

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

自旋-轨道耦合二分量玻色-爱因斯坦凝聚系统的孤子解*

李新月¹⁾ 祁娟娟¹⁾ 赵敦^{1)†} 刘伍明^{2)‡}

1) (兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000)

2) (中国科学院物理研究所, 北京 100190)

(2022年12月5日收到; 2022年12月26日收到修改稿)

在旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中, 孤子态作为宏观量子效应的典型状态, 可以通过自旋-轨道耦合进行调控, 这使得对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中孤子的研究成为近年来超冷原子领域研究的重要课题之一. 本文研究了描述一维自旋-轨道耦合二分量玻色-爱因斯坦凝聚体 Gross-Pitaevskii 方程的精确求解, 利用直接假设及可积约化方法, 给出了系统多种类型的孤子解, 讨论了相应的孤子动力学以及自旋-轨道耦合效应对系统的量子磁化和自旋-极化态的影响.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚体, 自旋-轨道耦合, Gross-Pitaevskii 方程, 孤子**PACS:** 67.85.Hj, 03.75.Lm, 03.75.Kk**DOI:** 10.7498/aps.72.20222319

1 引言

超冷原子系统^[1-3]由于具有宏观量子特性和高度可调控性已成为研究原子分子物理、凝聚态物理、量子信息、量子计算和量子光学等领域中一些基本问题的理想平台, 对超冷原子系统的研究已成为许多重要物理领域的交叉点, 是当前物理学研究中最活跃的前沿领域之一. 特别地, 超冷原子的旋量玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 由于自旋自由度被释放而具有超精细结构, 呈现出大量不同于单分量 BEC 的性质和新特性. 自 1998 年在实验上首次实现以来, 旋量 BEC 的研究已取得了非常丰富的成果^[4-6].

自旋-轨道耦合 (SOC) 是一种相对论效应. 在具有自旋的量子系统中, SOC 表现为将粒子的自

旋角动量与轨道角动量联系在一起, 从而对系统的性质产生影响, 因而在很多物理学领域中, SOC 效应都扮演着不可替代的角色. 近年来, 由于自旋电子学理论的深入发展, 兴起了对具有强自旋-轨道耦合材料的研究热潮. 对于一般的固体材料系统, 很难在实验室中产生可观测的 SOC 效应. 2011 年, 美国国家标准与技术研究所的 Spielman 研究组^[7]在 ⁸⁷Rb BEC 中两个内部自旋态之间通过双光子拉曼过程首次实现了一维人工 SOC. 2012 年, 中国科技大学^[8]、山西大学^[9]以及美国麻省理工的研究组^[10]也分别在 BEC 和费米冷原子气中实现了一维 SOC. 量子材料的许多新奇现象, 如自旋霍尔效应、量子反常霍尔效应、外尔半金属态、拓扑超导体等, 都与 SOC 效应密切相关. 由于在玻色系统中, SOC 会显著改变 BEC 的性质, 并且其中的 SOC 是高度可调、可控的. 因此, 具有 SOC 的 BEC

* 国家自然科学基金 (批准号: 12075102, 61835013, 12234012)、国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100) 和中国载人航天计划空间应用系统项目资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhaod@lzu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

系统, 为模拟各种 SOC 的特性、探索新奇量子态提供了更多的途径. SOC 引起的非线性激发, 已成为近年来超冷原子系统中的研究热点之一 [11–22]. 超冷原子系统的 SOC 首先是在自旋-1 的 ^{87}Rb BEC 系统中利用两束拉曼激光实现的, 对应的系统本质上是等效的自旋-1/2 系统. 自首次实验实现自旋-轨道耦合 BEC 以来, 对自旋-1/2 BEC 系统已经有了大量研究, 并发现了丰富的物理现象, 如条纹相 [23]、相分离 [24]、涡旋 [25,26]、超固态相 [27,28] 等. 同时, 作为典型的非线性激发现象, 各种物质波孤子 [29–31] 也在 SOC 的自旋-1/2 BEC 系统中得到了广泛研究 [32–39].

对于超冷玻色原子多体系统, 在平均场理论下, 其动力学可由一类非线性 Schrödinger 方程, 即通常所称的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程来描述 [6]. 因此, 对各种 BEC 系统对应的 GP 方程进行求解就成为-一个重要的课题. 特别地, 对各种 GP 方程获得物质波孤子解, 有助于在理论上深入理解 BEC 系统的动力学性质. 尽管对具有 SOC 效应的两分量 BEC 系统物质波孤子的研究已有很多, 但目前得到的有关精确孤子解的结果还很少, 这方面近期的工作可见文献 [21, 40–44]. 实际上, 即使对于不带 SOC 的非可积 GP 方程组, 解析结果也非常少. 本文将给出一维情形下具有 SOC 效应的一类两分量 BEC 系统的一些精确孤子解, 并讨论相应的动力学性质.

2 理论模型

平均场理论下, 带 SOC 的两分量 GP 方程组由下式定义:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathbf{H} + \mathbf{V}(x) + \mathbf{H}_1)\Phi,$$

其中序参数 $\Phi = (\Phi_{+1}, \Phi_{-1})^T$, 而 Φ_{+1} , Φ_{-1} 分别表示凝聚体的原子分布在自旋向上态和向下态的宏观波函数; H 和 H_1 分别表示单粒子的 Hamilton 算符和非线性相互作用的 Hamilton 算符; $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x)$ 表示外场, \mathbf{x} 是空间变量. 在一维情形下, 考虑由 Pauli 矩阵 σ_y 对应的自旋与粒子在 x 轴方向动量的耦合, 对应的单粒子 Hamilton 算符一般可写为

$$\mathbf{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \mu p_x \sigma_y + \frac{\hbar\delta}{2} \sigma_y + \frac{\hbar\Omega}{2} \sigma_x,$$

其中 $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ 是沿着 x 轴方向的动量算符, μ 是

自旋-轨道耦合强度, δ 为失谐参数, Ω 是 Rabi 频率, 这些参数可以分别独立调控. \mathbf{H}_1 定义为

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \alpha|\Phi_{+1}|^2 + \beta|\Phi_{-1}|^2 & 0 \\ 0 & \beta|\Phi_{+1}|^2 + \gamma|\Phi_{-1}|^2 \end{pmatrix},$$

其中常数 α, β 分别是自相互作用和交叉相互作用参数, 在实验上也是精确可调控的.

当二分量 BEC 系统的波函数已知时, 可通过 $S_\nu = \Phi^\dagger \sigma_\nu \Phi$ ($\nu = x, y, z$) 定义如下的自旋极化向量 $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$, 来描述系统的自旋-极化动力学 [4,45]:

$$M_x = \Phi_{+1}^* \Phi_{-1} + \Phi_{-1}^* \Phi_{+1},$$

$$M_y = -i(\Phi_{+1}^* \Phi_{-1} - \Phi_{-1}^* \Phi_{+1}),$$

$$M_z = |\Phi_{+1}|^2 - |\Phi_{-1}|^2,$$

其中 M_z 决定凝聚体中的净磁化分布, 而 $M_\perp = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ 给出了不同自旋态的原子之间的交换强度. 特别地, $M_z = 0$ 时, 凝聚体不呈现磁性. 可以看到, 当 Φ_{+1} 和 Φ_{-1} 有相同的相位时, 必有 $M_y = 0$; 当 Φ_{+1} 和 Φ_{-1} 相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 时, 必有 $M_x = 0$. 容易得到 $|M| = (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)^{\frac{1}{2}} = |\Phi_{+1}|^2 + |\Phi_{-1}|^2$, 恰为凝聚体中粒子的总密度. 对经典的自旋向量, 总有 $|M| \neq 0$, 因此总可以将自旋向量归一化, 在单位球面上给出自旋表示. 但在 BEC 中, 由于可能存在拓扑缺陷, 会导致在拓扑缺陷对应的粒子处 $|M| = 0$, 这使得自旋极化向量不能总是被归一化, 这点将在后面得到的解中体现出来.

