

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

双孤子非线性干涉中的狄拉克磁单极势*

孙斌¹⁾ 赵立臣²⁾ 刘杰^{1)†}

1) (中国工程物理研究院研究生院, 北京 100193)

2) (西北大学物理学院, 西安 710127)

(2022年12月20日收到; 2023年1月31日收到修改稿)

本文深入研究了孤子干涉过程中的相位演化特性及其背后的拓扑矢势. 基于一维非线性薛定谔方程的双孤子解, 发现波函数密度零点广泛存在于拓展的复平面内, 并且每一个密度零点对应狄拉克磁单极的矢势场. 矢势场是由周期排布的具有相反磁荷的狄拉克磁单极对组成. 通过观察磁单极子的运动, 可以方便地理解干涉过程中的相位演化特征. 特别发现, 一对正负磁单极对在实轴上的碰撞恰好对应波函数相位在节点处的 π 跃变. 此外, 还对比讨论了线性波包干涉动力学中的狄拉克磁单极. 结果表明狄拉克磁单极势广泛存在于波场的干涉现象之中, 并且磁单极在拓展的复平面内分布特征可用于区分线性干涉和非线性干涉过程背后的拓扑性质.

关键词: 磁单极, 非线性, 干涉, 孤子

PACS: 05.45.-a, 14.80.Hv, 42.50.Md, 85.35.Ds

DOI: 10.7498/aps.72.20222416

1 引言

磁单极是一种假想的仅具有南极或北极单个磁极的粒子. 有关磁单极存在的猜想可以从麦克斯韦方程组电与磁的对称性中天然产生. 1931年, 狄拉克在文献 [1] 中考虑一个最一般性的波函数. 显然波函数的相位在某点的具体取值并无实际物理意义, 重要的是两点间的相位差. 由于波函数的连续性要求, 充分近邻的两点间的相位差是确定的, 但是有限距离间隔两点间的相位差却有可能依赖于连接两点的路径. 这种路径依赖的相对相位将使得沿某一闭合环路产生的总的相位变化可以不为零, 被称为不可积相因子. 这种不可积相位是由波函数中存在的节点线 (nodal line, 即波函数为零的点对应的线) 引起的. 考虑自由粒子波函数, 通过定义有效电磁场并考虑到两个相反方向的闭合曲线对应的相位变化总相反, 狄拉克进一步预言节线

的端点就是一个具有量子化荷的磁单极. 位于原点强度为 μ 磁单极对应的矢势和磁场强度可分别写为 $\mathbf{A}_{3D} = \frac{\mu}{r} \frac{x\hat{e}_y - y\hat{e}_x}{r - z}$, $\mathbf{B}_{3D} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$ (其中 $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, $r = |\mathbf{r}|$). 从而沿某一闭合曲线所产生的相位变化为闭合环路所包绕节线的贡献和节线端点处磁单极子贡献两部分之和.

自此数十年来, 无数理论探索与实验搜寻围绕磁单极展开 [2-4]. 然而, 寻找磁单极的实验尝试迄今为止仍未获成功. 1980年, Berry^[5] 通过利用 Dirac 不可积相位因子的方法得到了描述 Aharonov-Bohm 效应 [6] 的严格波函数. 1984年, Berry^[7] 研究多参数哈密顿本征值简并问题并在简并点附近观察波函数相位的变化, 从而指出系统哈密顿参数空间中能级简并点处存在磁单极, 揭示了参数空间中绝热条件下不可积相位跟磁单极的关系. 近年来, 磁单极的概念从粒子物理扩展到现代物理学的其他方面 [8], 与磁单极数学结构相类似的现象在各

* 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院联合基金 (批准号: U1930403) 和国家自然科学基金 (批准号: 12022513) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jliu@gscaep.ac.cn

类物理系统中普遍可见, 如自旋冰^[9]及 skyrmion 晶格^[10]等凝聚态系统. 2014 年有研究声明在合成磁场中旋量玻色-爱因斯坦凝聚态中发现磁单极的存在^[11]. 对各种参数空间中的虚拟磁单极的研究一直非常活跃^[12], 相关研究结果将对物理学理论与实验发展均起到深远影响.

近期研究发现狄拉克磁单极场可以在一维波函数实空间延拓的二维复平面上存在 (对应波函数零点位置), 并由此解释了暗孤子空间相位跃变的拓扑起源^[13]. 考虑到空间相位梯度在定义矢势场所起的作用, 预计这种二维复平面上存在的狄拉克磁单极具有很好的广泛性. 对于单个亮孤子或高斯波包, 它们的相位一般具有平庸的相位梯度, 因此它们背后不具有磁单极场. 但是波包干涉过程中存在着丰富的相位演化和分布特征, 预期干涉现象中可能存在着狄拉克磁单极场. 本文将推广研究非线性双孤子的干涉现象中的磁单极位置分布的动力学演化及其导致相位跃变. 作为对比, 研究了高斯波包的线性干涉中的狄拉克磁单极问题. 结果表明磁单极场对于相似的线性干涉和非线性干涉图样具有显著不同的结构.

2 非线性双孤子干涉

2.1 线性波包干涉

首先考虑线性干涉情形. 动量表象下, xz 平面自由电子高斯波包满足含时薛定谔方程^[14]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_k(t)\rangle = \frac{1}{2}\hat{p}^2|\psi_k(t)\rangle. \quad (1)$$

在位置表象中写作

$$\langle \mathbf{r}|\psi_k(t)\rangle = \frac{S}{1+it/a^2} e^{-\frac{r^2-2ia^2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+ia^2k^2t}{2a^2(1+it/a^2)}}, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + z\hat{e}_z$, S 为归一化系数, \mathbf{k} 为波包质心动量, a 决定波包宽度. 为研究线性波包的干涉现象, 考虑 $t = 0$ 时刻位于 $x = 0$ 处具有相反 x 方向动量 $\pm k\hat{e}_x$ 的两个完全相同的高斯波包, 分别为

$$\Psi_{\pm k}(x, z, t) = \frac{S}{1+it/a^2} e^{-\frac{x^2+z^2\pm 2ia^2kx+ia^2k^2t}{2a^2(1+it/a^2)}}. \quad (3)$$

两个高斯波包的叠加态为 $\Psi(x, z, t) = \Psi_k(x, z, t) + \Psi_{-k}(x, z, t)$, 随着时间演化两个波包先是接近而后远离, 在这个过程中产生干涉现象, 如图 1 所示.

