

## 用于空间相机设计的高精度光线追迹方法\*

吴长茂<sup>1)2)</sup> 唐熊忻<sup>1)2)†</sup> 夏媛媛<sup>1)2)</sup> 杨瀚翔<sup>1)2)</sup> 徐帆江<sup>1)2)‡</sup>

1) (中国科学院软件研究所, 天基综合信息系统重点实验室, 北京 100190)

2) (杭州光学精密机械研究所, 杭州 311421)

(2022年12月30日收到; 2023年2月6日收到修改稿)

空间光学系统在实际需求牵引下, 向着大尺度、高精度、复杂化等方向发展, 像差随着焦距与口径的增大呈幂指数增长, 微小的误差扰动就会引起像质的大幅退化, 因此对光线追迹算法的精度和稳定性提出了更严苛要求. 本文从误差分析理论出发, 提出了光线追迹精度表示模型, 依据模型分析了计算过程误差来源, 并设计了高精度光线追迹算法. 数值仿真实验和典型空间相机设计案例结果表明, 本文方法在精度上较原有方法提高了5—6个数量级, 残差平均比Zemax小近3个数量级, 数值稳定性也得到了极大提升.

**关键词:** 光线追迹, 误差模型, 数值算法, 光学设计, 空间相机**PACS:** 42.15.Dp, 42.15.Eq, 42.15.-i, 42.15.Fr**DOI:** 10.7498/aps.72.20222463

## 1 引言

随着空间遥感技术的发展, 世界各国为了率先占领太空探索的制高点, 提升国家军事实力, 加强国家国防安全, 应对气候灾害等, 竞相对空间遥感相机进行了大量人力物力投入, 在技术上取得了巨大进步. 空间相机由原来的航空胶片相机演变为实时空间传递相机、红外相机、成像光谱仪等. 对光学系统的性能指标要求也越来越高, 对地分辨率也由当初的5 km发展到现在的0.1 m以内. 光线追迹是空间相机光学系统设计的基础, 在光学系统建造过程中对面形加工、装调位置和系统稳定性等误差因素的控制也起着举足轻重的作用<sup>[1]</sup>. 高分辨率成像的需求, 使空间光学系统的焦距和口径越来越大, 光学系统的焦距已增长到数十米至数百米的尺度, 口径尺寸达到了数米至数十米的量级. 空间光学相机是高精度系统, 有超高装调和面形精度要求<sup>[2]</sup>,

装调精度需达到微米量级, 镜面面形精度的均方根要求控制在 $1/30\lambda$ 至 $1/90\lambda$ 左右. 此外, 空间相机的轨道高度为数百千米, 物距远远大于常规光学系统. 因此, 在光学设计中, 空间相机的长度尺度会涉及 $10^8$ ,  $10^3$ ,  $10^0$ 等数量级. 大口径、长焦距、极大物距以及空间长度尺度在多个数量级间跨越式变化, 导致光线追迹的精度在纳米量级到厘米量级变化, 在 $10^6$ 数量级波动, 数值稳定性极差. 空间相机光学系统的独有特点, 对光线追迹算法的精度和稳定性带来了极大影响<sup>[3]</sup>.

光线追迹是“古老”的新问题, 其研究一直备受关注<sup>[4]</sup>. 1968年Appel<sup>[5]</sup>提出光线追迹概念; 1980年Whited<sup>[6]</sup>利用光线追迹模拟了光的反射和折射等物理现象; 1997年斯坦福大学Veitch<sup>[7]</sup>在其博士论文中通过光线追迹方法组合光源与相机光路, 提高了光线追迹成像质量. 随着计算机的出现和在光学设计中的逐步应用, 计算方法亦做了相应的发展以适应计算机的特性<sup>[8]</sup>. 1985年王之江<sup>[9]</sup>在光学

\* 国家重点研发计划 (批准号: 2021YFB3601400) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xiongxin@iscas.ac.cn

‡ 通信作者. E-mail: fanjiang@iscas.ac.cn

设计理论基础中介绍了光线在球面系统的追迹计算方法. 20 世纪 90 年代, 在光学设计领域实际光路追迹就有标准公式可循, 1990 年北京理工大学王涌天<sup>[10]</sup>研究了复杂面型的实际光路追迹公式, 2002 年北京理工大学李林和安连生<sup>[11]</sup>在计算机辅助光学设计的理论与应用中详细介绍了光线追迹的计算机实现方法. 2021 年, 李晓彤和岑兆丰<sup>[12]</sup>、张以谟等<sup>[13]</sup>和 Marrs 等<sup>[14]</sup>均对光线追迹方法进行了系统总结.

光线追迹是研究光学等物理问题的重要手段. 2009 年, 西安交通大学张淳民团队<sup>[15]</sup>基于光线追迹研制偏振干涉成像光谱仪; 2016 年美国达尔格伦师海军水面作战中心的 Spence 和 Parks<sup>[16]</sup>利用光线追迹方法计算单个光子逃离谐振腔的概率; 2020 年深圳大学阮双琛团队<sup>[17]</sup>基于光线追迹法研究飞秒激光啁啾脉冲放大. 光线追迹也是研究以物理机理为基础的跨学科问题的有效方法. 2017 年瑞典的 Schedin 等<sup>[18]</sup>用光线追迹分析角膜治疗后的长期视觉质量; 2020 年西班牙能源与环境高级研究中心的 Ferrer-Rodríguez 团队<sup>[19]</sup>研究了基于光线追迹的聚光型超高太阳能电池设计方法; 2021 年福州大学的王鹏飞团队<sup>[20]</sup>借助光线追迹校正 Risley 棱镜成像畸变; 同年, 沙特阿卜杜拉国王科技大学和同济大学孙启霖团队<sup>[21]</sup>提出了基于光线追迹引擎的复杂透镜设计与仿真. 随着智能信息处理越来越依赖于对物理机理的探索, 2021 年法国的 Halé 团队<sup>[22]</sup>将光线追迹方法应用到了端到端传感器和神经网络设计中. 光线追迹算法逐渐应用到越来越多的前沿研究领域, 算法的精度和数值稳定性对计算结果会产生更直接的影响<sup>[23,24]</sup>.

在光线追迹过程中, 由数学公式转换为计算机语言进行建模仿真时, 由于运算存在误差, 误差的累积将会导致光线追迹计算结果不精确、不可靠、

甚至不正确. 同时, 光线追迹中长度尺度会存在多个数量级的突变, 长度尺度的数值变化在空间相机设计中尤其明显, 会带来数值稳定性问题. 离轴三反光学系统由于可以做到大孔径、无中心遮拦、可折叠、易于轻量化, 优于透射式、折反射式光学系统, 但由于计算过程中光轴方向的变化, 参考坐标系在局部坐标系中多次变换, 精度更是难以保障. 光线追迹的精度和数值稳定性是空间相机光学设计有待解决的核心问题. 虽然光线追迹的计算方法作为解决物理问题的基础被大量研究, 然而已有研究工作尚未从光线追迹误差模型的表征方面开展, 缺乏系统化的误差模型与定量分析手段<sup>[25,26]</sup>, 无法满足越来越多的研究领域对光线追迹精度高、数值稳定性好的迫切需求. 本文推导了光线追迹的误差模型, 给出影响光线追迹精度和数值稳定性的要素, 给出了误差表达式用于定量分析, 并基于误差模型设计了高精度、高数值稳定性的光线追迹算法.

## 2 空间光线追迹误差模型

本节首先建立面型坐标系与全局坐标系, 以确定面型间的几何位置关系, 然后给出光线在面型间遍历时的传递公式和折射公式的物理方程, 在此基础上推导出空间光线追迹误差模型.

### 2.1 面型坐标系与全局坐标系

光学设计中每个面型均有自己的局部坐标系, 一般将光轴设置为  $Z$  轴, 面型坐标系原点与曲面顶点重合,  $X$  轴则与曲面的对称轴重合, 形成面型坐标系  $(X, Y, Z)$ . 选择某一面型为参考面建立全局坐标系  $(X_g, Y_g, Z_g)$ , 面型的曲面顶点坐标由  $Z_g$  上的一点唯一确定, 且  $X, Y$  和  $Z$  轴分别与  $X_g, Y_g$  和  $Z_g$  轴平行, 如图 1 所示.

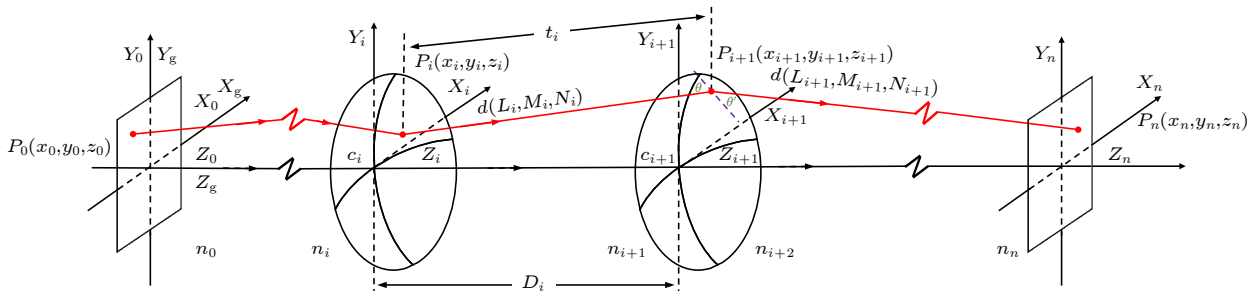


图 1 面型坐标系与全局坐标系

Fig. 1. Surface frame and global frame.