本文主要考虑 $V = 0$, 且 $|\Omega| \ll 1$ 可以近似取为 0 的情形. 此时对应的 GP 方程组可写为 [12,17,46] (为方便, 取 $\hbar = m = 1$):

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi_{+1} + \frac{1}{2} \partial_x^2 \Phi_{+1} + \mu(\partial_x \Phi_{-1}) + i\frac{\delta}{2} \Phi_{-1} \\ \quad + (\alpha|\Phi_{+1}|^2 + \beta|\Phi_{-1}|^2)\Phi_{+1} = 0, \\ i\partial_t \Phi_{-1} + \frac{1}{2} \partial_x^2 \Phi_{-1} - \mu(\partial_x \Phi_{+1}) - i\frac{\delta}{2} \Phi_{+1} \\ \quad + (\beta|\Phi_{+1}|^2 + \alpha|\Phi_{-1}|^2)\Phi_{-1} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

在 $\mu = \delta = 0$, 且 $\alpha = \pm\beta$ 时, 上述 GP 方程组是可积的 Manakov 模型 [47,48], 已经得到了大量研究 [49]. $\mu = \delta = 0$, 且 $\alpha = \beta > 0$ 时, 方程组为聚焦型的. 该类型的研究成果极为丰富, 涉及亮-亮孤子解 [48]、怪波及呼吸子解 [50]、束缚态孤子解 [51]、亮-暗孤子解 [52]、非零-零背景上的超正则解 [53] 等. $\mu = \delta = 0$ 且 $\alpha = \beta < 0$ 时, 方程组称为散焦型的, 有亮-暗和

暗-暗孤子解^[54]、条纹相背景的暗孤子解^[55]。 $\mu = \delta = 0$ 且 $\alpha = -\beta$ 时, 方程组称为混合型的, 有亮-暗、亮-亮和暗-暗孤子解^[56]。 而当 $\mu \neq 0$ 或 $\delta \neq 0$ 时, 系统不再具有伽利略不变性, 方程组的精确求解要困难得多。 如在 $\mu = \delta = 0$ 时, 方程组总有单模形式的解, 令 $\Phi_{+1} = \Phi_{-1}$, 则方程组可以约化为标准的立方薛定谔方程, 由于立方薛定谔方程是可积的, 已经有丰富的结果, 从而容易得到各种各样的单模解。 显然, $\mu \neq 0$ 或 $\delta \neq 0$ 时, 这种直接的单模约化失效了, 这从一个方面反映出 SOC 系统的复杂性。 在已有的文献中, 虽然有大量数值解的研究, 但关于方程 (1) 精确解的结果似乎还很少见。 事实上, 即使 $\mu = \delta = 0$, 当 $\alpha \neq \pm\beta$ 时, 由于此时方程组不可积, 关于精确解的结果也缺乏讨论。

3 方程组的求解

本文将分别考虑 $\beta = \alpha$ 和 $\beta = 3\alpha$ 两种情形下的求解。

3.1 $\beta = \alpha$ 情形的条纹孤子解

假设方程 (1) 的解具有下列形式:

$$\begin{aligned} \Phi_{+1}(x, t) &= r_1(x, t)e^{i(kx+\omega t)}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= r_2(x, t)e^{i(kx+\omega t)}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $r_1(x, t)$, $r_2(x, t)$ 是实值函数; k, ω 是实数。 将 (2) 式代入到方程 (1) 中, 分离方程的实部和虚部, 首先让每个方程的虚部为零, 可以得到 $r_1(x, t)$, $r_2(x, t)$ 具有如下形式:

$$\begin{aligned} r_1(x, t) &= F_1(\xi) \sin\left(\mu + \frac{\delta}{2k}\right)x \\ &\quad + F_2(\xi) \cos\left(\mu + \frac{\delta}{2k}\right)x, \\ r_2(x, t) &= -F_1(\xi) \cos\left(\mu + \frac{\delta}{2k}\right)x \\ &\quad + F_2(\xi) \sin\left(\mu + \frac{\delta}{2k}\right)x, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\xi = -x/k + t$; $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ 是关于 ξ 的待定函数。 当 (3) 式中的 $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ 之一具有孤子形式时, 其解在一般情形下是条纹孤子解。 此时得到的条纹孤子实际上就是 SOC 效应导致的孤子振荡现象。 条纹孤子, 通常指条纹相上激发产生的孤子, 早期发现的条纹相只出现在相互作用参数满足可

混溶性条件 $\alpha > \beta$ 的情形^[1]。 进一步的理论研究表明, 当孤子同时占据能谱中简并能量最低态对应的两个全域动量极小值时, 可形成条纹孤子^[17,19]。 关于 $\alpha = \beta$ 情形下的条纹孤子, 可见文献^[19, 43]中 $\kappa = 0$ 的情形。 为给出方程 (1) 对应的单粒子能带结构, 选取平面波 $\Phi_{\pm 1}(x, t) = A_{\pm 1}e^{i(kx-\omega t)}$, 其中 $|A_{\pm 1}| \ll 1$ 。 利用这两个平面波对应的线性化方程关于 $A_{\pm 1}$ 非零解的存在性条件, 可得能量 ω 和动量 k 的关系为

$$\omega^2 + \frac{k^4}{4} - (\mu^2 + \omega)k^2 - \mu k \delta - \frac{\delta^2}{4} = 0. \quad (4)$$

求解 (4) 式可得 $\omega = \frac{1}{2}k^2 \pm (\mu k + \frac{1}{2}\delta)$, 给出的能带分别记为 ω_+ 和 ω_- , 易见 ω_- 的能量最低态在动量空间有两个极小值, 相应的动量分别为 $\pm k_0 = \pm \mu$, 这和文献^[43]中讨论的 $\kappa = 0$ 的能带结构类似。 在没有 SOC 效应的情形下, 即当 $\mu = \delta = 0$ 时, 这种能带结构消失, 系统也不再有条纹孤子解。

将 (3) 式代入实部对应的方程组, 化简并令 $\sin(\mu x)$, $\cos(\mu x)$ 的系数为零, 当 $\beta = \alpha$ 时, 可得等价的方程组:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1(\xi)}{d\xi^2} + 2F_2(\xi)^2 F_1(\xi)\beta + 2F_1(\xi)^3 \alpha \\ + (\mu^2 - k^2 - 2\omega)F_1(\xi) &= 0, \\ \frac{d^2 F_2(\xi)}{d\xi^2} + 2F_1(\xi)^2 F_2(\xi)\beta + 2F_2(\xi)^3 \alpha \\ + (\mu^2 - k^2 - 2\omega)F_2(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

