物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 72, No. 11 (2023) 112501

专题: 高能重离子碰撞过程的自旋与手征效应

费米子的相对论自旋输运理论*

高建华 1)† 盛欣力 2) 王群 3) 庄鹏飞 4)

1) (山东大学空间科学与物理学院, 山东省光学天文与日地空间环境重点实验室, 威海 264209)

2) (INFN-Firenze, Via Giovanni Sansone, 1, 50019 Sesto Fiorentino FI, Italy)

3) (中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

4) (清华大学物理系, 北京 100084)

(2022 年 12 月 31 日收到; 2023 年 3 月 25 日收到修改稿)

在重离子碰撞中, 自旋轨道耦合可以导致整体极化现象. 自从 2017 年, STAR 工作中发现超子 Λ 在 Au+Au 碰撞中的整体极化, 整体极化效应引起了学术界的广泛关注. 整体极化效应的微观产生机制可以利用粒子之间非定域的散射过程来描述: 在重离子碰撞中产生了热密物质, 热密物质中的粒子之间通过非定域的碰撞过程实现了轨道角动量向自旋角动量的转换, 从而导致散射后的粒子自旋极化. 为了描述这一微观过程, 在相空间描述自旋轨道耦合更加方便, 而自旋轨道耦合又是一种量子效应, 所以基于协变维格纳函数的量子动理学理论将是描述整体极化现象的有力工具. 本文介绍了基于维格纳函数的量子动理学理论以及自旋输运理论. 近期自旋输运理论的发展为以后数值模拟自旋极化现象的时空演化提供了理论基础.

关键词: 维格纳函数, 量子输运, 自旋输运理论

PACS: 25.75.Nq, 12.38.Mh **DOI:** 10.7498/aps.72.20222470

1 引 言

在相对论重离子非对心碰撞中, 两个原子核在碰撞平面的法向存在巨大的初始轨道角动量, 在碰撞形成的热密物质中初始轨道角动量通过物质粒子的自旋轨道相互作用转变为末态粒子的自旋角动量, 这种自旋极化效应被称为整体极化效应[1], 它是相对于碰撞平面的, 因此有别于在质子质子碰撞中的自旋极化效应. 2017 年 STAR (solenoidal tracker at RHIC) 合作组在重离子碰撞实验中观察到了 Λ 超子的整体极化效应[2]. 自从 STAR 实验观测发表之后, 整体极化效应引起了学术界的广泛关注. 描述整体极化效应的理论和现象学模型有很多, 在理论方面, 有粒子碰撞自旋轨道耦合理论[3–6]、量子统计理论[7–10]、基于量子动理学的自旋输运理论[11–21]、自旋流体力学理论[22–26] 等; 在现象学模型方面, 主要有输运模型和流体力学模型等 (见综述文献 [27—30]). 本文将介绍自旋为 1/2 的有质量费米子的自旋输运理论及其最新进展, 它基于以维格纳函数为基本构造单元的量子动理学 (见综述文献 [31—33]).

本文首先介绍无碰撞项的量子动理学方程, 包括协变维格纳函数方法和等时维格纳函数方法, 然后介绍有碰撞项的自旋动理学方程, 包括基于 Kadanoff-Baym 方程的自旋动理学、基于量子场论方法的自旋动理学以及其他方法.

2 无碰撞项的量子动理学方程

近年来, 为了描述相对论重离子碰撞中可能存在的各种手征效应, 比如手征磁效应、手征涡旋效

* 国家自然科学基金 (批准号: 11890710, 11890713, 12175123, 12135011) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gaojh@sdu.edu.cn

应、手征分离效应等, 人们建立并发展了手征动理学理论[34–45]并逐步实现了数值模拟计算[46–53], 这一理论被证明是可以描述手征量子效应的成功理论.