## 2.2 光线追迹误差模型

以最常用的二次旋转曲面 (包含球面和平面) 为例, 建立光线追迹误差模型. 二次旋转曲面方程可统一表示为

$$c[x^2 + y^2 + (1 + e)z^2] - 2z = 0, \quad (1)$$

其中,  $c$  为顶点曲率,  $e$  为离心率. 当  $c = 0$  时, 表示平面; 当  $e < -1$  时, 表示双曲面; 当  $e = -1$  时, 表示抛物面; 当  $e > -1$  时, 表示椭圆面. 当  $e = 0$  时, 表示半径  $R = 1/c$  的标准面. 光线以参数方程形式表示为

$$P(t) = P_i + t\mathbf{d}. \quad (2)$$

### 2.2.1 追迹交点误差模型

初始条件设为: 在参考面  $i$  上, 已知光线起点  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ , 方向向量  $\mathbf{d}(L_i, M_i, N_i)$ , 如图 1 所示. 联立方程 (1) 和 (2), 有

$$c_{i+1}[(x_i + tL_i)^2 + (y_i + tM_i)^2 + (1 + e_{i+1})(z_i + tN_i)^2] - 2(z_i + tN_i) = 0, \quad (3)$$

若引入如下  $A$ ,  $B$  和  $C$  变量:

$$\begin{aligned} A &= c_{i+1}[L_i^2 + M_i^2 + (1 + e_{i+1})N_i^2], \\ B &= 2c_{i+1}[x_iL_i + y_iM_i + (1 + e_{i+1})z_iN_i] - 2N_i, \\ C &= c_{i+1}[x_i^2 + y_i^2 + (1 + e_{i+1})z_i^2] - 2z_i, \end{aligned} \quad (4)$$

则方程 (3) 可表示为

$$At^2 + Bt + C = 0. \quad (5)$$

设方程 (5) 有物理意义的解为  $t_i$ , 代入方程 (2) 得到光线追迹交点  $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$  坐标如下:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + t_iL_i, \\ y_{i+1} &= y_i + t_iM_i, \\ z_{i+1} &= z_i + t_iN_i. \end{aligned} \quad (6)$$

光线追迹方法采用双精度浮点数表征曲率半径、透镜厚度、空气间隔、光线与表面的交点、光线方向向量等物理量. 在数值计算中, 加减乘除开方等基本运算均会产生舍入误差, 误差边界为  $1 \pm \varepsilon$ , 且  $\varepsilon = 1.11 \times 10^{-16}$ . 因此  $x_i$  可表示为  $x_i(1 \pm \varepsilon)$ ,  $L_i$  可表示为  $L_i(1 \pm \varepsilon)$ ,  $t_iL_i$  相乘须表示为  $t_iL_i(1 \pm \varepsilon)$ . 在求解方程 (5) 的过程中, 至少经历近百次浮点计算, 假设其累积误差为  $\eta_t$ ,  $t_i$  取值范围为  $t_i(1 \pm \eta_t)$ , 则有:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + t_iL_i, \\ &\in [x_i(1 \pm \varepsilon) + t_iL_i(1 \pm \eta_t)(1 \pm \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (7)$$

当  $x_i(1 \pm \varepsilon)$  和  $t_iL_i(1 \pm \varepsilon)^2(1 \pm \eta_t)$  相加时, 也会产生舍入误差  $(1 \pm \varepsilon)$ , 这样 (7) 式进一步可表示为

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\in [x_i(1 \pm \varepsilon) + t_iL_i(1 \pm \varepsilon)^2(1 \pm \eta_t)(1 \pm \varepsilon)], \\ &\in [x_i(1 \pm \varepsilon)^2 + t_iL_i(1 \pm \varepsilon)^3(1 \pm \eta_t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

由于  $\varepsilon$  数值非常小, 下述不等式成立:

$$(1 \pm \varepsilon)^n \leq 1 \pm (1 + n)\varepsilon, \quad (9)$$

利用不等式 (9), 可把 (8) 式重写为如下形式:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\in [x_i(1 \pm \varepsilon)^2 + t_iL_i(1 \pm \varepsilon)^3(1 \pm \eta_t)], \\ &\in [x_i(1 \pm 3\varepsilon) + t_iL_i(1 \pm 4\varepsilon)(1 \pm \eta_t)], \\ &\in [x_i + t_iL_i + \{\pm 3\varepsilon x_i \pm t_iL_i\eta_t \\ &\quad \pm 4\varepsilon t_iL_i \pm 4\varepsilon t_iL_i\eta_t\}]. \end{aligned} \quad (10)$$

若以  $\sigma_{i+1}^x$  表示光线与  $i + 1$  面交点横坐标误差的绝对值:  $\sigma_{i+1}^x = 3\varepsilon|x_i| + |t_iL_i\eta_t| + 4\varepsilon|t_iL_i| + 4\varepsilon|t_iL_i\eta_t|$ , 则光线与  $i + 1$  面交点坐标误差范围表示为  $x_{i+1} \in [x_i + t_iL_i - \sigma_{i+1}^x, x_i + t_iL_i + \sigma_{i+1}^x]$ . 同理, 推导出交点  $y_{i+1}$  和  $z_{i+1}$  误差表达式和取值范围公式, 整理后如 (11) 式和 (12) 式所示:

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1}^x &= 3\varepsilon|x_i| + |t_iL_i\eta_t| + 4\varepsilon|t_iL_i| + 4\varepsilon|t_iL_i\eta_t|, \\ \sigma_{i+1}^y &= 3\varepsilon|y_i| + |t_iM_i\eta_t| + 4\varepsilon|t_iM_i| + 4\varepsilon|t_iM_i\eta_t|, \\ \sigma_{i+1}^z &= 3\varepsilon|z_i| + |t_iN_i\eta_t| + 4\varepsilon|t_iN_i| + 4\varepsilon|t_iN_i\eta_t|. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\in [x_i + t_iL_i - \sigma_{i+1}^x, x_i + t_iL_i + \sigma_{i+1}^x], \\ y_{i+1} &\in [y_i + t_iM_i - \sigma_{i+1}^y, y_i + t_iM_i + \sigma_{i+1}^y], \\ z_{i+1} &\in [z_i + t_iN_i - \sigma_{i+1}^z, z_i + t_iN_i + \sigma_{i+1}^z]. \end{aligned} \quad (12)$$

方程 (11) 为光线追迹误差模型. 当光线始点  $P_i$  远离  $i + 1$  面曲面顶点时, 以标准面为例,  $z_i^2 \gg 1/c_{i+1}^2$ , 导致误差项  $3\varepsilon|z_i|$  较大. 此时有  $C = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - c_{i+1}^2 \approx x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ , 由 (2) 式可知,  $t_i$  和  $z_i$  同等量级,  $z_i$  较大时,  $t_i$  也较大. 用数值方法求解方程 (5) 时, 累积误差  $\eta_t$  也较大, 这样方程 (11) 中  $\sigma$  较大, 也就是光线追迹误差较大. 当光线始点  $P_i$  与  $i + 1$  面曲面顶点较近时,  $|t_iL_i\eta_t|$  中  $t_i$  虽小, 但求解方程 (5) 的数值算法稳定性差时会产生较大的累积误差,  $\eta_t$  会较大; 若未对方向向量  $\mathbf{d}$  采取合适的缩放方法, 也会引入较大误差, 致使  $|t_i d_x \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_iL_i|$ ,  $4\varepsilon|t_iL_i\eta_t|$ ,  $|t_iM_i\eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_iM_i|$ ,  $4\varepsilon|t_iM_i\eta_t|$ ,  $|t_iN_i\eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_iN_i|$ ,  $4\varepsilon|t_iN_i\eta_t|$  不趋近于 0, 这样方程 (11) 中  $\sigma$  较大, 追迹误差也大. 综上, 无论光线

始点与透镜顶点距离远近, 均需对参考面光线始点  $P_i$ 、方向向量  $\mathbf{d}$ 、参变量  $t$  求解设计合适的数值计算方法, 以使  $\sigma$  趋近于 0, 达到降低误差提高精度的目的.

### 2.2.2 面型间距离误差模型

同样依据 2.2.1 节误差分析方法, 方程 (5) 系数  $A$  引入误差模型推导如下.