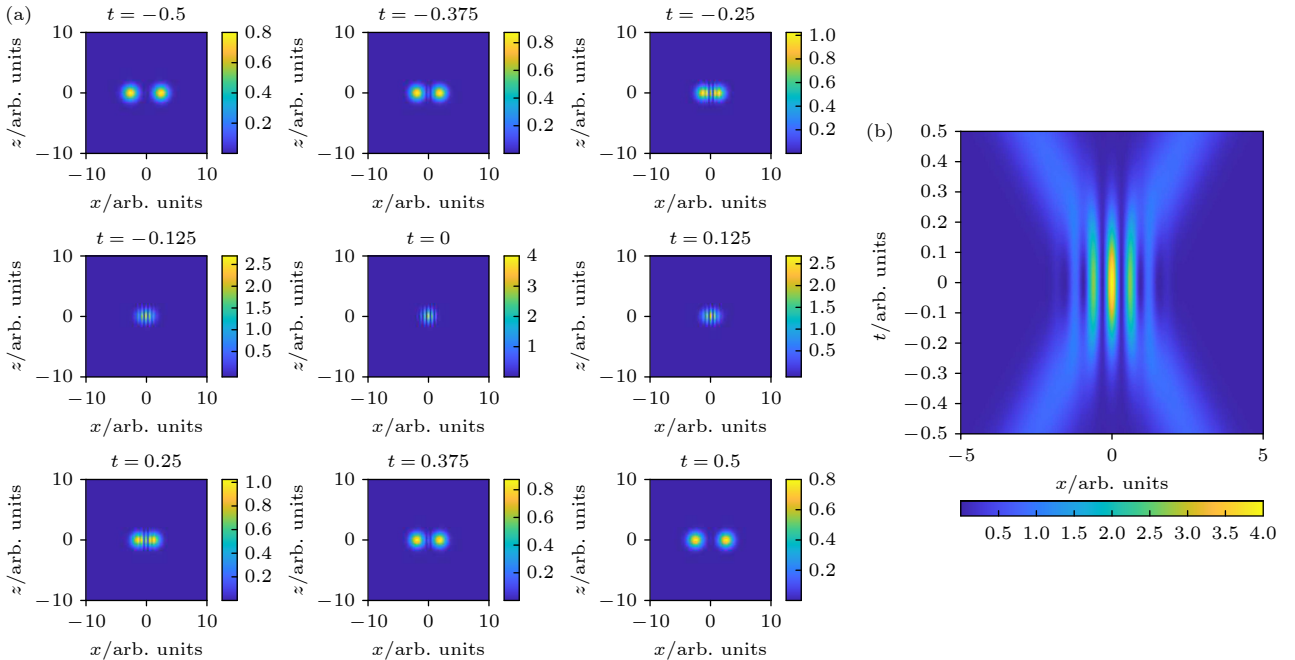


图 1 坐标空间中高斯波包线性干涉图样 (a) xz 空间两个波包干涉随时间演化; (b) 波包中心 ($z = 0$) 处波函数密度对时间演化. 宽度为 a 、振幅为 S , $t = 0$ 时刻位于 $(0, 0)$ 处具有相反 x 方向动量 $\pm k\hat{e}_x$ 的高斯波包. 实际参数 $S = a = 1, k = 5$

Fig. 1. Linear interference of two Gaussian wave packets in position space: (a) Time evolution of Gaussian wave packet interference in xz -space; (b) density plot of wave packet center ($z = 0$) vs. time t . The wave packets of width a and amplitude S start at $(0, 0)$ with opposite momentum $\pm k\hat{e}_x$ in x -direction. The actual parameters are $S = a = 1, k = 5$.

该线性波包在演化过程中具有微弱的扩散效应, 但当两个波包以较大的相对速度碰撞干涉时, 仍可以看到可见度较高的干涉条纹. 干涉过程天然涉及到相位的演化, 且相位在干涉过程通常具有非平庸的梯度分布. 这些特征为研究其背后的磁单极提供了诸多可能.

2.2 非线性孤子干涉

不同于前文所述的高斯波包, 孤子则由于非线性和色散效应的平衡而具有保持其波包形状的性质. 1965年, Zabusky 和 Kruskal^[15] 引入孤子概念以来, 对孤子动力学的研究渗透到流体动力学^[15]、量子场论^[16]、等离子物理^[17]、非线性光学^[18]、玻色-爱因斯坦凝聚^[19] 等多个领域. 孤子的弹性碰撞性质为人所熟知^[20], 然而碰撞过程中的相位变化研究较少^[21]. 我们通过非线性薛定谔方程的一组双孤子解研究孤子碰撞过程中的波函数相位演化. 考虑约化非线性薛定谔方程^[22,23]:

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + 2g |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) = 0, \quad (4)$$

其具有一个双孤子解:

$$\psi = \frac{4F_1}{\sqrt{gF_2}}, \quad (5)$$

其中

$$F_1 = \{ia_1 [(b_1 - b_2)^2 + a_1^2 - a_2^2] \cosh(2X_2) + 2a_1 a_2 (b_2 - b_1) \sinh(2X_2)\} e^{2iY_1} + \{ia_2 [(b_1 - b_2)^2 + a_2^2 - a_1^2] \cosh(2X_1) + 2a_1 a_2 (b_1 - b_2) \sinh(2X_1)\} e^{2iY_2}, \quad (5a)$$

$$F_2 = [(a_1 + a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2] \cosh A_1 + [(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2] \cosh A_2 - 4a_1 a_2 \cos A_3, \quad (5b)$$

$$X_1 = a_1(x - 4b_1 t) + c_1, \quad (5c)$$

$$Y_1 = b_1 x + 2(a_1^2 - b_1^2)t + d_1, \quad (5d)$$

$$X_2 = a_2(x - 4b_2 t) + c_2, \quad (5e)$$

$$Y_2 = b_2 x + 2(a_2^2 - b_2^2)t + d_2, \quad (5f)$$

$$A_1 = 2(a_1 - a_2)x - 8(a_1 b_1 - a_2 b_2)t + 2(c_1 - c_2), \quad (5g)$$

$$A_2 = 2(a_1 + a_2)x - 8(a_1 b_1 + a_2 b_2)t + 2(c_1 + c_2), \quad (5h)$$

$$A_3 = 2(b_1 - b_2)x + 4(a_1^2 - a_2^2 + b_2^2 - b_1^2)t + 2(d_1 - d_2). \quad (5i)$$