为确定孤子形式的 $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$, 使用 sine-cosine 方法^[57]。 假设 $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ 具有下列形式:

$$\begin{cases} F_1(\xi) = E_1 \sin(h(\xi)) + G_1 \cos(h(\xi)) + H_1, \\ F_2(\xi) = E_2 \sin(h(\xi)) + G_2 \cos(h(\xi)) + H_2. \end{cases}$$

且 $h(\xi)$ 满足方程

$$\frac{dh(\xi)}{d\xi} = A \sin(h(\xi)) + B \cos(h(\xi)) + C,$$

其中 $E_1, G_1, H_1, E_2, G_2, H_2, A, B, C$ 是待定常数。 由此可以得到下面的解:

解 1): $\alpha < 0$; k, ω 是任意常数,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k^2 \mu^2 - k^4 - 2k^2 \omega - \frac{3}{4} \delta^2},$$

这里 μ 需要满足限制条件 $\mu^2 > 2\omega + k^2 + \frac{3\delta^2}{4k^2}$ 。

$$\begin{aligned}\Phi_{+1}(x, t) &= \left[-\frac{A}{k\sqrt{-\alpha}} \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) \sin \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x - \frac{\delta}{2k\sqrt{-\alpha}} \cos \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x \right] e^{i(kx + \omega t)}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= \left[\frac{A}{k\sqrt{-\alpha}} \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) \cos \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x - \frac{\delta}{2k\sqrt{-\alpha}} \sin \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x \right] e^{i(kx + \omega t)}.\end{aligned}\quad (5)$$

不同于文献 [17] 中给出的条纹亮孤子, (5) 式给出的解是一个振荡的暗孤子和一个平面波的叠加, 这种类型的解似乎在文献中还未见报道. 这种振荡以及平面波是由 SOC 效应激发产生的. 从波函数的表达式可以看出, 利用 δ 和 μ 可以改变波的振幅和传播速度. 由于 δ 和 μ 是可独立调控的, (5) 式的解包含了多种不同的孤子态. 如当 $\mu \neq 0$, $\delta = 0$ 时, 给出的是暗条纹孤子, 这是 SOC 使得暗孤子的均匀背景产生振荡形成了周期条纹所导致的. 对于两个不同分量, 这种振荡的相位相差 $\pi/2$, 而暗波包在传播过程中与周期背景产生的粒子交换过程使得密度分布表现出了呼吸子在周期背景中传播的现象, 如图 1 所示. 一般地, 当 $\delta \neq 0$ 且 $\delta \neq -2k\mu$ 时, 失谐效应会产生平面波背景, 两个分量中平面

波背景的相位也相差 $\pi/2$, 此时对应的解由振荡的孤立波和平面波叠加而成, 这种叠加依然使密度分布表现出呼吸子在周期背景中传播的现象, 和图 1 类似. 当 $\mu = \delta = 0$ 时,

$$\begin{aligned}\Phi_{+1}(x, t) &= 0, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= \left[\frac{A}{k\sqrt{-\alpha}} \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) \right] e^{i(kx + \omega t)},\end{aligned}\quad (6)$$

这说明 (5) 式是 SOC 作用从 (6) 式激发得到的. 而当 $\delta + 2k\mu = 0$, $\delta \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\Phi_{+1}(x, t) &= -\frac{\delta}{2k\sqrt{-\alpha}} e^{i(kx + \omega t)}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= \frac{A}{k\sqrt{-\alpha}} \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) e^{i(kx + \omega t)}.\end{aligned}$$

进一步, (5) 式对应的系统中, 粒子的总密度为

$$n(x, t) = |\Phi_{+1}|^2 + |\Phi_{-1}|^2 = \frac{4A^2 - \delta^2}{8\alpha k^2} \operatorname{sech}^2 \frac{2A}{k} (-x + kt) - \frac{4A^2 + \delta^2}{4\alpha k^2} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{A}{k} (-x + kt) \right],$$

该密度分布呈暗孤子态, 去掉 $-\frac{4A^2 + \delta^2}{4\alpha k^2}$ 对应的均匀背景分布, 总粒子数为

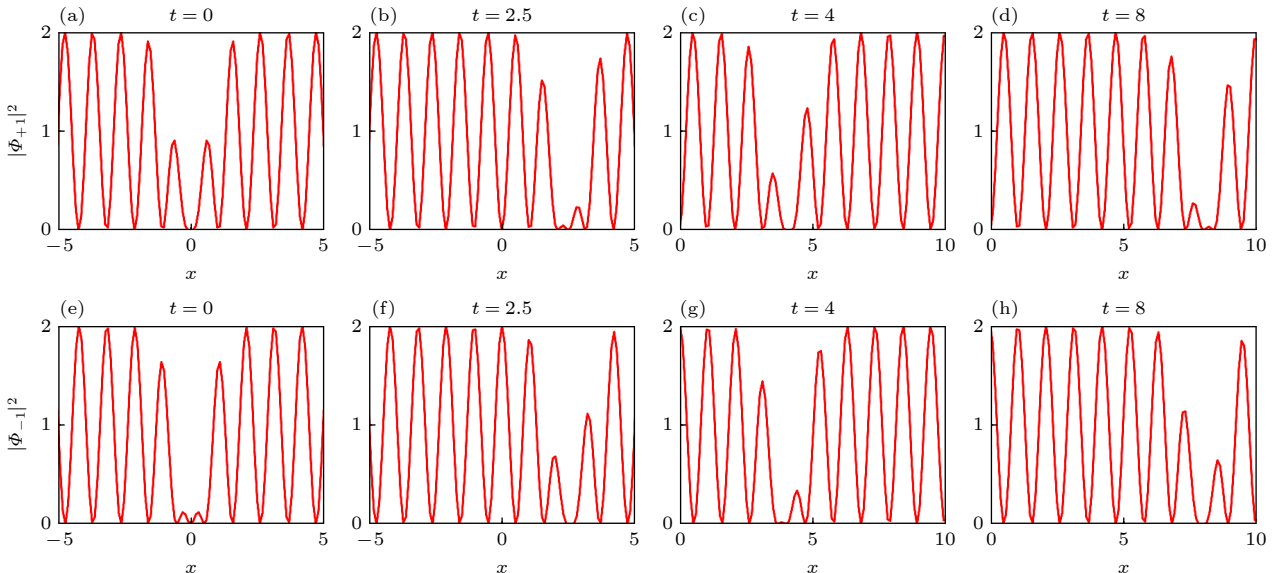


图 1 (5) 式对应的 SOC 调制的条纹暗孤子. 暗孤子的均匀背景被 SOC 调制为周期背景, 暗孤子中心与周期背景产生能量交换, 形成了周期背景中的呼吸子传播. 参数取值为 $k = 1$, $\delta = 0$, $\mu = 3$, $\omega = 2$, $\alpha = -1$

Fig. 1. Stripe dark soliton given by Eq. (5). The uniform background of the dark soliton is modulated by the SOC into the periodic background, and the energy exchange between the center of the dark soliton and the periodic background results in a breather like soliton propagating in the periodic background. The parameters are chosen as $k = 1$, $\delta = 0$, $\mu = 3$, $\omega = 2$, $\alpha = -1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{4A^2 - \delta^2}{8\alpha k^2} \operatorname{sech}^2 \frac{2A}{k} (-x + kt) + \frac{4A^2 + \delta^2}{8\alpha k^2} \operatorname{sech}^2 \frac{A}{k} (-x + kt) \right] dx = \frac{12A^2 + \delta^2}{8\alpha k A},$$

