603
- [11] Wu L A, Luo K H 2011 *S. N. Bose National Centre for Basic Sciences Silver Jubilee Symposium on 75 Years of Quantum Entanglement-Foundations and Information Theoretic Applications* Kolkata, INDIA, Jan 06–10, 2011 p223
- [12] Sun B Q, Welsh S S, Edgar M P, Shapiro J H, Padgett M J 2012 *Opt. Express* **20** 16892
- [13] Zhang Z B, Ma X, Zhong J G 2015 *Nat. Commun.* **6** 6225
- [14] Khamoushi S M M, Nosrati Y, Tavassoli S H 2015 *Opt. Lett.* **40** 3452
- [15] Radwell N, Mitchell K J, Gibson G M, Edgar M P, Bowman R, Padgett M J 2014 *Optica* **1** 285
- [16] Ortega A, Frossard P, Kovacevic J, Moura J M F, Vanderghenst P 2018 *P. Ieee.* **106** 808
- [17] Bromberg Y, Katz O, Silberberg Y 2009 *Phys. Rev. A* **79** 053840
- [18] Bian L H, Suo J L, Hu X M, Chen F, Dai Q H 2016 *J. Optics-UK.* **18** 085704
- [19] Zheng Y Y 2021 *M. S. Thesis* (Xian: Xi'an University of Technology) (in Chinese) [郑一瑶 2021 硕士学位论文 (西安: 西安理工大学)]
- [20] Khamoushi S M M, Tavassoli S H 2019 *J. Optics-UK.* **21** 025702
- [21] Zhang Z B, Wang X Y, Zheng G A, Zhong J G 2017 *Sci. Rep.* **7** 12029
- [22] Meng W W, Shi D F, Huang J, Yuan K E, Wang Y J, Fan C Y 2019 *Opt. Express.* **27** 31490
- [23] Rousset F, Ducros N, Farina A, Valentini G, D'Andrea C, Peyrin F 2017 *IEEE T. Comput. Imag.* **3** 36
- [24] Liu B L, Yang Z H, Liu X, Wu L A 2017 *J. Mod. Optic.* **64** 259
- [25] Wang L, Zhao S M 2016 *Photonics Res.* **4** 240

Equivalence analysis of Fourier ghost imaging and sinusoidal ghost imaging^{*}

Chen Xing-Yu Zhou Xin[†] Bai Xing Yu Zhan
Wang Yu-Jie Li Xin-Jia Liu Yang Sun Ming-Ze

(College of Electronic and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 5 December 2022; revised manuscript received 6 May 2023)

Abstract

Ghost imaging, also known as correlation imaging, is one of the research hotspots in the imaging field. Various ghost imaging systems with different basic principles and implementation architectures have emerged, but the correlation between them is weak, showing a diversified trend and recent research progress is slower than before. Studying the essence of ghost imaging theory is a feasible direction to explore the unknown field of ghost imaging. Through research, we find that Fourier ghost imaging and sinusoidal ghost imaging are based on the same type of orthogonal sine speckle and cosine speckle, which have a very high similarity. At the same time, sinusoidal ghost imaging method can give a complete spatial description and spatial imaging process, so we guess that these two imaging methods can reveal the relationship between spatial imaging and Fourier domain imaging. On this basis, it is proved that Fourier ghost imaging and sinusoidal ghost imaging are equivalent in principle. The former can be realized by n -step phase shift, while the latter can be equivalent to two-step phase shift. Considering that both of these methods use sine and cosine fringes as structural speckles. By combining the spatial decomposition characteristics of sine speckle imaging, the relationship between structural speckle imaging and traditional ghost imaging is analyzed, and the principles of some methods constructed on the basis of these two methods are explained. The simulation results applied to edge detection show that the combination of the two methods can simultaneously obtain the better anti-noise performance of Fourier ghost imaging and the higher imaging efficiency of sinusoidal ghost imaging. Since sinusoidal ghost imaging relates the characteristics of image spatial decomposition to traditional ghost imaging, and their expression is equivalent to the expression of orthogonal Fourier transform domain of Fourier ghost imaging, the association of ghost imaging methods in Fourier domain and even in the whole orthogonal transform domain and spatial domain can be generalized. This conclusion may provide a way for associating different kinds of ghost imaging, and it can be hoped that more and more new types of ghost imaging systems will be developed.

Keywords: ghost imaging, Fourier transform, orthogonal transformation space, phase shift algorithm

PACS: 42.30.-d, 82.80.Nj, 42.30.Wb, 42.30.Rx

DOI: 10.7498/aps.72.20222317

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62275080, 61475104) and the Natural Science Foundation of Sichuan Province, China (Grant No. 2022NSFSC0565).

[†] Corresponding author. E-mail: zhoxn@21cn.com



傅里叶鬼成像与正弦鬼成像的等价性分析

陈星宇 周昕 白星 余展 王玉杰 李欣家 刘洋 孙铭泽

Equivalence analysis of Fourier ghost imaging and sinusoidal ghost imaging

Chen Xing-Yu Zhou Xin Bai Xing Yu Zhan Wang Yu-Jie Li Xin-Jia Liu Yang Sun Ming-Ze

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 144202 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222317

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222317>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于自适应阈值方法实现迭代降噪鬼成像

Iterative denoising of ghost imaging based on adaptive threshold method

物理学报. 2018, 67(24): 244201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181240>

基于光场一阶关联的时域成像

Temporal imaging based on first-order field correlation

物理学报. 2019, 68(10): 104202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190184>

基于迭代重构算法改进晶体衍射分光X射线鬼成像的图像质量研究

Improving quality of crystal diffraction based X-ray ghost imaging through iterative reconstruction algorithm

物理学报. 2022, 71(7): 074201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211978>

基于傅里叶变换的波长扫描腔衰荡光谱

Wavelength-scanned cavity ring down spectroscopy based on Fourier transform

物理学报. 2019, 68(20): 204204 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191062>

三种降采样成像策略的性能优化以及与传统傅里叶望远镜的比较

Performance optimization of three down-sampling imaging strategies and their comparison with the conventional Fourier telescope

物理学报. 2019, 68(7): 074203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181801>

日光强度涨落自关联消湍流成像

Turbulence-free intensity fluctuation self-correlation imaging with sunlight

物理学报. 2019, 68(9): 094204 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182181>