参数 g 为非线性参数, 在玻色-爱因斯坦凝聚态系统中 g 的取值与体系的散射长度相关. 而参数

a_i, b_i, c_i, d_i 分别决定的孤子峰值强度、运动速度、初始位以及相对相位 ($i = 1, 2$). 注意, 这两个孤子之间的干涉是一个典型的非线性干涉过程, 由于双孤子解是两个单孤子的非线性叠加而来的. 为了更清楚地展示空间中的干涉图样, 对此双孤子解加以修饰, 在 z 方向添加一个波包 (以便更好地与图 1 中波包干涉图样进行对比):

$$\Psi(x, z, t) = \psi(x, t) \times \frac{S}{\sqrt{1 + it/a^2}} e^{-\frac{z^2}{2a^2(1 + it/a^2)}}. \quad (6)$$

从图 1 和图 2 可得, 线性波包干涉与双孤子非线性干涉情形下均存在明显的干涉条纹. 一般孤子干涉条纹的可见度比高斯波包线性干涉的可见度高. 对于相关参数下的图 1 和图 2 情形, 二者干涉过程的密度图样非常相似, 没有显著区别. 后文将引入磁单极的概念, 揭示两种干涉现象背后所隐藏的拓扑性质, 进而对线性与非线性情形加以区分.

3 波包干涉中的狄拉克磁单极势

3.1 理论框架

狄拉克^[1] 通过不可积相因子的空间梯度函数构造了矢势 $\mathbf{A} = \frac{\hbar c}{e} \boldsymbol{\kappa}$, 进而揭示了节线 (密度为零) 的端点上存在磁单极. 因为不可积性的要求即 $\partial \kappa_x / \partial y \neq \partial \kappa_y / \partial x$, 狄拉克的磁单极理论显然无法直接应用到一维波函数 $\psi(x) = \sqrt{n(x)} e^{i\phi(x)}$ 中. 前文所述的波包干涉都是在 x 方向进行. 三维复函数的密度零点一般对应节线 (狄拉克弦), 这是因为波函数密度零点要求实部和虚部均等于零, 因而对应着三维空间的两个曲面的交线. 而一维波函数密度零点则一般存在于二维复平面上的某些点, 即 $n(x) = 0$ 的根一般是复数根 $Z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$. 这意味着二维复平面上的密度零点是两条曲线的交点. 受狄拉克关于实空间波函数零点和磁单极场的关系启发, 本工作尝试在复空间观察密度零点和相位因子梯度的关系 $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{1}{n(x)} \left[- \int \frac{\partial n(x)}{\partial t} dx \right]$ (该关系对线性和非线性薛定谔方程均成立). 受李-杨零点^[24] 中虚磁场的启发, 考虑到一维波函数密度零点的确通常存在于复平面上, 将一维波函数的相位因子和波函数密度定义域分别由实轴 $x \in \mathbb{R}$ 延拓到复平面 $Z = x + iy \in \mathbb{C}$ 上. 值得注意的是该做法区别于直接将波函数 $\psi(x)$ 复化的结果, 因为波函

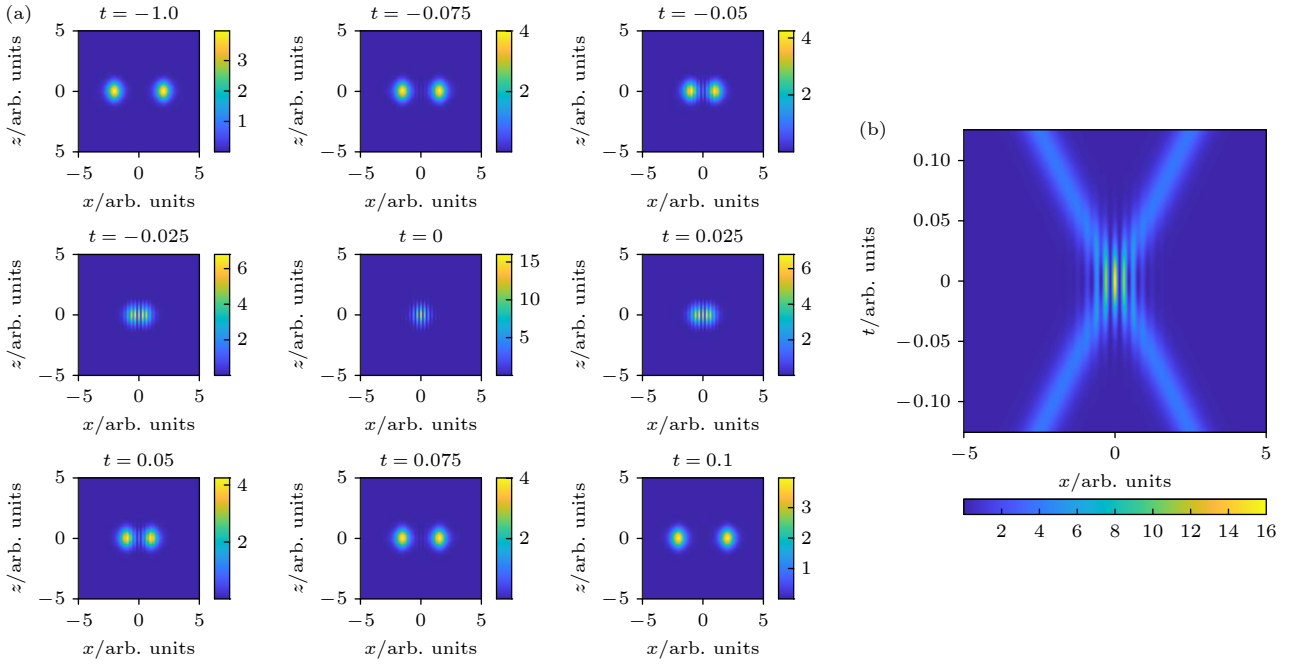


图2 坐标空间中孤子非线性干涉图样 (a) xz 空间两个孤子干涉随时间演化; (b) 孤子中心 ($z = 0$) 处波函数密度对时间演化. 两个具有相反方向速度 b_1, b_2 的完全相同的孤子. 实际参数为 $a_1 = 1, b_1 = 5, g = 1, a_2 = 1, b_2 = -5, c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0$, 及 $S = 1, a = 1$

Fig. 2. Nonlinear Interference of two solitons in position space: (a) Time evolution of soliton interference in xz -space; (b) density plot of soliton center ($z = 0$) vs. time t . Two identical solitons with opposite velocity b_1, b_2 . The actual parameters are $a_1 = 1, b_1 = 5, g = 1, a_2 = 1, b_2 = -5, c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0$, and $S = 1, a = 1$.