首先推导  $L_i^2$  的计算误差, 因浮点数表示误差

存在,  $L_i^2$  可表示为  $L_i(1 \pm \varepsilon)L_i(1 \pm \varepsilon)$ , 两个浮点数  $L_i(1 \pm \varepsilon)$  相乘也产生误差  $(1 \pm \varepsilon)$ , 因此有  $L_i^2$  的误差范围可表示为  $L_i^2(1 \pm \varepsilon)^3$ , 同理  $M_i^2$  的误差范围也可表示为  $M_i^2(1 \pm \varepsilon)^3$ . 类似地,  $e_{i+1}$  可表示为  $e_{i+1}(1 \pm \varepsilon)$ , 从而  $(1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon))$  可表示为  $(1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon))(1 \pm \varepsilon)$ ,  $1 + e_{i+1}$  与  $N_i^2$  相乘也有误差  $(1 \pm \varepsilon)$ , 因此  $(1 + e_{i+1})N_i^2$  可以写成  $(1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon)) \times N_i^2(1 \pm \varepsilon)^5$ .

$$\begin{aligned}
 A_i &= c_{i+1}[L_i^2 + M_i^2 + (1 + e_{i+1})N_i^2], \\
 &\in c_{i+1}(1 \pm \varepsilon)[L_i^2(1 \pm \varepsilon)^2 + M_i^2(1 \pm \varepsilon)^2 + (1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon))N_i^2(1 \pm \varepsilon)^2], \\
 &\in c_{i+1}(1 \pm \varepsilon)[L_i^2(1 \pm \varepsilon)^3 + M_i^2(1 \pm \varepsilon)^3 + (1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon))N_i^2(1 \pm \varepsilon)^5], \\
 &\in c_{i+1}(1 \pm \varepsilon)[\{(L_i^2(1 \pm \varepsilon)^3 + M_i^2(1 \pm \varepsilon)^3)(1 \pm \varepsilon) + (1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon))N_i^2(1 \pm \varepsilon)^5\}(1 \pm \varepsilon)](1 \pm \varepsilon), \\
 &\in c_{i+1}[L_i^2 + M_i^2 + (1 + e_{i+1}(1 \pm \varepsilon))N_i^2(1 \pm \varepsilon)](1 \pm \varepsilon)^7, \\
 &\in c_{i+1}[(L_i^2 + M_i^2)(1 \pm \varepsilon)^7 + N_i^2(1 \pm \varepsilon)^8 + e_{i+1}N_i^2(1 \pm \varepsilon)^9], \\
 &\in c_{i+1}[(L_i^2 + M_i^2)(1 \pm 8\varepsilon) + N_i^2(1 \pm 9\varepsilon) + e_{i+1}N_i^2(1 \pm 10\varepsilon)], \\
 &\in c_{i+1}[L_i^2 + M_i^2 + (1 + e_{i+1})N_i^2] + \{\pm 8\varepsilon c_{i+1}(L_i^2 + M_i^2) \pm 9\varepsilon c_{i+1}N_i^2 \pm 10\varepsilon c_{i+1}e_{i+1}N_i^2\}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

若记系数  $A_i$  的误差阈值为

$$\begin{aligned}
 \sigma_A^i &= 8\varepsilon|c_{i+1}|(L_i^2 + M_i^2) + 9\varepsilon|c_{i+1}|N_i^2 \\
 &\quad + 10\varepsilon|c_{i+1}e_{i+1}|N_i^2, \tag{14}
 \end{aligned}$$

记系数  $A_i$  的无限精度值为

$$A_i^{\text{inf}} = c_{i+1}(L_i^2 + M_i^2) + (1 + e_{i+1})N_i^2, \tag{15}$$

则系数  $A_i$  误差上下界可表示为

$$A_i \in [A_i^{\text{inf}} - \sigma_A^i, A_i^{\text{inf}} + \sigma_A^i]. \tag{16}$$

同理, 可推导出方程 (5) 系数  $B$  和  $C$  误差模型, 一并整理如下:

$$\begin{aligned}
 \sigma_A^i &= 8\varepsilon|c_{i+1}|(L_i^2 + M_i^2) + 9\varepsilon|c_{i+1}|N_i^2 \\
 &\quad + 10\varepsilon|c_{i+1}e_{i+1}|N_i^2, \\
 \sigma_B^i &= 16\varepsilon|c_{i+1}|(x_i L_i + y_i M_i) + 20\varepsilon|c_{i+1}z_i N_i| \\
 &\quad + 22\varepsilon|c_{i+1}e_{i+1}z_i N_i| + 6\varepsilon|N_i|, \\
 \sigma_C^i &= 8\varepsilon|c_{i+1}|(x_i^2 + y_i^2) + 9\varepsilon|c_{i+1}|z_i^2 \\
 &\quad + 10\varepsilon|c_{i+1}e_{i+1}|z_i^2 + 6\varepsilon|z_i|. \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_i &\in [A_i^{\text{inf}} - \sigma_A^i, A_i^{\text{inf}} + \sigma_A^i], \\
 B_i &\in [B_i^{\text{inf}} - \sigma_B^i, B_i^{\text{inf}} + \sigma_B^i], \\
 C_i &\in [C_i^{\text{inf}} - \sigma_C^i, C_i^{\text{inf}} + \sigma_C^i]. \tag{18}
 \end{aligned}$$

方程 (17) 和 (18) 统称为 ABC 误差模型. 分析方

程 (17) 可知, 影响系数  $A_i$ ,  $B_i$  和  $C_i$  计算精度的因素中,  $\varepsilon$  由计算机物理本质决定无法改变,  $c_{i+1}$  和  $e_{i+1}$  表示二次旋转曲面的几何特征, 也无法改变. 故需要采取措施, 降低参考面上光线起点  $P_i$  的坐标  $x_i$ ,  $y_i$  和  $z_i$  和光线方向向量  $\mathbf{d}$  分量  $L_i$ ,  $M_i$  和  $N_i$  的绝对值, 以减少系数  $A_i$ ,  $B_i$  和  $C_i$  的误差. 同时也可以看出, 若参考面光线起点  $P_i$  计算不准确, 那么系数  $A_i$ ,  $B_i$  和  $C_i$  的值也将不准确, 误差将随着光线追迹在面型间逐级传递而放大.

### 3 高精度光线追迹算法设计

从光线追迹的误差模型 (11) 式可以看出, 光线追迹误差由 3—4 个误差项之和构成, 每个误差项表现为 3 个可变因子乘积形式, 共有  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ ,  $L_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$ ,  $t_i$  和  $\eta_i$  等 8 个可变误差因子. 若不能降低 8 个可变误差因子的绝对值, 随着光线逐面传递, 光线追迹误差将逐面放大, 导致不精确甚至错误的追迹结果. 若能采取措施分别降低 8 个可变误差因子的绝对值, 那么光线追迹舍入误差  $\sigma_{i+1}^x$ ,  $\sigma_{i+1}^y$  和  $\sigma_{i+1}^z$  也将随之降低. 下面将遵循这一思路, 采取措施降低可变因子的绝对值, 达到总体上降低误差的目的.

### 3.1 二次碰撞与重投影

依据方程 (6) 求出交点坐标  $P_{i+1}$  后, 从光线追迹截断误差模型方程 (11) 可知,  $P_{i+1}$  距透镜球面上真实点  $P_s$  存在一定误差, 图 2 中实心点表示数值方法计算出的光线与球面的交点坐标  $P_{i+1}$ . 此时若更进一步, 构造以交点  $P_{i+1}$  为始点的新光线与球面方程 (1) 进行二次求交, 求得新交点  $P'_{i+1}$ . 由光线追迹截断误差模型方程 (12) 可知, 因新的光线始点非常靠近球面真实点  $P_s$ , 引入的截断误差  $3\varepsilon|x_{i+1}|$ ,  $3\varepsilon|y_{i+1}|$  和  $3\varepsilon|z_{i+1}|$  与第一次对应值相比非常小, 相应地, 计算出的新参变量  $t'_i$  及其绝对误差  $\eta'_i$  也比第一次计算值小, 这表明误差模型 (11) 式中  $|t_i L_i \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_i L_i|$ ,  $4\varepsilon|t_i L_i \eta_t|$ ,  $|t_i M_i \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_i M_i|$ ,  $4\varepsilon|t_i M_i \eta_t|$ ,  $|t_i N_i \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_i N_i|$  和  $4\varepsilon|t_i N_i \eta_t|$  等 9 项误差也将较小, 这样整体上第二次计算的交点  $P'_{i+1}$  比第一次的交点  $P_{i+1}$  精度更高. 但是, 二次碰撞实际重复了两次光线追迹过程, 计算开销增大了 1 倍.

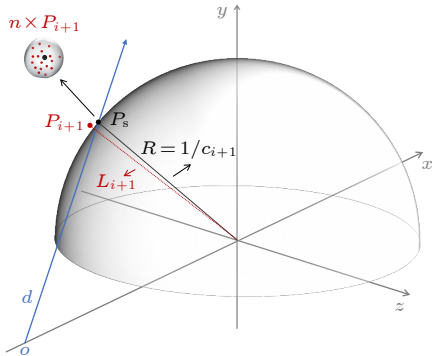


图 2 重投影  
Fig. 2. Reprojection.