但是手征动理学理论只适用于无质量的费米子, 相对论重离子碰撞中夸克的质量其实并不是零, 只有在高能情形下可以近似为零. 尤其最近几年在 RHIC (relativistic heavy ion collider) 实验中发现在较低能量情形下超子的整体极化现象更明显[2]. 在当前情形下, 超越手征极限, 发展一个有限质量情形下的量子动理学理论成为必要, 成为了近年来这一方向的热点理论问题, 并取得了很大的发展, 这一点在综述文章 [29—33] 已有介绍和总结. 本文将总结一下最近几年在这方面的理论进展, 但主要集中在维格纳函数方法推导动理学方程的工作, 并且都采取了背景场近似而忽略了碰撞项[12–16]. 希望通过这些总结, 读者能够很清晰地看出维格纳函数方法的独特性、以及各种不同结果的相似性和差异性, 从而可以对这一方向有一个大致的了解.

2.1 协变维格纳函数方法

维格纳函数是维格纳首先在 1932 年基于量子力学引入的、用于描述微观粒子相空间运动的分布函数[54]. 它与经典相空间分布函数的差别是维格纳函数不是正定的, 对于单粒子运动, 它由波函数的两点关联函数确定, 是与波函数等效的量子力学描述. 自从 20 世纪八十年代, 为了描述相对论重离子碰撞产生的多粒子系统的量子输运过程, 人们开始发展基于量子场论的协变维格纳函数方法[55–57]. 在量子场论中首先定义协变的维格纳算符, 对于狄拉克费米子体系, 它是双线性狄拉克场, 在旋量空间是4×4的矩阵算符:

$$\widehat{W}_{\alpha\beta}(x,p)=\int\frac{\mathrm{d}^4y}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot y}\bar{\psi}_\beta\left(x_+\right)\times U\left(x_+,x_-\right)\psi_\alpha\left(x_-\right), \tag{1}$$

其中U代表连接两点$x_-\equiv x-y/2$和$x_+\equiv x+y/2$的直线规范链, 它与施加给费米子系统的外电磁场有关. 在上面的维格纳算符的定义式中, 可以改变y的符号, 即$y\to-y$, 则$x_+\leftrightarrow x_-$, 这样即可得到完全等价的维格纳函数. 另外, (1) 式中的因子$(2\pi)^4$也是一种约定, 在有的文献中是没有这个因子的[21], 见第 3.1 节中的维格纳函数定义式 (28). 维格纳函数就定义为维格纳算符在密度矩阵ρ下的系综平均值:

$$W(x,p)=\mathrm{Tr}\left[\rho\hat{W}(x,p)\right], \tag{2}$$

本节将要介绍的工作[12,13,15,16]都是基于这些定义开展的. 取系综平均后, 维格纳函数就只是在旋量空间4×4的普通矩阵了, 可以把它在 Clifford 代数下进行展开:

$$W(x,p)=\frac{1}{4}\Big[\mathscr{F}+\mathrm{i}\gamma^5\mathscr{P}+\gamma^\mu\mathscr{V}_\mu+\gamma^5\gamma^\mu\mathscr{A}_\mu+\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathscr{S}_{\mu\nu}\Big], \tag{3}$$

其中$\mathscr{F}$代表标量分量, $\mathscr{P}$代表赝标量分量, $\mathscr{V}_\mu$代表矢量分量, $\mathscr{A}_\mu$代表轴矢量 (即自旋矢量) 分量, 而$\mathscr{S}_{\mu\nu}$代表反对称 (极化) 张量分量, 它们都是相空间的分布函数. 这些分量不全是独立的, 根据研究的物理问题, 可以选择不同的分量作为独立变量.

文献 [12] 中选择$\mathscr{F}$和$\mathscr{A}_\mu$作为独立分量, 在按照$\hbar$的半经典展开的一阶近似下, $\mathscr{F}$和$\mathscr{A}_\mu$可以表示为

$$\mathscr{F}=\delta\left(p^2-m^2\right)\mathcal{F}+\frac{\hbar}{m}\tilde{F}_{\mu\nu}p^\mu\mathcal{A}^\nu\delta'\left(p^2-m^2\right), \tag{4}$$

$$\mathscr{A}_\mu=\delta\left(p^2-m^2\right)\mathcal{A}_\mu+\frac{\hbar}{m}p^\nu\tilde{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}\delta'\left(p^2-m^2\right), \tag{5}$$