数的直接复化所给出的密度和相位不同于分别延拓的结果. 在不改变密度和相位分布形式的前提下, 在复空间分别观察其分布特征, 以期利用复空间的拓扑性质解释或理解实空间的相位特征.

复空间的 N 个密度零点对应相位梯度场的 N 个奇点, 该特点为揭示拓扑矢势提供了可能. 此时的相位 $\phi(x)$ 将变成复变函数 $\phi(\mathcal{Z})$, 可以按照狄拉克的方式定义复的矢势^[25]:

$$\mathcal{A}_c = \frac{\partial\phi(\mathcal{Z})}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial\phi(\mathcal{Z})}{\partial y} \hat{e}_y = \frac{\partial\phi(\mathcal{Z})}{\partial\mathcal{Z}} (\hat{e}_x + i\hat{e}_y). \quad (7)$$

构成复平面上的二维矢量场. 计算分析表明这些互为复共轭对出现的根都是函数 $F(\mathcal{Z}) = \frac{\partial\phi(\mathcal{Z})}{\partial\mathcal{Z}}$ 的一阶奇点. 由 Mittag-Leffler 定理^[26] 可得

$$F(\mathcal{Z}) = F(0) + \sum_N \text{Res}(F(\mathcal{Z}_N)) \left(\frac{1}{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_N} + \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \right). \quad (8)$$

由于关注的是矢势分布, 可忽略

$$F(0) + \sum_N \frac{\text{Res}(F(\mathcal{Z}_N))}{\mathcal{Z}_N}, \quad (9)$$

此时有

$$\mathcal{A}_c = \sum_N \frac{\mu_N}{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_N} (\hat{e}_x + i\hat{e}_y), \quad (10)$$

其中 $\mu_N = \text{Res}(F(\mathcal{Z}_N))$ 是相应奇点的留数.

由于本文是在复平面观察相位的特征, 因此主要关注其实数部分 $\mathbf{A} = \text{Re}[\mathcal{A}_c]$. 此时的矢势 \mathbf{A} 就分布在 xy 平面, 其拓扑奇点在 $\mathbf{r}_N = x_N \hat{e}_x + y_N \hat{e}_y$, 与复空间的 \mathcal{Z}_N 一一对应. 由此可得 xy 平面上的矢势为

$$\mathbf{A} = \sum_N \frac{\mu_N [(x - x_N) \hat{e}_y - (y - y_N) \hat{e}_x]}{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2}. \quad (11)$$

该矢势的确具有 Wess-Zumino 拓扑项的形式, 该拓扑项已被用来成功描述 Aharonov-Bohm 效应^[27]. 所考察的一维波函数去除平庸相位后的相对相位变化, 即可由矢势 \mathbf{A} 沿实轴的积分得到:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{A}(x, y=0) \cdot \hat{e}_x dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_N \frac{\mu_N y_N}{(x - x_N)^2 + y_N^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

或者可以表示为

$$\frac{d\phi}{dx} = \sum_N \frac{\mu_N y_N}{(x - x_N)^2 + y_N^2}. \quad (13)$$

更令人惊讶的是, 这里的 μ_N 对于任意互为共轭出现的根只有两种取值 $\pm\Omega/(2\pi)$, 且一对共轭复密度零点具有相反的值. 该特点已经被诸多非线性波和线性波的分析结果所支持. 但尚未给出统一的形式证明. 若假设该特点具有广泛性, 可以基于一对共轭复根在某些条件下可以合并成一个实根 (该实根处将对应实空间的一个密度零点), 从而给出 Ω 的可能取值. 作为一个例子, 考虑一对共轭复根, 对应于 xy 平面上矢势 \mathbf{A} 的拓扑奇点, 记为 $(x_N, \pm|y_0|)$. 这一对共轭复根合并为实根过程所对应的矢势 \mathbf{A} 可以被下面的极限过程所描述:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow b_c} \mathbf{A} &= \lim_{|y_0| \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Omega[(x-x_N)\mathbf{e}_y + |y_0|\mathbf{e}_x]}{2\pi[(x-x_N)^2 + |y_0|^2]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\Omega[(x-x_N)\mathbf{e}_y - |y_0|\mathbf{e}_x]}{2\pi[(x-x_N)^2 + |y_0|^2]} \right\} \\ &= \Omega\delta[x-x_N]\mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (14)$$

假定极限 $|y_0| \rightarrow 0$ 可以被波函数中某参数 b 趋于某特定值 b_c 实现 (例如 b 可以是暗孤子相对于其背景波的速度^[13] 或怪波的演化时间^[25]). 在这两个共轭复根合并的位置 x_N 的相位变化为

$$\Delta\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_x dx = \Omega. \quad (15)$$

穿越该一维实空间密度零点的相位变化只能是 $\Delta\phi = \pm\pi$, 意味着 $\mu_N = \pm 1/2$.

任意一个奇点的矢势场为

$$\pm \frac{(x-x_N)\hat{\mathbf{e}}_y - (y-y_N)\hat{\mathbf{e}}_x}{2(x-x_N)^2 + (y-y_N)^2}, \quad (16)$$

这恰好对应狄拉克磁单极的矢势 \mathbf{A}_{3D} 的二维形式 ($z=0$). 再者, 这里二维复平面的密度零点可视为带端点的狄拉克弦的二维退化. 由矢势可计算得到相应的磁场强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_z \sum_N 2\pi\mu_N \delta(x-x_N, y-y_N), \quad (17)$$

即每一个点状磁场的通量为 $\pm\pi$. 因此点状磁场很好地保持了狄拉克磁单极磁通的量子化特征. 基于这三方面的原因, 将矢势 \mathbf{A} 视为二维狄拉克磁单极势. 由此在互为共轭对出现的复零点上总可以按照狄拉克的方式揭示出狄拉克磁单极场的存在. 下文将分别分析线性波包干涉与非线性双孤子干涉情形中的狄拉克磁单极分布、对应矢势与相位变化的联系.

3.2 线性波包干涉中的狄拉克磁单极势

本文只考虑波包中心位置, 即实轴 $z=0$ 处波函数, 此时波函数密度仅仅是 x, t 的函数,

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{A}{1+it/a^2} e^{-\frac{x^2+ia^2k^2t}{2a^2(1+it/a^2)}} \\ &\quad \times \left(e^{\frac{2ia^2kx}{2a^2(1+it/a^2)}} + e^{-\frac{2ia^2kx}{2a^2(1+it/a^2)}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

将 t 视作参数, 在给定时刻 t , 线性干涉情形中波函数的密度零点可以解析给出, 存在两类解 z_{\pm} 分别对应于 $\mu = \pm\frac{1}{2}$ 的磁单极:

$$z_{\pm} = \frac{\pi(a^2 \pm it)}{2a^2k} (2n+1), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

考察波函数相对相位变化, 即 (18) 式中乘号后加和项, 相位导数可利用 (12) 式将给定 t 时刻 $d\phi/dx$ 重构出来, 如图 3 所示, 将波函数密度零点作为磁单极根据 (12) 式可以成功重构出波函数相位导数, 揭示了波函数密度零点与相位之间的深刻联系.