本文提出重投影思想, 既获得了二次碰撞精度较高的优点, 又避免了计算开销增大 1 倍的缺点, 如图 2 所示. 二次碰撞的过程就是把光线追迹方法计算的交点  $P_{i+1}$  向透镜球面上点  $P_s$  再一次逼近求精的过程. 交点  $P_{i+1}$  无论是在球面外还是球面内, 越是靠近透镜球面上点  $P_s$ , 光线追迹方法的精度就越高. 显然, 可以利用交点  $P_{i+1}$  到透镜球心的距离  $L_{i+1}$  度量交点  $P_{i+1}$  靠近透镜球面上点  $P_s$  的程度: 若距离  $L_{i+1}$  等于点  $P_s$  到透镜球心的距离  $L_s$ , 即透镜曲率半径  $R$ , 那么交点  $P_{i+1}$  是“精确”的; 若距离  $L_{i+1}$  大于曲率半径  $R$ , 交点  $P_{i+1}$  在球面外, 需要把

交点  $P_{i+1}$  向球心方向“压缩”一点才能更靠近点  $P_s$ ; 若距离  $L_{i+1}$  小于曲率半径  $R$ , 交点  $P_{i+1}$  在球面内, 需要把交点  $P_{i+1}$  向背离球心方向“膨胀”一点, 就可更靠近点  $P_s$ . 即采用投影因子作为交点  $P_{i+1}$  向球心内“压缩”或向球心外“膨胀”的矫正手段. 通常情况下, 由于存在数值计算误差,  $L_{i+1}$  将略大于或略小于曲率半径  $R$ , 定义如下投影因子  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{R}{L_{i+1}}. \quad (19)$$

第一种情况, 若  $L_{i+1}$  略大于曲率半径  $R$ , 投影因子  $\alpha$  将小于 1 但又非常接近 1, 这样交点  $\alpha P_{i+1}$  将比交点  $P_{i+1}$  更靠近球面上点  $P_s$ , 也就是交点  $\alpha P_{i+1}$  有更高的精度, 这一变换过程等价于把交点  $P_{i+1}$  向“内”推到更靠近点  $P_s$  的位置. 第二种情况, 若  $L_{i+1}$  略小于曲率半径  $R$ , 投影因子  $\alpha$  将大于 1 但又非常接近 1, 这样交点  $\alpha P_{i+1}$  将比交点  $P_{i+1}$  更靠近球面上点  $P_s$ , 同样表示交点  $\alpha P_{i+1}$  精度更高, 这一变换过程等价于把交点  $P_{i+1}$  向“外”推到更靠近点  $P_s$  位置. 第三种情况, 若交点  $P_{i+1}$  恰好在球面上, 这时投影因子  $\alpha = 1$ , 交点  $P_{i+1}$ 、点  $\alpha P_{i+1}$  和点  $P_s$  表示同一个点, 重投影对交点精度无影响.

标准面追迹精度提升策略可推广到一般情况下的二次旋转椭球面 (含标准面). 设有旋转椭球面, 其两个焦点为  $F_1(0, 0, a - c)$ ,  $F_2(0, 0, a + c)$ , 其中  $a > c > 0$ , 且  $b^2 = a^2 - c^2$ ,

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{(z - a)^2}{a^2} = 1. \quad (20)$$

根据旋转椭球面几何定义, 旋转椭球面上任意一点到焦点  $F_1$  和  $F_2$  的距离之和为定值  $2a$ , 定义如下旋转椭球面重投影因子, 提升光线追迹精度:

$$\alpha_e = \frac{2a}{|P_{i+1}F_1| + |P_{i+1}F_2|}. \quad (21)$$

若  $P_{i+1}$  在椭球面外面, 有  $|P_{i+1}F_1| + |P_{i+1}F_2|$  略大于  $2a$ ,  $\alpha_e$  略小于 1, 点  $\alpha_e P_{i+1}$  相比于光线追迹结果  $P_{i+1}$  向“内”更靠近旋转椭球面, 也就是点  $\alpha_e P_{i+1}$  精度更高; 同理, 点  $P_{i+1}$  在椭球面内部时,  $\alpha_e$  略大于 1, 点  $\alpha_e P_{i+1}$  相比于光线追迹结果  $P_{i+1}$  向“外”更靠近旋转椭球面, 同样表明点  $\alpha_e P_{i+1}$  精度更高, 因此可把  $\alpha_e$  称为旋转椭球面的重投影因子. 对标准面而言, 旋转椭球面的两个焦点  $F_1$  和  $F_2$  重合为一个点, 即几何球心, 此时旋转椭球面就是标准面, 这时候  $\alpha_e$  蜕化成标准面的投影因子  $\alpha$ , 见 (19) 式.

### 3.2 方向向量规范化

从光线追迹误差模型方程 (11) 可知, 光线方向向量  $\mathbf{d}(L_i, M_i, N_i)$  对光线追迹的精度影响是综合性的, 其引入的误差包括以下 9 项:  $|t_i L_i \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_i L_i|$ ,  $4\varepsilon|t_i L_i \eta_t|$ ,  $|t_i M_i \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_i M_i|$ ,  $4\varepsilon|t_i M_i \eta_t|$ ,  $|t_i N_i \eta_t|$ ,  $4\varepsilon|t_i N_i|$  和  $4\varepsilon|t_i N_i \eta_t|$ . 上述 9 项误差表现为 2—3 个可变误差因子乘积的形式, 与光线方向向量  $\mathbf{d}$  相关的项包括  $L_i$ ,  $M_i$  和  $N_i$ , 见图 3. 若能减少  $L_i$ ,  $M_i$  和  $N_i$  的值, 则相关的舍入误差也将随之降低.

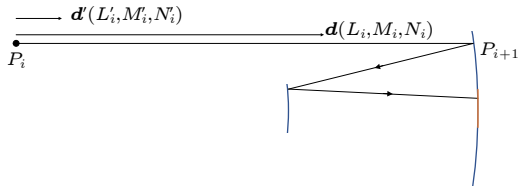


图 3 光线方向向量自适应缩放

Fig. 3. Adaptive scaling for ray's directional vector.

空间相机空气间隔有  $10^3$  到  $10^8$  量级的数据, 不妨在此量级范围内设有光线方向向量  $\mathbf{d}(1000, 1000, 1000\sqrt{3})$ , 光线始点为  $P_i(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ , 若对方向向量不作处理直接计算, 其舍入误差按照光线追迹误差模型方程 (11) 有:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 3\sqrt{2}\varepsilon + 1000|t_i \eta_t| + 4000\varepsilon|t_i| + 4000\varepsilon|t_i \eta_t|, \\ \sigma_y &= 3\sqrt{3}\varepsilon + 1000|t_i \eta_t| + 4000\varepsilon|t_i| + 4000\varepsilon|t_i \eta_t|, \\ \sigma_z &= 3\sqrt{6}\varepsilon + 1000\sqrt{3}|t_i \eta_t| + 4000\sqrt{3}\varepsilon|t_i| \\ &\quad + 4000\sqrt{3}\varepsilon|t_i \eta_t|. \end{aligned} \quad (22)$$

若单位化方向向量  $\mathbf{d}(1000, 1000, 1000\sqrt{3})$  为  $\mathbf{d}(\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, \sqrt{15}/5)$ , 则新的方向向量引入的舍入误差为

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x &= 3\sqrt{2}\varepsilon + \sqrt{5}/5(|t_i \eta_t| + 4\varepsilon|t_i| + 4\varepsilon|t_i \eta_t|), \\ \hat{\sigma}_y &= 3\sqrt{3}\varepsilon + \sqrt{5}/5(|t_i \eta_t| + 4\varepsilon|t_i| + 4\varepsilon|t_i \eta_t|), \\ \hat{\sigma}_z &= 3\sqrt{6}\varepsilon + \sqrt{15}/5(|t_i \eta_t| + 4\sqrt{3}\varepsilon|t_i| + 4\sqrt{3}\varepsilon|t_i \eta_t|). \end{aligned} \quad (23)$$

若忽略掉光线始点的舍入误差项  $\sqrt{2}\varepsilon$ ,  $\sqrt{3}\varepsilon$  和  $\sqrt{6}\varepsilon$ , 则方向向量优化后方程 (23) 引入的舍入误差与优化前方程 (22) 相比有近 3 个数量级的降低.

光线  $P(t) = o + t\mathbf{d}$  的方向向量  $\mathbf{d}(L_i, M_i, N_i)$  有无穷多个, 可表示为  $\mathbf{d}(sL_i, sM_i, sN_i)$ , 其中  $s$  为非零浮点数. 为了减少方向向量引入的舍入误差, 规定方向向量  $\mathbf{d}(L_i, M_i, N_i)$  优化后满足下式:

$$\begin{aligned}|sL_i| &\leq |L_i|, \\ |sM_i| &\leq |M_i|, \\ |sN_i| &\leq |N_i|. \end{aligned} \quad (24)$$

为使不等式 (24) 成立, 取

$$s = \frac{1}{\beta\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + N_i^2}}, \quad (25)$$

其中,  $\beta$  为方向向量  $\mathbf{d}(L_i, M_i, N_i)$  的自适应缩放系数, 最小值为 1, 如 (26) 式所示. 在算法具体实现中, 通过方向向量  $\mathbf{d}(L_i, M_i, N_i)$  的模  $\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + N_i^2}$  与透镜球面的半径  $R$  的比值自适应确定  $\beta$  值大小:

$$\beta = \begin{cases} 1, & 0 < \frac{\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + N_i^2}}{R} \leq 10, \\ 10, & 10 < \frac{\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + N_i^2}}{R} \leq 100, \\ 100, & 100 < \frac{\sqrt{L_i^2 + M_i^2 + N_i^2}}{R}. \end{cases} \quad (26)$$

从 (26) 式可以看出, 依据方向向量的模与透镜曲率半径比值不同, 该方法可把与方向向量有关的误差降低 2 个数量级.