其中$\tilde{F}_{\mu\nu}=(1/2)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$是电磁场场强张量$F^{\alpha\beta}$的对偶张量, 新引入的分布函数$\mathcal{F}$和$\mathcal{A}_\mu$已经把奇异在壳$\delta$函数扣除掉剩下的正常分布函数了. 这些分布函数满足协变的维格纳方程:

$$p\cdot\nabla\left[\mathcal{F}\delta\left(p^2-m^2\right)+\frac{\hbar}{m}\tilde{F}_{\mu\nu}p^\mu\mathcal{A}^\nu\delta'\left(p^2-m^2\right)\right]=\frac{\hbar}{2m}(\partial_\lambda^x\tilde{F}_{\mu\nu})\partial_p^\lambda\left[p^\mu\mathcal{A}^\nu\delta\left(p^2-m^2\right)\right], \tag{6}$$

$$p\cdot\nabla\left[\mathcal{A}_\mu\delta\left(p^2-m^2\right)+\frac{\hbar}{m}p^\nu\tilde{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}\delta'\left(p^2-m^2\right)\right]=F_{\mu\nu}\left[\mathcal{A}^\nu\delta\left(p^2-m^2\right)+\frac{\hbar}{m}p_\lambda\tilde{F}^{\nu\lambda}\mathcal{F}\delta'\left(p^2-m^2\right)\right]+\frac{\hbar}{2m}(\partial_\lambda^x\tilde{F}_{\mu\nu})\partial_p^\lambda\left[p^\nu\mathcal{F}\delta\left(p^2-m^2\right)\right]. \tag{7}$$

除此之外, $\mathcal{A}_\mu$ 还需要满足一个限制方程$p^\mu\mathcal{A}_\mu\,\delta\left(p^2-m^2\right)=0$. 在上面的公式中定义了算符 $\nabla^\mu\equiv\partial_x^\mu-F^{\mu\nu}\partial_\nu^p$. 这些方程中包含奇异的狄拉克$\delta$函数, 为了去除这些奇异性, 把方程对动量的$p_0=(0,\infty)$分量积分, 得到正能部分的三维动量方程:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathcal{F}\\
=&-\frac{\hbar}{2mE_p}\Big[(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}+E_p\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_x\cdot\boldsymbol{\nabla}_p)\\
&-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}+E_p\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_x\cdot\boldsymbol{\nabla}_p)\boldsymbol{v}\Big]\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_t + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\mathcal{A}}\\
=&\,\mathbf{B}\times\boldsymbol{\mathcal{A}}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}})-\frac{\hbar}{2mE_p}\\
&\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}+E_p\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_x\cdot\boldsymbol{\nabla}_p)\mathcal{F}, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

其中定义速度矢量$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/E_p$, 能量$E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$以及算符$\nabla_t=\partial_t+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}_p$和$\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\nabla}_x+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla}_p$. 在算符$\boldsymbol{\nabla}_x$上的左向箭头代表算符只作用在左方的电磁场上. 三维动量的动理学方程更适合数值计算.

文献 [13] 也是从有质量费米子的协变维格纳方程出发推导出维格纳函数各分量满足的量子动理学方程, 他们选择了标量分布函数V和反对称(极化) 张量分布函数$\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$作为独立变量:

$$
\mathscr{F}=\delta\left(p^2-m^2\right)mV-\frac{\hbar}{2}F_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu}\delta'\left(p^2-m^2\right), \qquad (10)
$$

$$
\mathscr{S}_{\mu\nu}=\delta\left(p^2-m^2\right)m\bar{\Sigma}_{\mu\nu}-\hbar F_{\mu\nu}V\delta'\left(p^2-m^2\right), \qquad (11)
$$

这些分布函数满足演化方程:

$$
\begin{aligned}
0=&\,\delta(p^2-m^2)\left[p\cdot\nabla V+\frac{\hbar}{4}(\partial_x^\alpha F^{\mu\nu})\partial_\alpha^p\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\right]\\
&-\frac{\hbar}{2}\delta'(p^2-m^2)F^{\alpha\beta}\,p\cdot\nabla\bar{\Sigma}_{\alpha\beta},\\
0=&\,\delta(p^2-m^2)\left[p\cdot\nabla\bar{\Sigma}_{\mu\nu}-F^{\alpha}_{[\mu}\bar{\Sigma}_{\nu]\alpha}+\frac{\hbar}{2}(\partial_x^\alpha F_{\mu\nu})\partial_p^\alpha V\right]\\
&-\hbar\delta'(p^2-m^2)F_{\mu\nu}\,p\cdot\nabla V, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