高斯波包线性干涉过程中, 磁单极在复平面上的排布呈现为两条 X 交叉的直线, 两条直线上的磁单极分别对应为 $\mu = \pm\frac{1}{2}$ 类型, 并且在随时间演化过程中, 从 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$, X 首先表现出向实轴靠近, 在 $t=0$ 时刻两条直线重合, 所有复数解变为纯实数解, 而后又远离实轴. 这些磁单极的运动见图 4.

特别地, 当两条线上的磁单极完全碰撞的时刻, 无法直接看到磁单极分布了, 但相位分布可以通过磁单极场的极限分析获得. 极限分析得到的相位分布符合通过波函数给出的节点分布.

3.3 非线性双孤子干涉中的狄拉克磁单极势

对于双孤子非线性干涉情形, 无法解析地给出波函数密度零点, 只能通过数值求解并计算其留数进行分类. 同样可以重构出波函数在给定时刻 t 的相位演化, 与高斯波包情形相似, 利用波函数密度零点与 (12) 式同样可以重构出波函数相位导数, 见图 5.

非线性情形磁单极排布较为复杂, 除了与高斯波包中相似的 X 交叉外, 还存在两条平行于虚轴对应于孤子中心位置 $4b_i t$ 的直线 ($i=1, 2$). 虚轴方向的磁单极分布线是高斯波包线性干涉所不具有的, 尽管干涉的密度和相位分布非常相似. 这意味

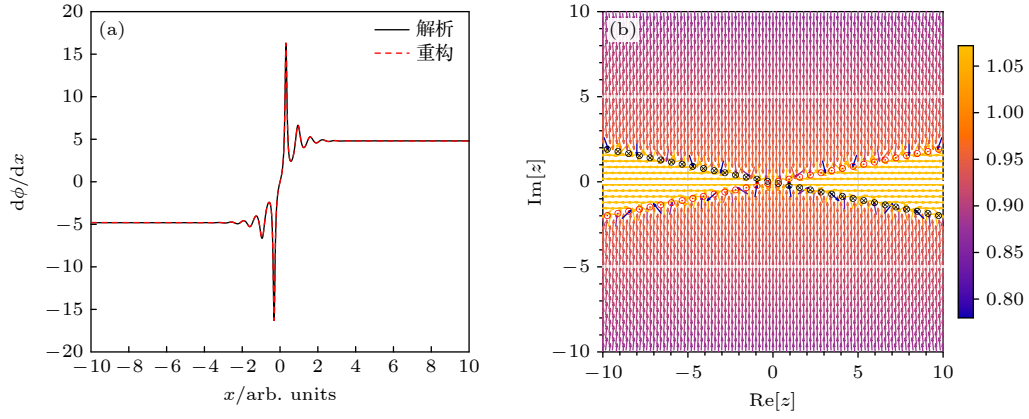


图3 $t = 0.2$ 时刻波函数相对相位导数 $d\phi/dx$ 重构、磁单极分布及产生的矢势 \mathbf{A} (a) $t = 0.2$ 时刻, 波函数相对相位导数 $d\phi/dx$ 解析解与利用磁单极重构解, 黑色实线为解析解, 红色虚线为磁单极重构解; (b) $t = 0.2$ 时刻复平面上磁单极分布及对应的矢势 \mathbf{A} , \odot, \otimes 分别表示 $\mu = \pm \frac{1}{2}$ 的两类磁单极, $\text{Re}[z], \text{Im}[z]$ 分别表示实部虚部. 实际参数同图1

Fig. 3. Derivative of relative phase function $d\phi/dx$, Dirac magnetic monopole distribution and corresponding vector potential \mathbf{A} at time $t = 0.2$: (a) Analytic solution and reconstruction using magnetic monopoles of phase function derivative $d\phi/dx$ at time $t = 0.2$, analytic solution(black solid line), construct using magnetic monopole(red dash line); (b) magnetic monopole distribution and corresponding vector potential \mathbf{A} on complex plane at time $t = 0.2$, \odot, \otimes denotes monopoles with $\mu = \pm \frac{1}{2}$ and $\text{Re}[z], \text{Im}[z]$ real part, imaginary part respectively. The actual parameters are same as Fig. 1.