这表明 SOC 能够控制粒子数的交换. 相应地, 关于自旋极化向量, 有

$$M_x = \frac{\left[A^2 \tanh^2 \frac{A}{k} (-x + kt) - \frac{\delta^2}{4} \right] \sin \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x + A\delta \cos \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x}{2k^2 \alpha}, \quad M_y = 0,$$

$$M_z = \frac{\left[A^2 \tanh^2 \frac{A}{k} (-x + kt) - \frac{\delta^2}{4} \right] \cos \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x - A^2 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) \sin \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x}{k^2 \alpha}.$$

通过改变 SOC 和失谐参数, 可以控制赝自旋动力学. 显然, 当 $\mu = \delta = 0$ 时, 自旋极化向量指向固定的方向 $\mathbf{M} = (0, 0, -1)$, 其强度会随着空间和时间变化. 特别地, $\mathbf{M} = 0$ 对应于未被磁化的粒子, 形成了拓扑缺陷. 图 2(a) 给出了 $\mu \neq 0, \delta = 0$ 的情形, 此时形成了周期自旋畴; 图 2(b) 给出了 $\delta = -2k\mu$ 的情形, 此时形成了两个自旋畴; 图 2(c) 给出了 $\delta \neq 0$ 且 $\delta \neq -2k\mu$ 的情形, 与图 2(a) 相比, 随着时间演化, 在缺陷粒子的两侧, $\delta \neq 0$ 使得周期自旋畴的畴壁产生了位错. 显然, 参数 μ, δ 的取值对自旋畴的构型有显著的影响.

解 2): $\alpha < 0, k \neq 0, G_1$ 和 G_2 为任意实常数, $A = k\sqrt{-\alpha(G_1^2 + G_2^2)}$,

$$\Phi_{+1}(x, t) = \left[p_1(x, t) \cos \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x - p_2(x, t) \sin \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x \right] e^{i \left[kx - \left(A^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} + \frac{3\delta^2}{8k^2} \right) t \right]},$$

$$\Phi_{-1}(x, t) = \left[p_2(x, t) \cos \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x + p_1(x, t) \sin \left(\mu + \frac{\delta}{2k} \right) x \right] e^{i \left[kx - \left(A^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} + \frac{3\delta^2}{8k^2} \right) t \right]}. \quad (7)$$

其中

$$p_1(x, t) = G_2 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) + \frac{G_1 \delta}{2A}, \quad p_2(x, t) = G_1 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) - \frac{G_2 \delta}{2A}.$$

与解 1) 不同的是, 当 $\delta + 2k\mu \neq 0$ 时, 解 2) 给出的波函数由两个振荡孤子和平面波叠加而成. 当 $\mu = \delta = 0$ 时,

$$\Phi_{+1}(x, t) = G_2 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) e^{i \left[kx - \left(A^2 + \frac{k^2}{2} \right) t \right]},$$

$$\Phi_{-1}(x, t) = G_1 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) e^{i \left[kx - \left(A^2 + \frac{k^2}{2} \right) t \right]}.$$

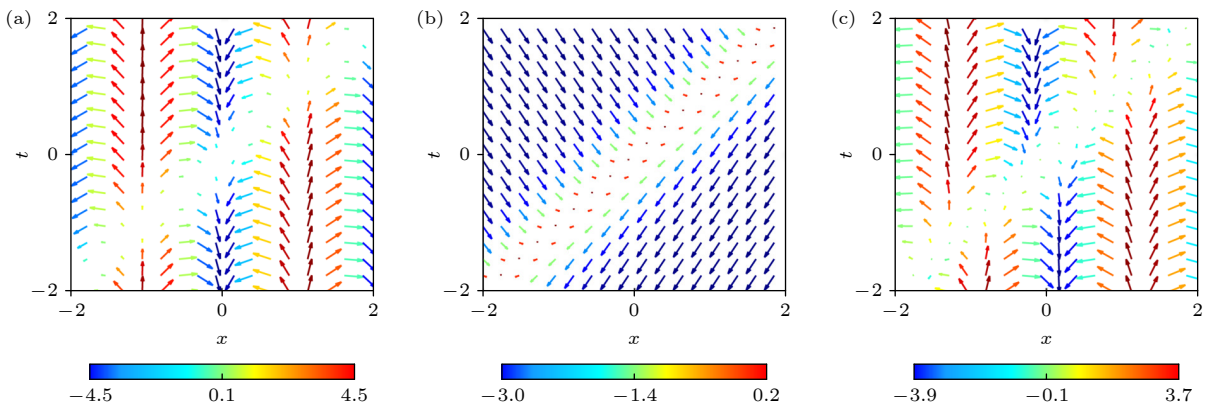


图 2 (5) 式对应的不同参数下的赝自旋演化 (a) $\mu = 3/2, \delta = 0, \omega = -4$; (b) $\mu = 1/2, \delta = -1, \omega = -4$; (c) $\delta = 1, \mu = 1, \omega = -4$. 其他参数为 $k = 1, \alpha = -1$

Fig. 2. Evolution of pseudo-spin corresponding to Eq. (5) with different parameters: (a) $\mu = 3/2, \delta = 0, \omega = -4$; (b) $\mu = 1/2, \delta = -1, \omega = -4$; (c) $\delta = 1, \mu = 1, \omega = -4$. Other parameters are taken as $k = 1, \alpha = -1$.

此时由 $|\Phi_{\pm 1}|^2$ 给出的密度分布均为暗孤子. 当 $\delta + 2k\mu = 0$, $\delta \neq 0$ 时,

$$\Phi_{+1}(x, t) = \left[G_2 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) + \frac{G_1 \delta}{2A} \right] e^{i \left[kx - \left(A^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} + \frac{3\delta^2}{8k^2} \right) t \right]},$$

$$\Phi_{-1}(x, t) = \left[G_1 \tanh \frac{A}{k} (-x + kt) - \frac{G_2 \delta}{2A} \right] e^{i \left[kx - \left(A^2 + \frac{k^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} + \frac{3\delta^2}{8k^2} \right) t \right]}.$$

解 2) 对应的系统粒子的总密度为

$$n(x, t) = (G_1^2 + G_2^2) \tanh^2 \frac{A}{k} (-x + kt) - \frac{\delta^2}{4\alpha k^2},$$

该密度分布呈带均匀背景的暗孤子态, 去掉背景分布, 总粒子数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (G_1^2 + G_2^2) \operatorname{sech}^2 \frac{A}{k} (-x + kt) dx = \frac{2\sqrt{G_1^2 + G_2^2}}{\sqrt{-\alpha}}.$$

由解 2) 决定的自旋极化向量可表示为

$$M_x = p_1(x, t)p_2(x, t) \cos \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x + \frac{1}{2} [p_1^2(x, t) - p_2^2(x, t)] \sin \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x, \quad M_y = 0,$$

$$M_z = [p_1^2(x, t) - p_2^2(x, t)] \cos \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x - 2p_1(x, t)p_2(x, t) \sin \left(2\mu + \frac{\delta}{k} \right) x.$$