以及关于$\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$的约束方程

$$
p^\nu\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\,\delta(p^2-m^2)=\frac{1}{2}\hbar\delta(p^2-m^2)\nabla_\mu^{(0)}V\,. \qquad (13)
$$

文献 [13] 只给出了未积分的协变动理学方程, 但是特色之处是发现了这些方程在如下变化下是保持不变的:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\to\hat{\bar{\Sigma}}_{\mu\nu}=\bar{\Sigma}_{\mu\nu}+(p^2-m^2)\delta\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\,,\\
&V\to\widehat{V}=V-\frac{\hbar}{2}F^{\mu\nu}\delta\bar{\Sigma}_{\mu\nu}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

利用这些变换, 方程中的δ函数的导数项可以省略, 从而大大简化了动理学方程的最后结果.

文献 [15] 从$\mathscr{V}^\mu$和$\mathscr{A}^\mu$出发, 利用维格纳方程和自由量子场论的结果, 可以得到$\mathscr{V}^\mu$和$\mathscr{A}^\mu$的一般形式:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}^\mu=&\,2\pi p^\mu f_V\delta(p^2-m^2)+2\pi\tilde{F}^{\mu\nu}a_\nu\delta'(p^2-m^2)f_A\\
&+2\pi\delta(p^2-m^2)G^\mu, \qquad (15)\\
\mathscr{A}^\mu=&\,2\pi a^\mu f_A\delta(p^2-m^2)+2\pi\tilde{F}^{\mu\nu}p_\nu\delta'(p^2-m^2)f_V\\
&+2\pi\delta(p^2-m^2)H^\mu, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

其中G^μ, H^μ, $S^{\mu\nu}_{m(n)}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
G^\mu=&\,\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}n_\nu}{2p\cdot n}\left[\nabla_\rho(a_\sigma f_A)+F_{\rho\sigma}f_A\right],\\
H^\mu=&\,S^{\mu\nu}_{m(n)}\nabla_\nu f_V,\quad S^{\mu\nu}_{m(n)}=\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha n_\beta}{2a\cdot n}\nabla_\nu f_V. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

在这里四矢量n^μ对应于在一个局域参考系的四维速度矢量, 也可认为是自旋量子化的方向. 最后文献 [15] 得到一个标量方程:

$$
\begin{aligned}
0=&\,\delta(p^2-m^2)\bigg[p\cdot\nabla f_V+\hbar\Big(\frac{E_\mu S^{\mu\nu}_{a(n)}}{p\cdot n}\Delta_\nu\\
&+S^{\mu\nu}_{a(n)}(\partial_\mu F_{\rho\nu})\partial_p^\rho+\big(\partial_\mu S^{\mu\nu}_{a(n)}\big)\nabla_\nu\Big)f_A\bigg]\\
&-\frac{\delta'(p^2-m^2)}{p\cdot n}B^\mu\Box_{\mu\nu}\tilde{a}^\nu+\frac{\hbar}{2}\delta(p^2-m^2)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\\
&\times\bigg[\nabla_\mu\left(\frac{n_\beta}{p\cdot n}\right)\left[(\Delta_\nu a_\alpha)+F_{\nu\alpha}\right]+\frac{n_\beta}{p\cdot n}\Big((\partial_\mu F_{\rho\nu})\\
&\times(\partial_p^\rho a_\alpha)+\Big[(\nabla_\nu a_\alpha)-F_{\rho\nu}\big(\partial_p^\rho a_\alpha\big)\Big]\nabla_\mu\Big)\bigg]f_A, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