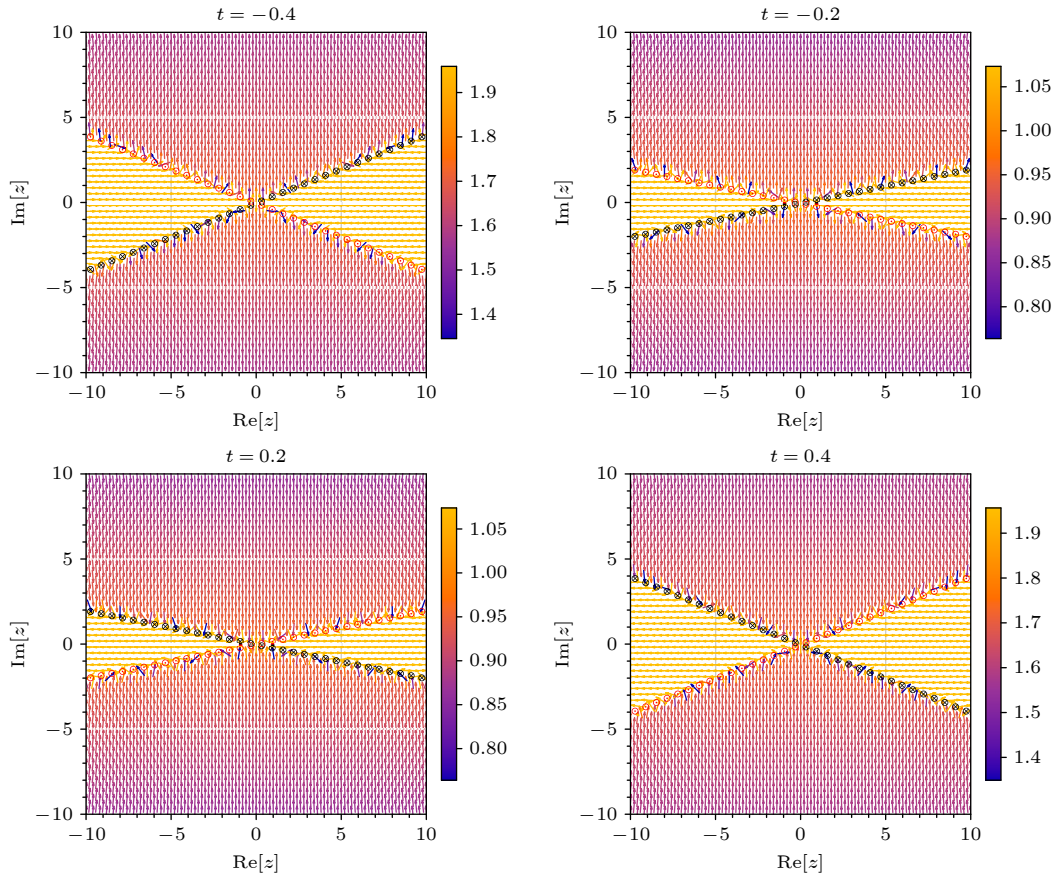


图4 复平面上磁单极分布及相应矢势 \mathbf{A} 随时间演化, \odot, \otimes 分别表示 $\mu = \pm \frac{1}{2}$ 的两类磁单极, $\text{Re}[\mathcal{Z}], \text{Im}[\mathcal{Z}]$ 分别表示实部虚部. 实际参数同图1

Fig. 4. Time evolution of Magnetic monopole distribution and corresponding vector potential \mathbf{A} on complex plane, \odot, \otimes denotes monopoles with $\mu = \pm \frac{1}{2}$ and $\text{Re}[\mathcal{Z}], \text{Im}[\mathcal{Z}]$ real part, imaginary part respectively. The actual parameters are same as Fig. 1.

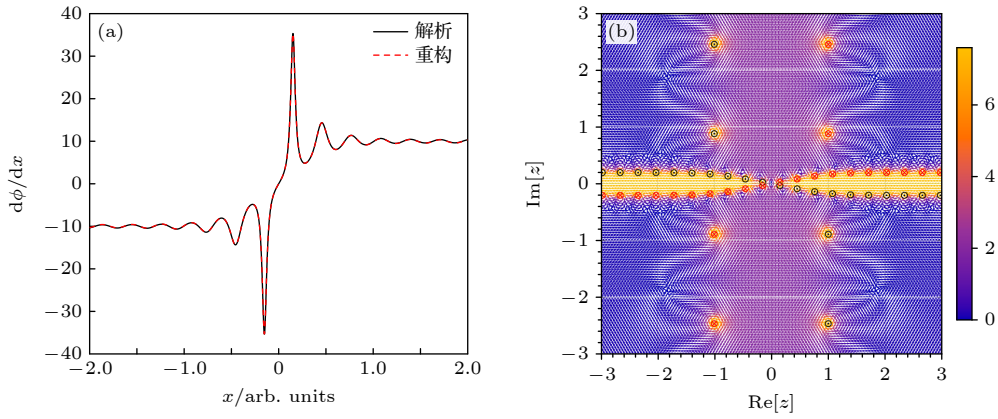


图 5 $t = 0.05$ 时刻波函数相对相位导数 $d\phi/dx$ 重构、磁单极分布及产生的矢势 \mathbf{A} (a) $t = 0.2$ 时刻, 波函数相对相位导数 $d\phi/dx$ 解析解与利用磁单极重构解, 黑色实线为解析解, 红色虚线为磁单极重构解; (b) $t = 0.2$ 时刻复平面上磁单极分布及对应的矢势 \mathbf{A} , \odot, \otimes 分别表示 $\mu = \pm \frac{1}{2}$ 的两类磁单极, $\text{Re}[z], \text{Im}[z]$ 分别表示实部虚部. 实际参数同图 2

Fig. 5. Derivative of relative phase function $d\phi/dx$, Dirac magnetic monopole distribution and corresponding vector potential \mathbf{A} at time $t = 0.05$: (a) Analytic solution and reconstruction using magnetic monopoles of phase function derivative $d\phi/dx$ at time $t = 0.2$, analytic solution (black solid line), construct using magnetic monopole (red dash line); (b) magnetic monopole distribution and corresponding vector potential \mathbf{A} on complex plane at time $t = 0.2$, \odot, \otimes denotes monopoles with $\mu = \pm \frac{1}{2}$ and $\text{Re}[z], \text{Im}[z]$ real part, imaginary part respectively. The actual parameters are same as Fig. 2.