当 $\mu = 0$, $\delta = 0$ 时,

$$M_x = G_1 G_2 \tanh^2 \frac{A}{k} (-x + kt),$$

$$M_y = 0,$$

$$M_z = (G_2^2 - G_1^2) \tanh^2 \frac{A}{k} (-x + kt).$$

$$K = \frac{\sqrt{2\alpha(8\mu^2\omega + \delta^2)}}{8\alpha\mu},$$

当 $\tanh \frac{A}{k} (-x + kt) \neq 0$ 时, \mathbf{M} 指向固定的方向即 $(G_1 G_2, 0, G_2^2 - G_1^2)$, 但其强度会随着空间和时间变化. 当 $\tanh \frac{A}{k} (-x + kt) = 0$ 时, $\mathbf{M} = 0$, 对应未被磁化的粒子, 形成了拓扑缺陷. 由于拓扑缺陷的存在, \mathbf{M} 不能归一化, 在 Bloch 球面上表示. 图 3 给出了 μ , δ 满足不同关系时波函数的密度分布和系统的磁化分布. 图 3(a)–(c) 是 $\delta + 2k\mu \neq 0$ 的情形, 图 3(d)–(f) 是 $\delta + 2k\mu = 0$ 的情形. 由 (7) 式和自

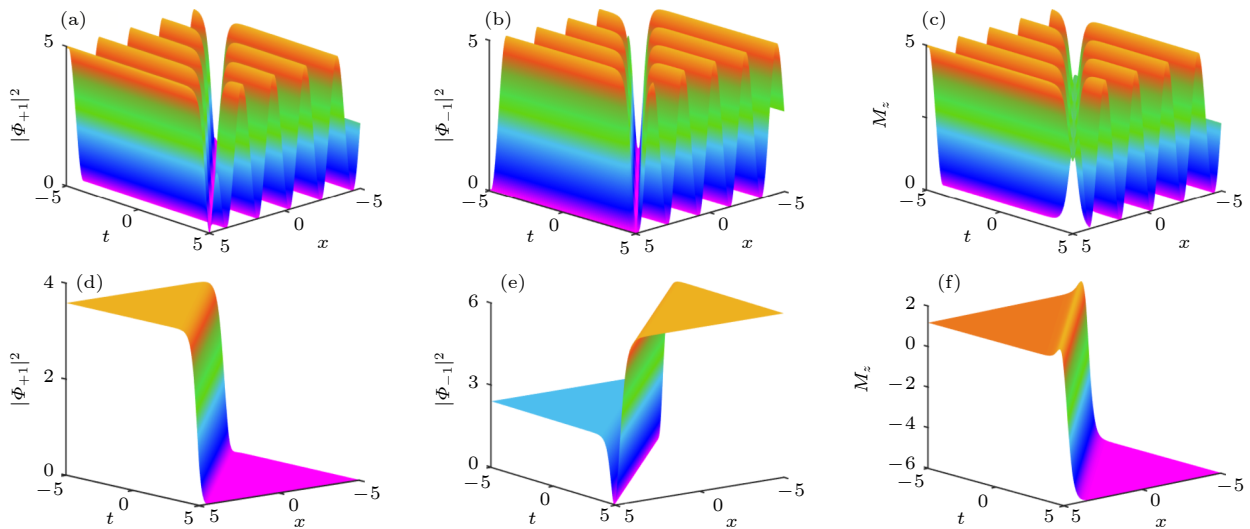


图 3 (7) 式对应的不同参数下的密度分布和磁化分布 (a)–(c) $\mu = 3/2$, $\delta = 0$; (d)–(f) $\mu = 1$, $\delta = -2$. 其他参数为 $G_1 = 2$, $G_2 = 1$, $k = 1$, $\alpha = -1$

Fig. 3. Distributions of the density and magnetization corresponding to Eq. (7) with different parameters: (a)–(c) $\mu = 3/2$, $\delta = 0$; (d)–(f) $\mu = 1$, $\delta = -2$. Other parameters are taken as $G_1 = 2$, $G_2 = 1$, $k = 1$, $\alpha = -1$.

旋极化向量的表达式可知, 这些态均可通过调控 SOC 强度和失谐参数, 由暗孤子态激发产生. 图 4 给出了解 2) 对应的系统赝自旋的演化. 与图 2 类似, 图 4(a) 给出了 $\mu \neq 0, \delta = 0$ 的情形, 由于 SOC 效应, 此时形成了周期自旋畴; 图 4(b) 给出了 $\delta = -2k\mu$ 的情形, 此时形成了两个自旋畴; 图 4(c) 给出了 $\delta \neq 0$ 且 $\delta \neq -2k\mu$ 的情形, 与图 4(a) 相比, 随着时间演化, 在缺陷粒子的两侧, $\delta \neq 0$ 使得周期自旋畴的畴壁产生了位错, 这和图 2(c) 显示的情况相同. 说明参数 δ 和 μ 在自旋动力学中产生的效应不完全相同.

3.2 $\beta = \alpha$ 情形的可积约化

$\beta = \alpha$ 时, 定义变换

$$\begin{aligned} \Phi_{+1}(x, t) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[q_{+1}(x, t) e^{i\left(\mu x + \frac{\mu^2 + \delta}{2} t\right)} \right. \\ &\quad \left. - q_{-1}(x, t) e^{-i\left(\mu x - \frac{\mu^2 - \delta}{2} t\right)} \right], \\ \Phi_{-1}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[q_{+1}(x, t) e^{i\left(\mu x + \frac{\mu^2 + \delta}{2} t\right)} \right. \\ &\quad \left. + q_{-1}(x, t) e^{-i\left(\mu x - \frac{\mu^2 - \delta}{2} t\right)} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

则方程 (1) 可约化为

$$\begin{cases} i\partial_t q_{+1} + \frac{1}{2} \partial_x^2 q_{+1} + \alpha(|q_{+1}|^2 + |q_{-1}|^2) q_{+1} = 0, \\ i\partial_t q_{-1} + \frac{1}{2} \partial_x^2 q_{-1} + \alpha(|q_{+1}|^2 + |q_{-1}|^2) q_{-1} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

这是标准的 Manakov 型方程组, 如前面所介绍, 在 $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$ 时, 已有深入的研究和丰富的结

果. 方程 (9) 的任何一组解都能给出 (1) 式的一个解. 另外, 如果假设 $q_{+1}(x, t) = q_{-1}(x, t) = q(x, t)$, 则方程 (9) 退化为单分量的标准立方薛定谔方程:

$$i\partial_t q + \frac{1}{2} \partial_x^2 q + 2\alpha |q|^2 q = 0, \quad (10)$$

此时, 由 (8) 式有

$$\begin{aligned} \Phi_{+1}(x, t) &= -\sqrt{2} q(x, t) \sin\left(\mu x + \frac{\delta}{2} t\right) e^{i\frac{\mu^2}{2} t}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= \sqrt{2} q(x, t) \cos\left(\mu x + \frac{\delta}{2} t\right) e^{i\frac{\mu^2}{2} t}. \end{aligned} \quad (11)$$

通过变换, 可以得到由 (9) 式或 (10) 式的多孤子解、呼吸子解、怪波解等对应的各种结果, 这里不再具体列出用上述方法得到的各种解.