### 3.3 虚切面空间变换

从误差模型 (11) 式可以看出, 光线始点  $o$  引入的误差项包括误差  $3\varepsilon|x_i|$ ,  $3\varepsilon|y_i|$  和  $3\varepsilon|z_i|$ ,  $\varepsilon$  是计算机固有误差, 为常数 ( $1.11 \times 10^{-16}$ ) 且无法改变. 对空间相机而言, 物距达数百千米, 此时  $z_i$  值达  $10^8$  量级, 如图 4 中的坐标变换所示, 此时若直接利用公式计算光线追迹交点  $P_1$ , 光线始点  $P_0$  (假定物距 500 km) 对交点  $P_1$  的  $z$  坐标贡献的误差为  $3\varepsilon|z_i| = 3 \times 1.11 \times 10^{-16} \times 5 \times 10^8 = 1.67 \times 10^{-7}$ , 表明光线追迹结果的第 7 位有效数字已经不准确, 若继续追迹到达像面, 将导致错误的计算结果. 因此, 需要采取措施降低因光线始点引入的舍入误差. 一般地, 若能降低光线始点坐标值  $x_i$ ,  $y_i$  和  $z_i$ , 那么对应的误差  $3\varepsilon|x_i|$ ,  $3\varepsilon|y_i|$  和  $3\varepsilon|z_i|$  也将随之降低. 为降低光线始点坐标值  $x_i$ ,  $y_i$  和  $z_i$ , 如图 4 所示, 以曲面顶点  $Q_1$  为坐标系中心, 建立曲面 1 的局部坐标系  $x'y'z'$ , 然后把光线始点  $P_0$  变换到图 4 中点  $P'_0$  处, 新光线始点  $P'_0$  的  $z$  坐标绝对值以不大于透镜曲率半径为宜. 经过上述空间变换后, 新光线始点  $P'_0$  的  $z$  坐标值与原始值相比将充分小. 同样对新光线始点  $P'_0$  的  $x$  和  $y$  坐标也做相应调整, 此时计算光线与曲面的交点坐标, 由误差模型方程 (11) 可知,

引入的舍入误差将非常小. 同理, 可建立类似的局部坐标系  $x''y''z''$  和  $x'''y'''z'''$ , 把光线始点  $P_1$  和点  $P_2$  分别移到曲面顶点  $P'_1$  和  $P'_2$  处, 这样可有效降低光线始点绝对值过大引入的舍入误差.

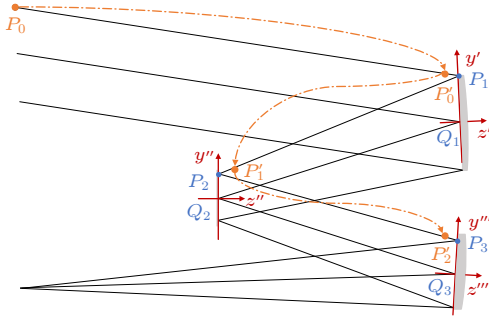


图 4 坐标变换  
Fig. 4. Transformation of coordinates.

### 3.4 参考面到目标面间距离计算

当光线从参考面  $i$  上点  $P_i$  出发计算目标面  $i+1$  上追迹交点  $P_{i+1}$  时, 需要求解方程  $At^2 + Bt + C = 0$ , 当方程判别式大于等于 0 时, 可直接利用一元二次方程求根公式计算方程的解  $t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ , 当  $B^2 \gg 4AC$  时, 会出现恶性相消 (cancellation error) 现象<sup>[25]</sup> (即数值接近的两个数相减直接得出 0 的错误结果), 导致数值计算稳定性变差,  $t_i$  求解出现较大误差, 精度降低. 例如, 当  $A = 1, B = -22345678, C = 1$  时计算  $t = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ , 有两种方法:

$$\text{方法一: } t = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$\text{方法二: } t = \frac{-2C}{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

当以双精度浮点数计算上式时得到如下结果:

$$\text{方法一: } t = 4.47034835815430 \times 10^{-8} (\text{错误}),$$

$$\text{方法二: } t = 4.47513832428804 \times 10^{-8} (\text{正确}).$$

方法二避免了恶性相消计算出了正确结果, 而方法一因发生恶性相消只有 3 位有效数字. 为避免恶性相消现象出现, 这里引入中间变量  $D$ :

$$D = \begin{cases} B - \sqrt{B^2 - 4AC}, & B < 0, \\ B + \sqrt{B^2 - 4AC}, & B \geq 0. \end{cases} \quad (27)$$

由 (27) 式可知, 无论  $B$  小于 0 还是大于等于 0, 计算中间变量  $D$  值的过程中, 均没有使用减法操作,

从而避开了减法引起的恶性相消现象发生. 根据一元二次方程求根公式, 其中一个根为  $D/(2A)$ , 不妨设这个根为  $t_1$ , 即  $t_1 = D/(2A)$ , 由韦达定理可知, 另一个根  $t_2 = 2C/D$ . 实际光路计算时, 为使光线与表面交点有物理意义, 选择  $t_i = \min(t_1, t_2)$ .

通过上述措施, 提高求解参变量  $t_i$  的数值稳定性, 数值稳定性提高的同时, 也间接降低了  $t_i$  求解过程中的绝对误差  $\eta_t$ .

## 4 仿真实验

为了验证本文提出的光线追迹算法的计算精度, 从两个层级开展仿真实验. 首先验证单光线与单个面交点的计算精度, 构建数学模型计算解析解并以其为基准, 用光线追迹算法进行精度验证. 其次构建空间相机典型光学系统, 计算光线经过每个面的交点, 和美国研制的光学商业软件 Zemax 进行数值比较, 同时把光线追迹交点代入面型方程计算残差的绝对值.

### 4.1 光线始点引入误差验证

当光学系统物平面位于无限远时, 发出的光线经过多次折射到达像平面, 若不对物平面发出的光线进行处理, 将引入较大舍入误差. 舍入误差的传播和积累对仿真结果的准确性和稳定性有重要影响. 如图 5 所示, 有标准面方程  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0$ , 光线始点为  $O(0, 0, -4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$ , 方向向量  $\mathbf{d}(0, 1, \sqrt{3})$ . 由图 5 中几何关系, 可精确计算出光线与标准面交点坐标为  $P(0, 4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ .

MPFR (Multiple Precision Floating-point Reliable) 库是一种支持多精度浮点数运算的计算库<sup>[26]</sup>. 理论上, 如果计算机内存容量足够大, 基于 MPFR 可以实现对无限精度的实数运算进行模拟. 四精度 MPFR 浮点数提供 39 位有效数字, 双精度浮点数理论上提供 15—16 位有效数字, 选取 MPFR 四精度浮点数的前 16 位有效数字作为“基准数据”, 验证本文光线追迹算法的正确性. 利用高精度 MPFR 库计算出  $4\sqrt{2}$  的前 15 位有效数字为  $(4\sqrt{2})_{\text{mpfr}} = 5.65685424949238$ , 将其作为基准数据, 则光线追迹中交点  $P(0, 4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$  的准确值可表示为  $P_{\text{mpfr}}(0, 5.65685424949238, -5.65685424949238)$ , 点  $P_{\text{mpfr}}$  可作为单光线和单面交点的基准值, 用于判断光线追迹结果准确与否. 图 5 中考虑光线始点

尺度从点  $O_5$  变化到点  $O$ , 方向向量  $\mathbf{d}$  无需改变. 光线始点从点  $O_5$  逐渐移动到  $O$ , 代表光线从无限远处移动到透镜附近的变化过程. 用现有光线追迹公式计算可得表 1 所列结果.

从表 1 可以看出, 随着光线始点尺度从  $10^0$  变化到  $10^9$ , 现有光线追迹方法的精度从始点  $O$  的 8 位有效数字迅速减少到点  $O_3$  的 2 位有限数字,

而点  $O_4, O_5$  的数据则完全错误. 而本文方法一直保持了 14—15 位的精度. 把光线追迹结果代入方程  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 64 = 0$ , 分别计算残差  $|F(x, y, z)|$ , 也可以看出, 原有方法从点  $O$  到点  $O_5$  残差逐渐增大, 最大残差达到  $2.044 \times 10^3$ , 而本文方法残差始终稳定在  $1.279 \times 10^{-13}$ , 表明本文算法精度较高, 数值稳定性较好.

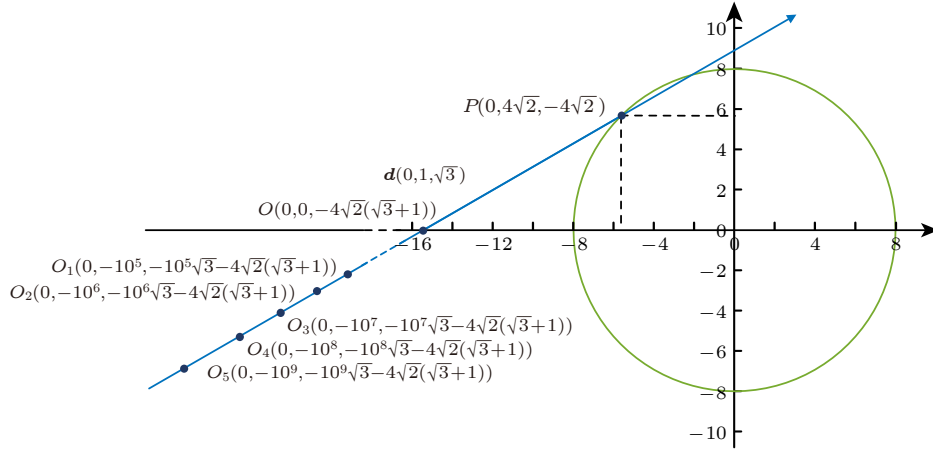


图 5 几何计算与 MPFR 结合验证光线追迹精度

Fig. 5. Verification of ray tracing precision combining geometric computing and MPFR.

表 1 光线始点对光线追迹结果的影响

Table 1. Results of ray tracing algorithm with different ray original points.