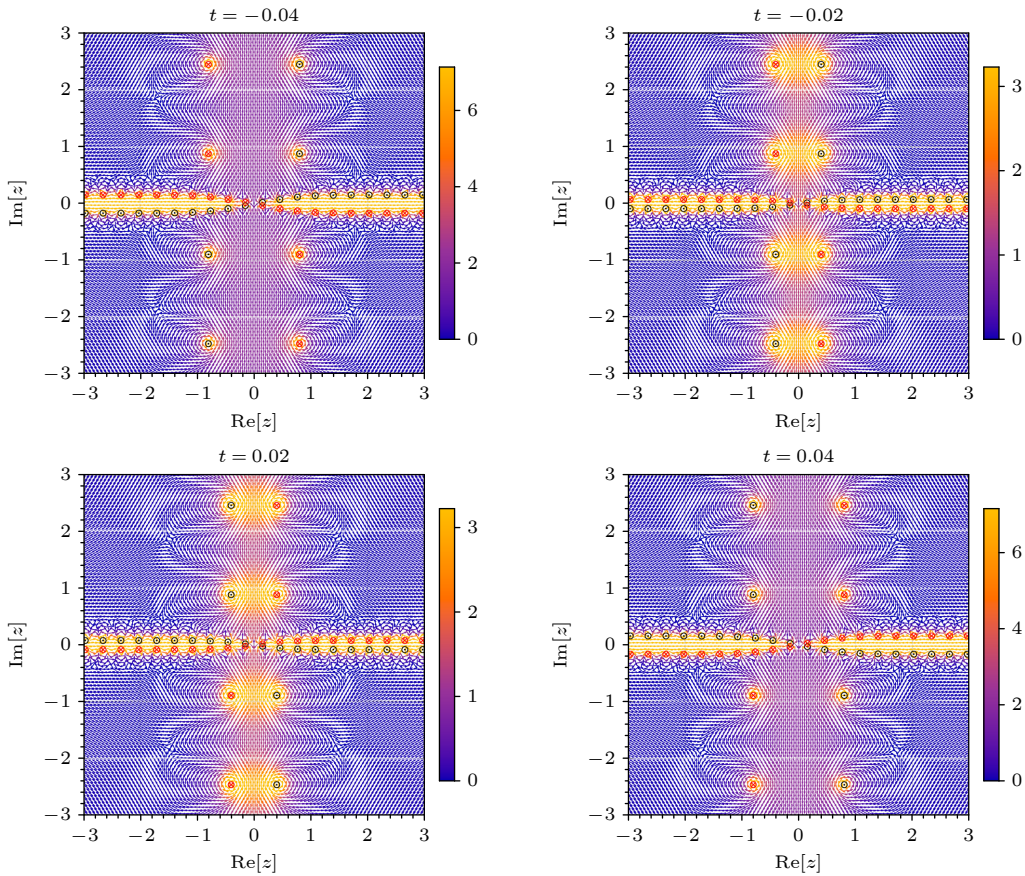


图 6 复平面上磁单极分布及相应矢势 \mathbf{A} 随时间演化. \odot, \otimes 分别表示 $\mu = \pm \frac{1}{2}$ 的两类磁单极, $\text{Re}[z], \text{Im}[z]$ 分别表示实部虚部. 实际参数同图 2

Fig. 6. Time evolution of magnetic monopole distribution and corresponding vector potential \mathbf{A} on complex plane, \odot, \otimes denotes monopoles with $\mu = \pm \frac{1}{2}$ and $\text{Re}[z], \text{Im}[z]$ real part, imaginary part respectively. The actual parameters are same as Fig. 2.

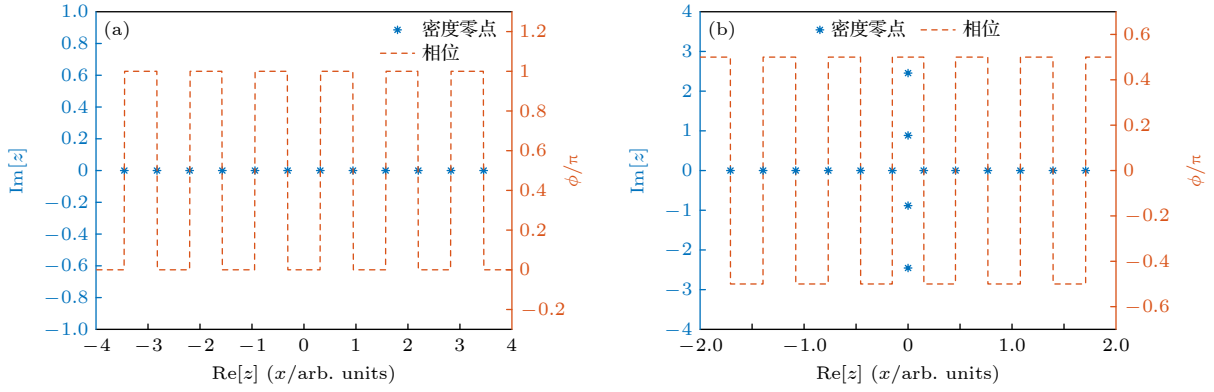


图7 完全碰撞时刻波函数相位 $\pm\pi$ 跃变与密度零点 (a) 高斯波包线性干涉 $t=0$ 时刻波函数相位与密度零点; (b) 双孤子非线性干涉 $t=0$ 时刻波函数相位与密度零点. 线性干涉与非线性干涉情形实际参数分别同图1和图2

Fig. 7. $\pm\pi$ jump of phase function and zeros of density at complete collision time ($t=0$): (a) Phase jump and density zeros of Gaussian wave packet linear interference at time $t=0$; (b) phase jump and density zeros of double soliton nonlinear interference at time $t=0$. The actual parameters for linear and nonlinear case are same as Fig. 1 and Fig. 2, respectively.

着非线性干涉和线性干涉在拓扑场分布上具有很大的差异. 孤子非线性干涉过程对应磁单极运动的过程见图6. 当孤子干涉出现最大可见度时, 所有相反磁荷成对碰撞, X 交叉线上的碰撞给出波函数实空间的节点分布. 但是虚轴方向两条线上的磁单极没有在实轴上碰撞, 因此相位分布上没能看到其贡献. 这些在复空间碰撞磁单极子的贡献可能跟非线性波的动能和非线性相互作用能交换量有关.

4 结果与讨论

研究两个高斯波包的线性干涉和双孤子的非线性干涉现象中的相位特性, 并揭示狄拉克磁单极广泛存在于干涉现象. 两种干涉现象都出现相似的交叉排布的狄拉克磁单极场. 而双孤子干涉过程中还存在对应于孤子中心位置 $x=4b_it$ ($i=1, 2$) 的两列垂直实轴分布的磁单极分布, 该特征是高斯波包线性干涉过程所不具有的. 考虑到孤子非线性叠加的振幅峰值可明显大于线性干涉所得的峰值, 预计这些额外的虚轴分布的磁单极跟孤子系统中动能和非线性相互作用能的转换存在一定的关联性.

特别地, 一对具有相反磁荷的磁单极在实轴上的碰撞总是融合为对应实零点, 该零点处恰好对应 $\pm\pi$ 的相位跃变. 如图7所示. $t=0$ 时刻, 高斯波包或孤子情形均达到完全碰撞, 部分密度零点融合为实零点, 利用(10)式, 可以解释完全碰撞 $t=0$ 时刻产生的 $\pm\pi$ 相位跃变. 假设存在一对共轭零点 $\alpha \pm i\beta$ 有 $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha \pm i\beta = \alpha$:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\mu\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \\ & = 2\pi\mu\delta(x-\alpha) = \pm\pi\delta(x-\alpha). \end{aligned} \quad (20)$$

因而波函数相位导数为

$$d\phi/dx = \sum_n (\pm)_n \pi \delta(x-a_n), \quad (21)$$

这对应于图7所示波函数相位在实零点处的 π 跃变. 从碰撞前后的磁单极分布特征, 可以看出 $\pm\pi \rightarrow \mp\pi$ 相位翻转也广泛存在于干涉现象中. 该相位翻转特征跟怪波的相位演化非常相似, 且都对应波场振幅的增大和衰减过程的转变^[25]. 类似的研究可以推广到其他物理系统中的局域波或它们的干涉过程^[28-31].