3.3 $\beta = 3\alpha$ 情形的孤子解

对于任意 α, β , 要得到精确解非常困难. 我们发现, 当 $\beta = 3\alpha$ 时, 可以找到孤子解. 此时假设:

$$\begin{aligned} \Phi_{+1}(x, t) &= [r(ax + bt) + K] e^{i(kx + \omega t)}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= [-r(ax + bt) + K] e^{i(kx + \omega t + \pi/2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (1) 式, 选取以下参数:

$$\begin{aligned} a &= 2\mu, \quad b = 2\mu^2 + \delta, \quad k = -\delta \\ K &= \frac{\sqrt{2\alpha(8\mu^2\omega + \delta^2)}}{8\alpha\mu}, \end{aligned}$$

方程 (1) 可约化为

$$\frac{d^2 r(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2\alpha}{\mu^2} r^3(\xi) - \frac{8\mu^2\omega + \delta^2}{16\mu^4} r(\xi) = 0,$$

其中 $\xi = ax + bt$. 这一方程有多种方法求解, 这里仍然采用 sine-cosine 方法, 最终可得到两类解.

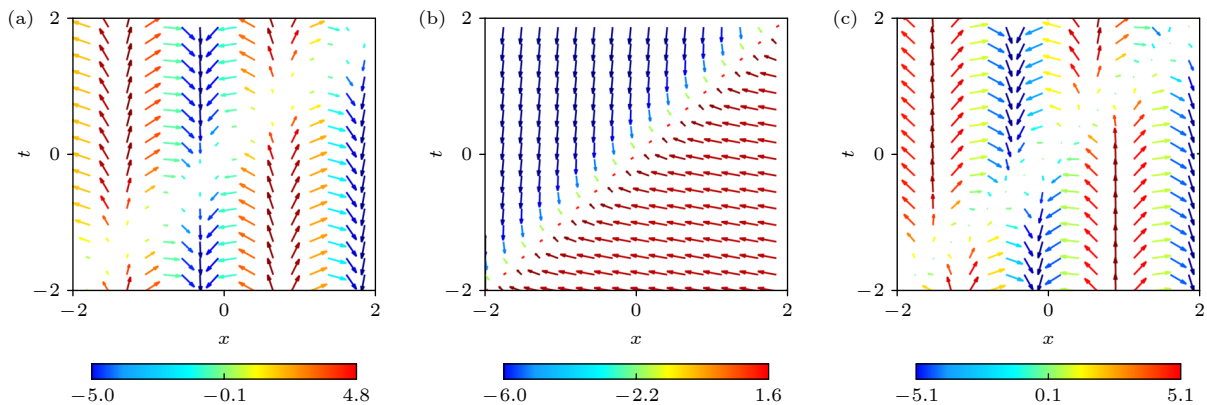


图 4 (7) 式对应的不同参数下的赝自旋演化 (a) $\mu = 3/2, \delta = 0$; (b) $\mu = 1, \delta = -2$; (c) $\delta = 1, \mu = 1$. 其他参数为 $G_1 = 2, G_2 = 1, k = 1, \alpha = -1$

Fig. 4. Evolution of pseudo-spin corresponding to Eq. (7) with the different parameters: (a) $\mu = 3/2, \delta = 0$; (b) $\mu = 1, \delta = -2$; (c) $\delta = 1, \mu = 1$. Other parameters are taken as $G_1 = 2, G_2 = 1, k = 1, \alpha = -1$.

1) $\alpha > 0$ 时, 对任意常数 G ,

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm 1}(x, t) &= G \left(\operatorname{sech} \left\{ 2\sqrt{\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{i \left[-\frac{\delta x}{2\mu} + (2G^2\alpha - \frac{\delta^2}{8\mu^2})t \right]}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= G \left(-\operatorname{sech} \left\{ 2\sqrt{\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{i \left[-\frac{\delta x}{2\mu} + (2G^2\alpha - \frac{\delta^2}{8\mu^2})t + \frac{\pi}{2} \right]}.\end{aligned}\quad (13)$$

2) $\alpha < 0$ 时, 对任意常数 G ,

$$\begin{aligned}\Phi_{+1}(x, t) &= G \left(-\tanh \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + 1 \right) e^{i \left[-\frac{\delta x}{2\mu} + (4G^2\alpha - \frac{\delta^2}{8\mu^2})t \right]}, \\ \Phi_{-1}(x, t) &= G \left(\tanh \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + 1 \right) e^{i \left[-\frac{\delta x}{2\mu} + (4G^2\alpha - \frac{\delta^2}{8\mu^2})t + \frac{\pi}{2} \right]}.\end{aligned}\quad (14)$$

从表达式可以看出, 这两类解仅在 $\mu \neq 0$ 时才存在, δ 可以控制行波速度, 并且在 $\delta = -2\mu^2$ 时, 行波变为驻波. 在这两组解中, $\Phi_{+1}(x, t)$ 和 $\Phi_{-1}(x, t)$ 的相位相差 $\pi/2$, 而且 SOC 没有产生孤子振荡效应, 这和前面 $\beta = \alpha$ 的情形是不同的.

对于 (13) 式, $|\Phi_{\pm 1}|^2$ 对应的密度分布态分别为亮孤子和 W-型孤子, 如图 5(a) 和图 5(b) 所示. 其

对应系统中粒子的总密度分布由下式给出:

$$\begin{aligned}n(x, t) &= G^2 \left(2\operatorname{sech}^2 \left\{ 2\sqrt{\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + 1 \right),\end{aligned}$$

这是均匀背景上的亮孤子. 去掉背景, 对应的总粒子数为 $2G/\sqrt{\alpha}$. 此解对应的自旋极化向量为

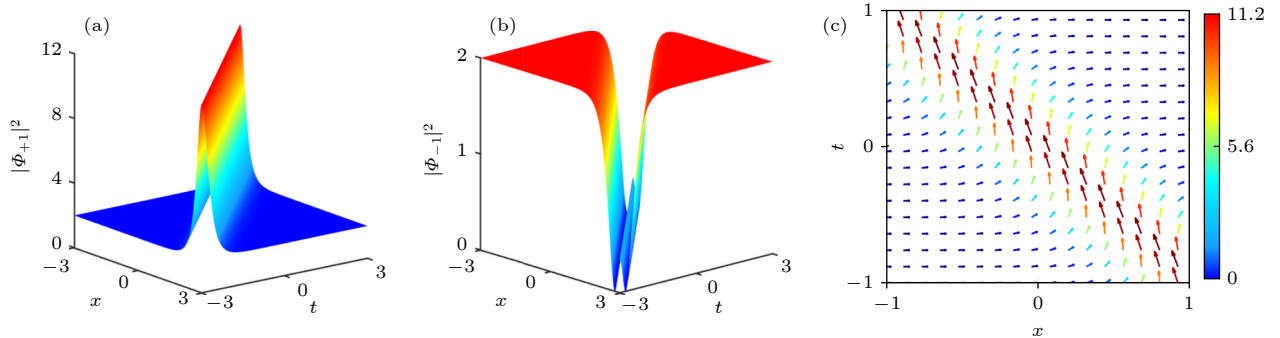


图 5 (13) 式对应的密度分布和赝自旋演化. 参数取值为 $\alpha = 1$, $\mu = 1$, $\delta = 0$, $G = 2$

Fig. 5. Density distribution and the evolution of pseudo-spin corresponding to (13). The parameters are taken as $\alpha = 1$, $\mu = 1$, $\delta = 0$, $G = 2$.