光线始点	算法类别	交点 $P$ 坐标			残差 $ F(P_x, P_y, P_z) $
		$P_x$	$P_y$	$P_z$	
$O(0, 0, -4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$	MPFR	0	5.65685424949238	-5.65685424949238	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
	本文方法	0	5.65685424949238	-5.65685424949237	$1.27897692436818 \times 10^{-13}$
	原有方法	0	5.65685425535717	-5.65685423933425	$3.04772385106844 \times 10^{-9}$
$O_1(0, -10^5, -10^5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$	MPFR	0	5.65685424949238	-5.65685424949238	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
	本文方法	0	5.65685424949238	-5.65685424949237	$1.27897692436818 \times 10^{-15}$
	原有方法	0	5.65685252461116	-5.65685719583416	$1.38192605021459 \times 10^{-5}$
$O_2(0, -10^6, -10^6\sqrt{3} - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$	MPFR	0	5.65685424949238	-5.65685424949238	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
	本文方法	0	5.65685424949238	-5.65685424949237	$1.27897692436818 \times 10^{-13}$
	原有方法	0	5.65709940693341	-5.65642958320677	$2.03067029689663 \times 10^{-3}$
$O_3(0, -10^7, -10^7\sqrt{3} - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$	MPFR	0	5.65685424949238	-5.65685424949238	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
	本文方法	0	5.65685424949238	-5.65685424949237	$1.27897692436818 \times 10^{-13}$
	原有方法	0	5.66135398671031	-5.64906043559312	$3.71872321756541 \times 10^{-2}$
$O_4(0, -10^8, -10^8\sqrt{3} - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$	MPFR	0	5.65685424949238	-5.65685424949238	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
	本文方法	0	5.65685424949238	-5.65685424949237	$1.27897692436818 \times 10^{-13}$
	原有方法	0	6.69213041663169	-3.86370331048965	$4.28718721530413 \times 10^0$
$O_5(0, -10^9, -10^9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$	MPFR	0	5.65685424949238	-5.65685424949238	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
	本文方法	0	5.65685424949238	-5.65685424949237	$1.27897692436818 \times 10^{-13}$
	原有方法	0	-15.9352867603302	-43.0555386543273	$2.04371277294824 \times 10^3$

### 4.2 单光线与单个面交点

首先生成满足(0, 1)分布的随机数  $\xi_1, \xi_2$  和  $\xi_3$ , 同时约定以大写字母  $M$  开头的函数或常量表示 MPFR 库中的高精度函数或常量, 如  $M\_sin$  表示 MPFR 库中高精度正弦函数, 利用 (28) 式和 (29) 式分别生成单位球上的随机数点  $P_{64}(x, y, z)$  和  $P_{mpfr}(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos(2\pi\xi_2) \sqrt{\xi_1(1-\xi_1)}, \\ y &= 2 \sin(2\pi\xi_2) \sqrt{\xi_1(1-\xi_1)}, \\ z &= 1 - 2\xi_1. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} x_{mpfr} &= 2M\_cos(2 \times M\_pi \times \xi_2)M\_sqrt(\xi_1(1-\xi_1)), \\ y_{mpfr} &= 2M\_sin(2 \times M\_pi \times \xi_2)M\_sqrt(\xi_1(1-\xi_1)), \\ z_{mpfr} &= 1 - 2\xi_1. \end{aligned} \quad (29)$$

点  $P_{64}(x, y, z)$  乘以随机数  $\xi_4 = \xi_3 + 100$ , 作为单位球球心发出的光线  $r_{64}$  的方向向量, 即有  $d_{64}(\xi_4x, \xi_4y, \xi_4z)$ , 因此光线  $r_{64} = o + td_{64}$ . 联立光线  $r_{64}$  和单位球方程, 可求出其交点  $P_i$ , 容易推出  $P_{mpfr}(x, y, z)$  可以作为评判交点  $P_i$  精度高低的基准值, 具体参见图 6. 实验结果如表 2 所列. 从表 2 可以看出, 本文方法光线追迹结果与 MPFR 基准数据完全一致, 原有方法光线追迹结果与 MPFR 基准数据相比有 8 位精度的损失. 在原有的光线追迹算法中, 计算单光线与单面交点, 光线方向向量的数值大小对光线追迹精度有较大影响. 而使用了本文的算法, 不仅提高了计算精度, 而且光线方向向量的尺度变化不影响光线追迹的计算精度, 数值稳定性也得到了保障.

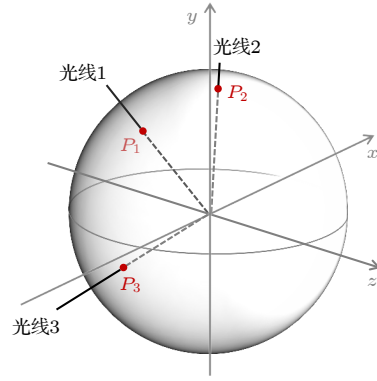


图 6 MPFR 四精度浮点标准点

Fig. 6. MPFR's quadruple precision floating-point numbers on unit sphere.

### 4.3 卡塞格林型空间相机光学系统

卡塞格林型折反物镜是常用的空间相机光学系统, 其光学结构如图 7 所示, 采用了主次镜组合的方式, 主镜采用凹面镜, 次镜是凸面镜, 入射光经次镜反射后通过主镜的开孔成像在后方. 反射系统没有色差, 只有过校正的球差, 因此和透射系统组合使用, 以消除剩余的球差. 此实例的各个面除第 2 面和第 3 面外均为标准球面, 其光学结构参数如表 3 所列. 选取归一化后 Y 视场最大坐标, 归一化 Y 光瞳最大坐标, 即 (0, 1, 0, 1) 这条单光线经

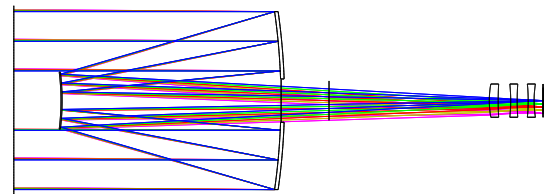


图 7 卡塞格林型空间相机

Fig. 7. Cassegrain space camera.

表 2 不同光线追迹方法结果  
Table 2. Results of different ray tracing algorithms.

光线编号	算法类别	交点 $P$ 坐标			残差 $ F(P_x, P_y, P_z) $
		$P_x$	$P_y$	$P_z$	
1	MPFR	0.379693092393262	0.541344968359402	-0.750185830858461	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
	本文方法	0.379693092393262	0.541344968359402	-0.750185830858461	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
	原有方法	0.379693074143900	0.541344942340492	-0.750185794801938	$9.61269086552363 \times 10^{-8}$
2	MPFR	-0.278818336478534	0.915513779528807	0.289991128719866	0
	本文方法	-0.278818336478534	0.915513779528807	0.289991128719866	0
	原有方法	-0.278818323077561	0.915513735526051	0.289991114781891	$9.61269088772809 \times 10^{-8}$
3	MPFR	-0.831816250860921	-0.330299029958951	0.446076535598833	$2.22044604925031 \times 10^{-16}$
	本文方法	-0.831816250860921	-0.330299029958951	0.446076535598833	$2.22044604925031 \times 10^{-16}$
	原有方法	-0.831816210880958	0.330299014083639	0.446076514158853	$9.61269082111471 \times 10^{-8}$

过卡塞格林型光学系统后, 光线与各面交点坐标与美国商业软件 Zemax OpticStudio (版本号 18.4.1) 进行精度验证, 数据结果如表 4 所列. 本文方法计

算到小数点后 14 位, Zemax 只能显示 11 位有效数字, 本文方法和 Zemax 显示的 11 位有效数字完全一致.

表 3 卡塞格林型空间相机参数列表  
Table 3. Parameter list for Cassegrain space camera.

序号	表面类型	曲率半径	厚度	材料	膜层	圆锥系数
0	物面 标准面	Inf	50000000.000000	————	0	0
1	(孔径) 标准面	Inf	4500.000000	————	0	0
2	光阑(孔径) 标准面	-10, 478.500000	-3686.000000	MIRROR	0	-1.05000
3	标准面	-3, 846.00000	3689.000000	MIRROR	0	-2.50000
4	标准面	Inf	807.00000	————	0	0
5	标准面	Inf	2, 700.000000	————	0	0
6	标准面	1560.200000	150.000000	SILICA	0	0
7	标准面	5398.400000	210.000000	————	0	0
8	标准面	-2746.700000	110.000000	SILICA	0	0
9	标准面	4516.200000	185.000000	————	0	0
10	标准面	-2790.900000	100.000000	SILICA	0	0
11	标准面	1837.600000	150.000000	————	0	0
12	标准面	Inf	0.700000	BK7	0	0
13	标准面	Inf	0.750000	————	0	0
14	像面 标准面	Inf	————	————	0	0

表 4 卡塞格林型空间相机光线追迹结果  
Table 4. Results of ray tracing algorithm for Cassegrain space camera.