复平面上磁单极的运动可能提供了一种崭新的视角去看待孤子的碰撞及波函数的演化过程. 磁单极子的运动可以用来确定怪波在时空中的相对相位分布^[32], 利用它们的分布特征可以对暗孤子的拓扑性质进行分类^[13]. 更多可能的应用还有待进一步研究.

参考文献

- [1] Dirac P A M 1931 *Proc. R. Soc. Lond. A* **133** 60
- [2] Milton K A 2006 *Rep. Prog. Phys.* **69** 1637
- [3] Yang C N 1970 *Phys. Rev. D* **1** 2360
- [4] Wu T T, Yang C N 1995 *Phys. Rev. D* **12** 3845
- [5] Berry M V 1980 *Eur. J. Phys.* **1** 240
- [6] Aharonov Y, Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
- [7] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** 45
- [8] Hooft G 1974 *Nucl. Phys. B* **79** 276
- [9] Castelnovo C, Moessner R, Sondhi S L 2008 *Nature* **451** 42
- [10] Milde P, Köhler D, Seidel J, Eng L M, Bauer A, Chacon A, Kindervater J, Mühlbauer S, Pfeleiderer C, Bulrandt S,

- Schütte C, Rosch A 2013 *Science* **340** 1076
- [11] Ray M W, Ruokokoski E, Kandel S, Möttönen M, Hall D S 2014 *Nature* **505** 657
- [12] Xiao D, Chang M C, Niu Q 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1959
- [13] Zhao L C, Qin Y H, Lee C, Liu J 2021 *Phys. Rev. E* **103**
- [14] Muga J G, Ruschhaupt A, Campo A 2009 *Time in Quantum Mechanics* (Vol. 2) (Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg) p305
- [15] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240
- [16] Barenblatt G I 1996 *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics: Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [17] Karpman V I 1975 *Non-Linear Waves in Dispersive Media* (New York: Pergamon Press)
- [18] Agrawal G 2006 *Nonlinear Fiber Optics* (Cambridge: Academic Press)
- [19] Wu B, Liu J, Niu Q 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034101
- [20] Rebbi C, Soliani G 1984 *Solitons and Particles* (Singapore: World Scientific Publishing)
- [21] Nguyen J H V, Dyke P, Luo D, Malomed B A, Hulet R G 2014 *Nat. Phys.* **10** 918
- [22] Zakharov V E, Shabat A B 1973 *Sov. Phys. JETP* **37** 823
- [23] Zhao L C, Ling L, Yang Z Y, Liu J 2016 *Nonlinear Dyn.* **83** 659
- [24] Yang C N, Lee T D 1952 *Phys. Rev.* **87** 404
- [25] Zhao L C, Meng L Z, Qin Y H, Yang Z Y, Liu J 2021 arXiv: 2102.10914.
- [26] Wang Z X, Guo D R 2012 *Special Functions* (Beijing: Peking University Press) p15 (in Chinese) [王竹溪, 郭敦仁. 2012 特殊函数概论 (北京: 北京大学出版社) 第15页]
- [27] Liang J Q, Wei L F 2011 *New Developments in Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press) p26 (in Chinese) [梁九卿, 韦联福. 2011 量子力学新进展 (北京: 科学出版社) 第26页]
- [28] Kivshar Y S, Afansjev V V, Snyder A W 1996 *Opt. Commun.* **126** 348
- [29] Triki H, Hamaizi Y, Zhou Q, Biswas A, Ullah M Z, Moshokoa S P, Belic M 2018 *Optik* **155** 329
- [30] Busch T, Anglin J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 010401
- [31] Alejo M A, Corcho A J 2020 arXiv: 2003.09994
- [32] Li J D, Meng L Z, Zhao L C 2023 *Phys. Rev. A* **107** 013511

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

Dirac magnetic monopoles potential in the nonlinear double-soliton interference*

Sun Bin¹⁾ Zhao Li-Chen²⁾ Liu Jie^{1)†}

1) (*Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100193, China*)

2) (*School of Physics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

(Received 20 December 2022; revised manuscript received 31 January 2023)

Abstract

In this paper, we deeply investigate the phase evolution and the underlying topological vector potential in the nonlinear interference of solitons. Based on the double-soliton solution of 1D nonlinear Schrödinger equation, we find that the density zeros of wave function generally exist in the extended complex space, each density zero corresponds to the vector potential produced by Dirac magnetic monopole. The vector potential field is composed of periodically distributed Dirac magnetic monopole pairs with opposite magnetic charges. By observing the motion of magnetic monopoles, we can conveniently understand the phase evolution characteristics during the interference process. In particular, we find that the collision of a pair of magnetic monopoles with opposite charge on the real axis corresponds exactly to the $\pm\pi$ jump of the wave function phase at nodes. For comparison, we also discuss Dirac magnetic monopoles and vector potential field in linear wave packet interference case. The results show that the Dirac magnetic monopole potential widely exists in the interference phenomena of wave fields, and the distribution of magnetic monopoles in the extended complex space can be used to distinguish the topological properties behind the linear and nonlinear interference process.

Keywords: monopole, nonlinear, interference, soliton

PACS: 05.45.-a, 14.80.Hv, 42.50.Md, 85.35.Ds

DOI: 10.7498/aps.72.20222416

* Project supported by the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the China Academy of Engineering Physics (Grant No. U1930403) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12022513).

† Corresponding author. E-mail: jliu@gceaep.ac.cn



双孤子非线性干涉中的狄拉克磁单极势

孙斌 赵立臣 刘杰

Dirac magnetic monopoles potential in the nonlinear double-soliton interference

Sun Bin Zhao Li-Chen Liu Jie

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 100501 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222416

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222416>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

由正负磁单极对相互作用诱导的孤立狄拉克弦

Isolated Dirac string induced by interaction between positive and negative monopoles

物理学报. 2021, 70(7): 071401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201744>

非线性光学中的暗孤子分子

Dark soliton molecules in nonlinear optics

物理学报. 2020, 69(1): 014208 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191347>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

对称极化子凝聚体系统中的稳定孤子及其调控

Stable solitons and their controllability in symmetrical polariton condensates

物理学报. 2022, 71(18): 181101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220475>

非线性超声射频信号熵对乳腺结节良恶性的定征

Classification of benign and malignant breast masses using entropy from nonlinear ultrasound radiofrequency signal

物理学报. 2021, 70(8): 084302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201919>

优化递归变分模态分解及其在非线形信号处理中的应用

Application of the proposed optimized recursive variational mode decomposition in nonlinear decomposition

物理学报. 2019, 68(23): 238401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191005>