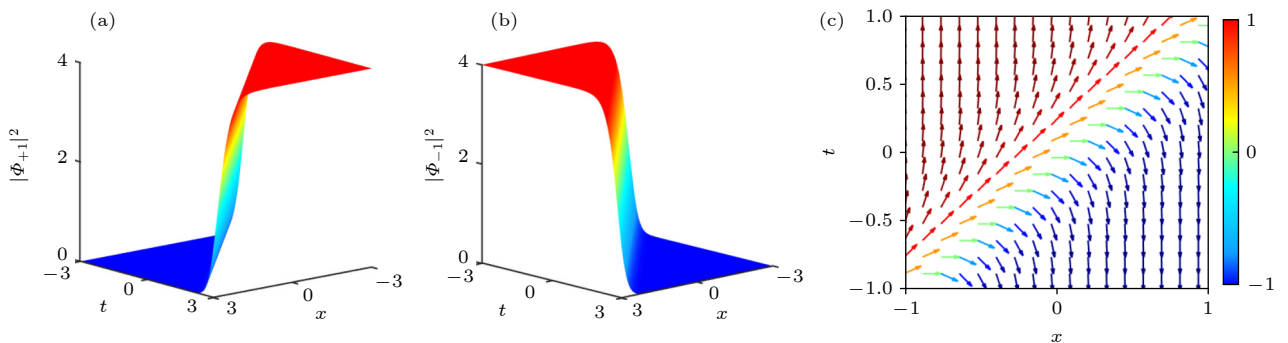


图 6 (14) 式对应的密度分布和赝自旋演化. 参数取值为 $\alpha = -1$, $\mu = -1$, $\delta = 0$, $G = 1$

Fig. 6. Density distribution and the evolution of pseudo-spin corresponding to (14). The parameters are taken as $\alpha = -1$, $\mu = -1$, $\delta = 0$, $G = 1$.

$$M_x = 0,$$

$$M_y = G^2 \left(-2 \operatorname{sech}^2 \left\{ 2\sqrt{\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + 1 \right),$$

$$M_z = 2\sqrt{2}G^2 \operatorname{sech} \left\{ 2\sqrt{\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\},$$

其中 M_z 呈亮孤子态. 图 5(c) 给出了由 $\{M_y, M_z\}$ 确定的自旋演化. 图中显示的自旋强度最大的地方是孤立波的波包附近, 即使得 $x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t = 0$ 决定的区域附近, 可以通过改变 μ 和 δ 来改变这一区域. 在 $\operatorname{sech} \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right]$ 取值接近 0 的区域, 自旋极化向量 \mathbf{M} 趋于固定方向 $(0, 1, 0)$, 这容易由表达式看出.

对于 (14) 式, $|\Phi_{\pm 1}|^2$ 对应的密度分布态分别为扭结和反扭结孤子, 如图 6(a) 和图 6(b) 所示. 其对应系统中粒子的总密度分布为

$$n(x, t) = 2G^2 \left(2 \tanh^2 \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\} + 1 \right),$$

这是均匀背景之上的暗孤子, 去掉均匀背景, 总粒子数为 $\frac{2G}{\sqrt{-\alpha}}$. 同样, 可以得到自旋极化向量如下:

$$M_x = 0,$$

$$M_y = 2G^2 \operatorname{sech}^2 \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\},$$

$$M_z = -4G^2 \tanh \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\},$$

其中 M_z 呈扭结孤子态. 从上式可以看出, 在使 $\tanh \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\}$ 趋于 0 的区域, \mathbf{M} 趋于固定方向 $(0, 1, 0)$; 在使 $\tanh \left\{ 2\sqrt{-\alpha}G \left[x + \left(\mu + \frac{\delta}{2\mu} \right) t \right] \right\}$ 趋于 ± 1 的区域, \mathbf{M} 趋于固定方向 $(0, 0, \pm 1)$. 因此, 该解对应的自旋有两个自旋畴, 如图 6(c) 所示.

最后指出, 在本文得到的所有解中, 参数 μ 的取值可以为负, 这意味着在我们讨论的系统中, 允许 SOC 效应为负. 特别地, 图 6 中选取了参数 $\mu = -1$. 在目前的 SOC 玻色气系统的实验中, SOC 效应通常是正的. 在拓扑绝缘体的研究中, 已经发现多种材料的等效 SOC 效应是负的^[58–60], 是否可以在超冷玻色气系统中实现负的 SOC 效应, 还有待于理论和实验上的进一步探索.

4 结论

本文讨论了具有 SOC 的二分量 BEC 系统的精确求解, 给出了可积约化形式和几类不同的孤立波解. 这些结果表明, 在具有 SOC 的二分量 BEC 系统中, 可以存在非常丰富的孤子态. 在不同的孤子态对应的凝聚体中, SOC 起到的调控作用不尽相同. SOC 既可以导致条纹孤子的产生, 也可以激发出经典的非条纹孤子. 进一步地, SOC 对系统的量子磁化行为有显著影响. 由于在实验上已有多种方法观测 BEC 系统密度分布的孤子态、磁孤子态和自旋畴, 本文的结果为相应实验提供了更多可能的选择.

参考文献

- [1] Pitaevskii L, Stringari S 2016 *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity* (Oxford: Oxford University Press)
- [2] Proukakis N P, Snoke D W, Littlewood P B 2017 *Universal Themes of Bose-Einstein Condensation* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Zhai H 2020 *Ultracold Atomic Physics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253
- [5] Stamper-Kurn D M, Ueda M 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1191
- [6] Liu W M, Kengne E 2019 *Schrödinger Equations in Nonlinear Systems* (Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd)
- [7] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [8] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [9] Wang P, Yu Z Q, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [10] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [11] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [12] Zhang Y P, Mossman M E, Busch T, Engels P, Zhang C W 2016 *Front. Phys.* **11** 118103
- [13] Li J, Liu W M 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 110302 (in Chinese) [李吉, 刘伍明 2018 物理学报 **67** 110302]
- [14] Zhang S C, Jo G B 2019 *J. Phys. Chem. Solids* **128** 75
- [15] Wang L, Liu J S, Li J, Zhou X L, Chen X R, Liu C F, Liu W M 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010303 (in Chinese) [王力, 刘静思, 李吉, 周晓林, 陈向荣, 刘超飞, 刘伍明 2020 物理学报 **69** 010303]
- [16] Shi T T, Wang L J, Wang J K, Zhang W 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 016701 (in Chinese) [施婷婷, 汪六九, 王璟琨, 张威 2020 物理学报 **69** 016701]
- [17] Achilleos V, Frantzeskakis D J, Kevrekidis P G, Pelinovsky D E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 264101
- [18] Achilleos V, Stockhofe J, Frantzeskakis D J, Kevrekidis P G, Schmelcher P 2013 *EPL* **103** 20002
- [19] Lobanov V E, Kartashov Y V, Konotop V V 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 180403
- [20] Li Y Y, Luo Z H, Liu Y, Chen Z P, Huang C Q, Fu S H, Tan