面序号	算法类别	交点 $P$ 坐标			残差 $ F(P_x, P_y, P_z) $
		$P_x$	$P_y$	$P_z$	
OBJ	本文方法	0	$4.00000000000000 \times 10^6$	0	
	美国商业软件 Zemax	0	$4.00000000000000 \times 10^6$	0	
1	本文方法	0	$1.53512783172994 \times 10^3$	0	$6.86463863530662 \times 10^{-9}$
	美国商业软件 Zemax	0	$1.53512783170000 \times 10^3$	0	$2.30754721997073 \times 10^{-8}$
2	本文方法	0	$1.49999999999948 \times 10^3$	$-1.07335208171627 \times 10^2$	$4.68958205601666 \times 10^{-13}$
	美国商业软件 Zemax	0	$1.50000000000000 \times 10^3$	$-1.07335208170000 \times 10^2$	$1.70095404428139 \times 10^{-9}$
3	本文方法	0	$4.16656071439095 \times 10^2$	$-2.24707333697088 \times 10^1$	$1.70530256582424 \times 10^{-13}$
	美国商业软件 Zemax	0	$4.16656071440000 \times 10^2$	$-2.24707333700000 \times 10^1$	$1.93832505601677 \times 10^{-10}$
4	本文方法	0	$1.25622942628122 \times 10^2$	0	$1.14219744773436 \times 10^{-9}$
	美国商业软件 Zemax	0	$1.25622942630000 \times 10^2$	0	$3.02019032005774 \times 10^{-9}$
5	本文方法	0	$6.23424396084419 \times 10^1$	0	$9.31940746795590 \times 10^{-10}$
	美国商业软件 Zemax	0	$6.23424396090000 \times 10^1$	0	$1.49004364402572 \times 10^{-9}$
6	本文方法	0	$-1.49943013287087 \times 10^2$	$7.22185051869110 \times 10^0$	$2.16459739021957 \times 10^{-9}$
	美国商业软件 Zemax	0	$-1.49943013290000 \times 10^2$	$7.22185051870000 \times 10^0$	$8.48085619509220 \times 10^{-7}$
7	本文方法	0	$-1.53288434563366 \times 10^2$	$2.17676371435573 \times 10^0$	$4.69299266114831 \times 10^{-10}$
	美国商业软件 Zemax	0	$-1.53288434560000 \times 10^2$	$2.17676371440000 \times 10^0$	$1.51018321048468 \times 10^{-6}$
8	本文方法	0	$-1.62777534965079 \times 10^2$	$-4.82758062839639 \times 10^0$	$1.53522705659270 \times 10^{-9}$
	美国商业软件 Zemax	0	$-1.62777534960000 \times 10^2$	$-4.82758062840000 \times 10^0$	$1.67483449331485 \times 10^{-6}$

表 4 (续) 卡塞格林型空间相机光线追迹结果  
Table 4 (continued). Results of ray tracing algorithm for Cassegrain space camera.

面序号	算法类别	交点 $P$ 坐标			残差 $ F(P_x, P_y, P_z) $
		$P_x$	$P_y$	$P_z$	
9	本文方法	0	$-1.68760549772527 \times 10^2$	$3.15420842636740 \times 10^0$	$1.62981450557709 \times 10^{-9}$
	美国商业软件Zemax	0	$-1.68760549770000 \times 10^2$	$3.15420842640000 \times 10^0$	$1.14553768071346 \times 10^{-6}$
10	本文方法	0	$-1.84834455036683 \times 10^2$	$-6.12729217781634 \times 10^0$	$4.67116478830576 \times 10^{-9}$
	美国商业软件Zemax	0	$-1.84834455040000 \times 10^2$	$-6.12729217780000 \times 10^0$	$1.32187415147200 \times 10^{-6}$
11	本文方法	0	$-1.94567071101658 \times 10^2$	$1.03295178756579 \times 10^1$	$3.26690496876836 \times 10^{-9}$
	美国商业软件Zemax	0	$-1.94567071100000 \times 10^2$	$1.03295178760000 \times 10^1$	$1.89214915735647 \times 10^{-6}$
12	本文方法	0	$-2.18853927906069 \times 10^2$	0	$5.68434188608080 \times 10^{-13}$
	美国商业软件Zemax	0	$-2.18853927910000 \times 10^2$	0	$3.93043819713057 \times 10^{-9}$
13	本文方法	0	$-2.18933499087856 \times 10^2$	0	$1.08002495835535 \times 10^{-12}$
	美国商业软件Zemax	0	$-2.18933499090000 \times 10^2$	0	$2.14291162592417 \times 10^{-9}$
14	本文方法	0	$-2.19063914207259 \times 10^2$	0	$7.95807864051312 \times 10^{-13}$
	美国商业软件Zemax	0	$-2.19063914210000 \times 10^2$	0	$2.7402227131354 \times 10^{-9}$

表 5 离轴三反型空间相机光学结构参数列表  
Table 5. Parameter list for off-axis three-mirror-anastigmat space camera.

序号	表面类型	曲率半径	厚度	材料	膜层	净口径	机械半径	圆锥系数
0	物面-标准面	Inf	Inf	—————	0	Inf	Inf	0
1	标准面	Inf	633.705045750000	—————	0	367.133805130855	367.133805130855	0
2	偶次非球面	-2692.02764249986	-633.705045750000	MIRROR	0	271.014896814696	271.014896814696	-2.60071000000000
3	光阑-偶次非球面	-963.1580999999982	633.705045750000	MIRROR	0	45.500175946250	45.500175946250	-0.76689900000000
4	偶次非球面	-1476.14695499995	-1132.48912577100	MIRROR	0	251.605408250266	251.605408250266	0.01160100000000
5	像面-标准面	Inf	—————	—————	0	231.196769640532	231.196769640532	0

#### 4.4 含有非球面的离轴三反空间相机光学系统

离轴三反系统具有高分辨率、大视场、长焦距等特点, 被广泛应用于空间相机设计中, 其光学结构如图 8 所示. 选取的光学结构参数如表 5 所列, 此实例的各个面不再为标准面, 均为偶次非球面. 其中, 面型 2 的 6 阶和 8 阶非球面系数分别为

$-7.657286584362001 \times 10^{-23}$ ,  $2.004316824874000 \times 10^{-23}$ , 而面型 4 的 6 阶非球面系数为  $-4.379306666667000 \times 10^{-18}$ . 选取归一化后 Y 视场最大坐标, 归一化 Y 光瞳最大坐标, 即 (0, 1, 0, 1) 这条单光线经过离轴三反型光学系统后, 光线与各面交点坐标与美国商业软件 Zemax 进行精度验证, 数据结果如表 6 所列. 本文计算到小数点后 14 位, Zemax 只能显示 11 位有效数字, 本文的方法和 Zemax 显示的 11 位有效数字完全一致.

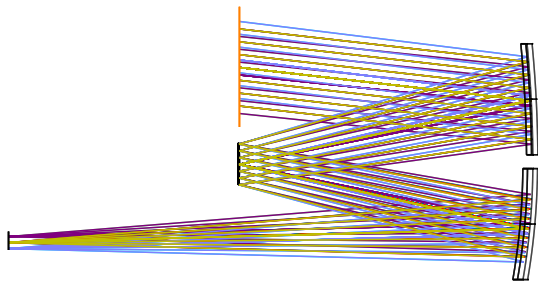


图 8 离轴三反型空间相机

Fig. 8. Off-axis three-mirror-anastigmat space camera.

#### 5 结论

光线追迹是空间相机设计的核心算法, 也是研究物理相关问题的重要方法. 本文推导了光线追迹误差模型, 并基于此进行了高精度算法设计, 将空间变换、方向向量自适应缩放、重投影和高精度一元二次方程求解方法应用到了误差控制中. 该方法

表 6 离轴三反型空间相机单光线追迹与 Zemax 数值比较  
Table 6. Single ray tracing for off-axis three-mirror-anastigmat space camera.

面序号	算法类别	交点 $P$ 坐标			残差 $ F(P_x, P_y, P_z) $
		$P_x$	$P_y$	$P_z$	
OBJ	本文方法	0	Inf	Inf	0
	美国商业软件 Zemax	0	Inf	Inf	0
1	本文方法	0	$-2.01651556349517 \times 10^2$	0	$4.62705429526977 \times 10^{-11}$
	美国商业软件 Zemax	0	$-2.01651556350000 \times 10^2$	0	$4.36727987107588 \times 10^{-10}$
2	本文方法	0	$-1.03337392022989 \times 10^2$	$-1.98221886405031 \times 10^0$	$6.78487441703801 \times 10^{-13}$
	美国商业软件 Zemax	0	$-1.03337392020000 \times 10^2$	$-1.98221886410000 \times 10^0$	$1.63615205928275 \times 10^{-10}$
3	本文方法	0	$4.55199992296308 \times 10^1$	$-1.07580474621568 \times 10^0$	$3.79696274421804 \times 10^{-14}$
	美国商业软件 Zemax	0	$4.55199992300000 \times 10^1$	$-1.07580474620000 \times 10^0$	$3.30953042748661 \times 10^{-11}$
4	本文方法	0	$2.52430579518327 \times 10^2$	$-2.17467853091218 \times 10^1$	$1.98810369209101 \times 10^{-13}$
	美国商业软件 Zemax	0	$2.52430579520000 \times 10^2$	$-2.17467853090000 \times 10^1$	$4.12472341438513 \times 10^{-10}$
5	本文方法	0	$2.32101258958268 \times 10^2$	0	$6.82121026329696 \times 10^{-13}$
	美国商业软件 Zemax	0	$2.32101258960000 \times 10^2$	0	$1.73130842995306 \times 10^{-9}$

的特点是易于借助计算机编程实现,对各种面型都适用.以单光线与单面、球面和非球面的卡塞格林型空间相机和离轴三反空间相机光学系统进行了精度验证,较原有方法在精度上提高了 5—6 个数量级,比国外商用光学设计软件可显示的数值在精度上提升了 4 个数量级,且残差平均比其小近 3 个数量级.本文提出的高精度光线追迹精度模型和算法对物理问题的分析研究起到了推动作用,同时也为研制具有自主知识产权的国产光学仿真软件提供了可行的新方法.