- H S, Malomed B A 2017 *New. J. Phys.* **19** 113043
- [21] Kartashov Y V, Konotop V V 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 190401
- [22] Sakaguchi H, Malomed B A 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013607
- [23] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [24] Bhuvaneswari S, Nithyanandan K, Muruganandam P 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 025008
- [25] Xu X Q, Han J H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 200401
- [26] Radić J, Sedrakyan T A, Spielman I B, Galitski V 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063604
- [27] Li J R, Lee J, Huang W, Burchesky S, Shteynas B, Top F Ç, Jamison A O, Ketterle W 2017 *Nature* **543** 91
- [28] Léonard J, Morales A, Zupancic P, Esslinger T, Donner T 2017 *Nature* **543** 87
- [29] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Carr L D, Castin Y, Salomo C 2002 *Science* **296** 1290
- [30] Nguyen J H V, Luo D, Hulet R G 2017 *Science* **356** 422
- [31] Kengne E, Liu W M, Malomed B A 2021 *Phys. Rep.* **899** 1
- [32] Xu Y, Zhang Y P, Wu B 2013 *Phys. Rev. A* **87** 013614
- [33] Kartashov Y V, Konotop V V, Abdullaev F Kh 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 060402
- [34] Sakaguchi H, Li B, Malomed B A 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032920
- [35] Cao S, Shan C J, Zhang D W, Qin X Z, Xu J 2015 *J. Opt. Soc. Am. B* **32** 201
- [36] Qu C L, Pitaevskii L P, Stringari S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 160402
- [37] Chiquillo E 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013614
- [38] Farolfi A, Trypogeorgos D, Mordini C, Lamporesi G, Ferrari G 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 030401
- [39] Chai X, Lao D, Fujimoto K, Raman C 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** L012003
- [40] Liu Y K, Yang S J 2014 *EPL* **108** 30004
- [41] Gautam S, Adhikari S K 2021 *Braz. J. Phys.* **51** 298
- [42] He J T, Fang P P, Lin J 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 020301
- [43] Yang Y, Gao P, Wu Z, Zhao L C, Yang Z Y 2021 *Annals of Physics* **431** 168562
- [44] Yang Y, Gao P, Zhao L C, Yang Z Y 2022 *Front. Phys.* **17** 32503
- [45] De S, Campbell D L, Price R M, Putra A, Anderson B M, Spielman I B 2014 *Phys. Rev. A* **89** 033631
- [46] Sakaguchi H, Malomed B A 2019 *Symmetry* **11** 388
- [47] Zakharov V E, Schulman E I 1982 *Phys. D* **4** 270
- [48] Manakov S V 1973 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65** 1392
- [49] Yang J K 2010 *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems* (Philadelphia: SIAM) pp79–118
- [50] Guo B L, Ling L M 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 110202
- [51] Qin Y H, Zhao L C, Ling L 2019 *Phys. Rev. E* **100** 022212
- [52] Qin Y H, Wu Y, Zhao L C, Yang Z Y 2020 *Chin. Phys. B* **29** 020303
- [53] Tian H Y, Tian B, Yuan Y Q, Zhang C R 2021 *Phys. Scr.* **96** 045213
- [54] Radhakrishnan R, Lakshmanan M 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 2683
- [55] Lan Y, Zhao L C, Luo X W 2019 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **70** 334
- [56] Ohta Y, Wang D S, Yang J K 2011 *Stud. Appl. Math.* **127** 345
- [57] Yan C T 1996 *Phys. Lett. A* **224** 77
- [58] Punya A, Lambrecht W R L 2012 *Phys. Rev. B* **85** 195147
- [59] Sheng X L, Wang Z J, Yu R, Weng H M, Fang Z, Dai X 2014 *Phys. Rev. B* **90** 245308
- [60] Łepkowski S P, Bardyszewski W 2018 *Sci. Rep.* **8** 15403

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

Soliton solutions of the spin-orbit coupled binary Bose-Einstein condensate system*

Li Xin-Yue¹⁾ Qi Juan-Juan¹⁾ Zhao Dun^{1)†} Liu Wu-Ming^{2)‡}

1) (*School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China*)

2) (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

(Received 5 December 2022; revised manuscript received 26 December 2022)

Abstract

In a quantum system with spin, spin-orbit coupling is manifested by linking the spin angular momentum of a particle with its orbital angular momentum, which leads to many exotic phenomena. The experimental realization of synthetic spin-orbit coupling effects in ultra-cold atomic systems provides an entirely new platform for exploring quantum simulations. In a spinor Bose-Einstein condensate, the spin-orbit coupling can change the properties of the system significantly, which offers an excellent opportunity to investigate the influence of spin-orbit coupling on the quantum state at the macroscopic level. As typical states of macroscopic quantum effects, solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates can be manipulated by spin-orbit coupling directly, which makes the study on spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates become one of the hottest topics in the research of ultracold atomic physics in recent years. This paper investigates exact vector soliton solutions of the Gross-Pitaevskii equation for the one-dimensional spin-orbit coupled binary Bose-Einstein condensates, which has four parameters μ , δ , α and β , where μ denotes the strength of the spin-orbit coupling, δ is the detuning parameter, α and β are the parameters of the self- and cross-interaction, respectively. For the case $\beta = \alpha$, by a direct ansatz, two kinds of stripe solitons, namely, the oscillating dark-dark solitons are obtained; meanwhile, a transformation is presented such that from the solutions of the integrable Manakov system, one can get soliton solutions for the spin-orbit coupled Gross-Pitaevskii equation. For the case $\beta = 3\alpha$, a bright-W type soliton for $\alpha > 0$ and a kink-antikink type soliton for $\alpha < 0$ are presented. It is found that the relation between μ and δ can affect the states of the solitons. Based on these solutions, the corresponding dynamics and the impact of the spin-orbit coupling effects on the quantum magnetization and spin-polarized domains are discussed. Our results show that spin-orbit coupling can result in rich kinds of soliton states in the two-component Bose gases, including the stripe solitons as well as the classical non-stripe solitons, and various kinds of multi-solitons. Furthermore, spin-orbit coupling has a remarkable influence on the behaviors of quantum magnetization. In the experiments of Bose-Einstein condensates, there have been many different methods to observe the soliton states of the population distribution, the magnetic solitons, and the spin domains, so our results provide some possible options for the related experiments.

Keywords: Bose-Einstein condensate, spin-orbit coupling, Gross-Pitaevskii equation, soliton

PACS: 67.85.Hj, 03.75.Lm, 03.75.Kk

DOI: 10.7498/aps.72.20222319

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12075102, 61835013, 12234012), the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100), and the Space Application System of China Manned Space Program.

† Corresponding author. E-mail: zhaod@lzu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn



自旋-轨道耦合二分量玻色-爱因斯坦凝聚系统的孤子解

李新月 祁娟娟 赵敦 刘伍明

Soliton solutions of the spin-orbit coupled binary Bose-Einstein condensate system

Li Xin-Yue Qi Juan-Juan Zhao Dun Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 106701 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222319

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222319>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2022, 71(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

光晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性能谱特性

Nonlinear energy band structure of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in optical lattice

物理学报. 2021, 70(20): 200302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210705>

玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬灭孤子与冲击波

Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2021, 70(18): 180303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210564>