## 参考文献

- [1] Guo J, Zhu L, Zhao J, Gong D P 2021 *Opt. Precision Eng.* **27** 1138 (in Chinese) [郭疆,朱磊,赵继,龚大鹏 2021 光学精密工程 **27** 1138]
- [2] Gao Y, Wang S X, Qi G, Sun B, San B, Li J L 2022 *Opt. Techn.* **48** 562 (in Chinese) [高洋,王书新,齐光,孙斌,伞兵,李景林 2022 光学技术 **48** 562]
- [3] Meng Q Y, Wang H Y, Wang W, Qin Z C, Wang X D 2021 *Opt. Precision Eng.* **29** 72 (in Chinese) [孟庆宇,汪洪源,王唯,秦子长,王晓东 2021 光学精密工程 **29** 72]
- [4] Zhong C L, Sang X Z, Yan B B, Li H, Chen D, Qin X J 2022 *Opt. Express* **30** 40087
- [5] Appel A 1968 *Proceedings of Spring Joint Computer Conference Atlantic City, New Jersey, USA, 30 April–2 May 1968* pp37–45
- [6] Whitted T 1980 *Commun. ACM* **23** 6
- [7] Veach E 1997 *Ph. D. Dissertation* (Stanford: Stanford University)
- [8] Braddick H J J 1960 *Rep. Prog. Phys.* **23** 154
- [9] Wang Z J 1985 *Fundamental Theory of Lens Design* (2nd Ed.) (Beijing: Science Press) pp3–36 (in Chinese) [王之江 1985 光学设计理论基础 (第二版) (北京:科学出版社) 第3–36 页]
- [10] Wang Y T 1990 *Opt. Techn.* **5** 2 (in Chinese) [王涌天 1990 光学技术 **5** 2]
- [11] Li L, An L S 2002 *Theory and Application of Computer Aided Optical Design* (Beijing: National Defense Industry Press) pp1–38 (in Chinese) [李林,安连生 2002 计算机辅助光学设计的理论与应用 (北京:国防工业出版社) 第1–38 页]
- [12] Li X T, Cen Z F 2021 *Geometrical Optics, Aberrations and Optical Design* (4th Ed.) (Hangzhou: Zhejiang University Press) pp162–179 (in Chinese) [李晓彤,岑兆丰 2021 几何光学·像差·光学设计 (第4版) (杭州:浙江大学出版社) 第162–179 页]
- [13] Zhang Y M, Zhang H X, Jia D G 2021 *Applied Optics* (5th Ed.) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp14–21 (in Chinese) [张以谟,张红霞,贾大功 2021 应用光学 (第5版) (北京:电子工业出版社) 第14–21 页]
- [14] Marrs A, Shirley P, Wald I 2021 *Ray Tracing Gems II: Next Generation Real-Time Rendering with DXR, Vulkan, and OptiX* (1st Ed.) (New York: Apress) pp545–550
- [15] Bu Z C, Zhang C M, Zhu H C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2415 (in Chinese) [步志超,张淳民,赵葆荣,朱化春 2009 物理学报 **58** 2415]
- [16] Spence S E, Parks A D 2016 *Appl. Opt.* **55** C46
- [17] Wang N, Ruan S C 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 024201 (in Chinese) [王楠,阮双琛 2020 物理学报 **69** 024201]
- [18] Schedin S, Hallberg P, Behndig A 2017 *Appl. Opt.* **56** 9787
- [19] Ferrer-Rodríguez J P, Saura J M, Fernández E F, Almonacid F, Talavera D L, Pérez-Higueras P 2020 *Opt. Express* **28** 6609
- [20] Huang F, Ren H, Shen Y, Wang P F 2021 *Appl. Opt.* **60** 2574
- [21] Sun Q L, Wang C L, Fu Q, Dun X, Heidrich W 2021 *ACM Trans. Graph.* **40** 71
- [22] Halé A, Trouvé-Peloux P, Volatier J B 2021 *Opt. Express* **29** 34748
- [23] Liu A Q, Su L J, Yuan Y, Ding X M 2020 *Opt. Express* **28** 2251
- [24] Marschner S, Shirley P 2022 *Fundamentals of Computer Graphics* (5th Ed.) (New York: CRC Press) pp80–95
- [25] Higham N J 2002 *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd Ed.) (Philadelphia: SIAM) pp35–60
- [26] Fousse L, Hanrot G, Lefèvre V, Pélissier P, Zimmermann P 2007 *ACM Trans. Math. Softw.* **33** 13

# High precision ray tracing method for space camera in optical design\*

Wu Chang-Mao<sup>1)2)</sup> Tang Xiong-Xin<sup>1)2)†</sup> Xia Yuan-Yuan<sup>1)2)</sup>  
Yang Han-Xiang<sup>1)2)</sup> Xu Fan-Jiang<sup>1)2)‡</sup>

1) (*Laboratory of Science and Technology on Integrated Information System, Institute of Software, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

2) (*Hangzhou Institute of Optics and Fine Mechanics, Hangzhou 311421, China*)

( Received 30 December 2022; revised manuscript received 6 February 2023 )

## Abstract

Ray tracing plays a key role in lens design area, and it is an important tool to study the problems in physics like optics. Nowadays, ray tracing becomes ubiquitous and is widely used in optical automatic design, such as aberration analysis, optimization, and tolerance calculation. With the impulse of application requirements, optical systems like space camera develop towards large scale, high degree of accuracy and complication. The magnitude of aberrations increases exponentially with the growth of focal length and aperture, even a minor perturbation error can result in severe degeneration of image quality. As a consequence, the stringent requirements for precision, accuracy and stability of ray tracing turn higher. Reliable commercial software, for example, America's Zemax, has high precision in ray tracing, because of commercial purpose, the process of ray tracing is a black box. It is now more important to understand what error factors are formed for ray tracing, and how these running errors can be reduced effectively. In this paper, from floating point arithmetic perspective, an error model for ray tracing is provided. This error model is suitable for not only meridional rays, but also skew rays. Starting from IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic, presentation error and rounding error are analyzed, followed by the computation process of ray's intersection point with a quadratic surface, then rounding error expression for the intersection point is presented. In addition, error expression for distance along the ray from the reference surface to the next surface is also induced. These two error expressions are called error model, and it clearly indicates that spatial coordinates on the reference surface, direction vector and distance between the two adjacent surfaces are the main error sources. Based on the error model, some of effective measures, for instance, reprojection, spatial transformation, and direction vector's normalization are taken to reduce the rounding error. Moreover, in the process of solving quadratic equation, conjugate number method is utilized in order to avoid increasing substantially in relative error called catastrophic cancellation. Numerical experiments and classical optical design for space camera are also given. From numerical computing view, two precision tests based on Multiple Precision Floating-Point Reliable (MPFR) library are introduced to verify our method mathematically. The experimental results show that our algorithm has the same precision (14 significant digits) as MPFR, while the existing method fails to pass tests, and has only 8 significant digits at most. Moreover, both the Cassegrain space camera and off-axis three-mirror-anastigmat space camera are used to illustrate our method's accuracy. Experimental results indicate that our method has higher precision, more than 5 to 6 orders of magnitudes than the existing method. In addition, our algorithm has higher precision than the commercial optical design software Zemax, and residuals are 3 orders of magnitudes on average less than Zemax.

**Keywords:** ray tracing, error model, numerical algorithm, optical design, space camera

**PACS:** 42.15.Dp, 42.15.Eq, 42.15.-i, 42.15.Fr

**DOI:** 10.7498/aps.72.20222463

\* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2021YFB3601400).

† Corresponding author. E-mail: [xiongxin@iscas.ac.cn](mailto:xiongxin@iscas.ac.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [fanjiang@iscas.ac.cn](mailto:fanjiang@iscas.ac.cn)

用于空间相机设计的高精度光线追迹方法

吴长茂 唐熊忻 夏媛媛 杨瀚翔 徐帆江

**High precision ray tracing method for space camera in optical design**

Wu Chang-Mao Tang Xiong-Xin Xia Yuan-Yuan Yang Han-Xiang Xu Fan-Jiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 084201 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222463

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222463>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

基于元胞自动机的气动光学光线追迹算法

Cellular automata ray tracing in two-dimensional aero-optical flow fields

物理学报. 2020, 69(19): 194201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200532>

光源光谱特性对空间相机调制传递函数检测的影响

Influence of spectral characteristics of light sources on measuring space camera modulation transfer function

物理学报. 2021, 70(13): 134208 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201575>

光线庞加莱球法构建的结构光场及其传输特性研究

Structured beam designed by ray-optical Poincaré sphere method and its propagation properties

物理学报. 2018, 67(22): 224204 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180918>

偏振成像激光雷达与短波红外复合光学接收系统设计与分析

Design and analysis of polarization imaging lidar and short wave infrared composite optical receiving system

物理学报. 2020, 69(24): 244202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200920>

基于矢量像差理论的离轴反射光学系统初始结构设计

Initial configuration design of off-axis reflective optical system based on vector aberration theory

物理学报. 2019, 68(13): 134201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190299>

一种非对称双面离轴非球面反射镜检测补偿变焦光路设计方法

A method of designing asymmetric double-sided off-axis aspheric mirror detection compensation zoom light path

物理学报. 2019, 68(11): 114201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182253>