其中, $E_\mu=n^\nu F_{\mu\nu}$, $B^\mu=\dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}n_\nu F_{\alpha\beta}$, $S^{\mu\nu}_{a(n)}=\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}a_\alpha n_\beta/(2p\cdot n)$是自旋张量. 文献 [15] 得到的另一个方程是轴矢量方程:

$$
\begin{aligned}
0=&\,\delta(p^2-m^2)\Big(p\cdot\Delta(a^\mu f_A)+F^{\nu\mu}a_\nu f_A\Big)+\hbar p^\mu\\
&\times\bigg\{\delta(p^2-m^2)\bigg[(\partial_\alpha S^{\alpha\nu}_{m(n)})\nabla_\nu+\frac{S^{\alpha\nu}_{m(n)}E_\alpha\Delta_\nu}{p\cdot n+m}\\
&+S^{\rho\nu}_{m(n)}(\partial_\rho F_{\beta\nu})\partial_p^\beta\bigg]-\delta'(p^2-m^2)\frac{p\cdot B}{p\cdot n+m}p\cdot\nabla\bigg\}\\
&\times f_V+\hbar m\bigg\{\frac{\delta(p^2-m^2)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{2(p\cdot n+m)}\bigg[m(\partial_\alpha n_\beta)\nabla_\nu\\
&+(mn_\beta+p_\beta)\bigg(\frac{\big(E_\alpha-\partial_\alpha(p\cdot n)\big)}{p\cdot n+m}\nabla_\nu-(\partial_\nu F_{\rho\alpha})\partial_p^\rho\bigg)\bigg]\\
&+\delta'(p^2-m^2)\frac{(mn_\beta+p_\beta)\tilde{F}^{\mu\beta}}{p\cdot n+m}p\cdot\nabla\bigg\}f_V. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

文献 [15] 的工作中分析了如何从有限质量到零质

量的平滑过渡问题.

文献 [16] 发展了弯曲时空中的有质量费米子的量子动理学方程, 这些量子动理学方程保证了在 $U(1)$规范变换、定域洛伦兹变换和一般微分同胚映射下都是协变的, 从而保证了与广义相对论基本原理相一致. 在此情形下, 文献 [16] 给出 $\mathscr{V}^\mu$ 和 $\mathscr{A}^\mu$ 的具体形式:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}^\mu = 4\pi \Big[& \delta(p^2-m^2)\left(p^\mu f + \frac{\hbar}{2p\cdot n}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} n_\nu \Delta_\rho \bar{\mathcal{A}}_\sigma\right) \\
& + \hbar\delta'(p^2-m^2)\tilde{F}^{\mu\nu}\left(\bar{\mathcal{A}} - \frac{p\cdot\mathcal{A}}{p\cdot n} n_\nu\right)\Big], \\
\mathscr{A}^\mu = 4\pi \Big[& \delta(p^2-m^2) m\theta^\mu f_A + \hbar\delta'(p^2-m^2)\tilde{F}^{\mu\nu} p_\nu f\Big].
\end{aligned} \tag{20}
$$

而最终的量子动理学方程由四个独立的演化方程组成:

$$
\begin{aligned}
0 = & \delta(p^2 - m^2 \mp \Sigma_S^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) \\
& \times \left\{ \left[p^\mu \Delta_\mu \pm \frac{\hbar}{2}\Sigma_S^{\mu\nu}\left(\mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu} - p_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\right)\partial_p^\rho\right] f_\pm \right.\\
& \left. + \frac{\hbar}{2} f_A \left(\mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu} - p_\lambda R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\right)\partial_p^\rho \Sigma_S^{\mu\nu}\right\},
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = & \delta(p^2-m^2)\Big[f_A p\cdot\Delta\theta^\mu - f_A F^{\mu\nu}\theta_\nu + \theta^\mu p\cdot\Delta f_A \\
& - \frac{\hbar}{4m}\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} p_\alpha \left(\mathcal{D}_\sigma F_{\nu\rho} - p_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho}\right)\partial_p^\sigma f\Big].
\end{aligned} \tag{22}
$$

在上面的公式中 $\Delta_\mu = \mathcal{D}_\mu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} p_\lambda \partial_p^\nu - F_{\mu\nu}\partial_p^\nu$, 其中 $\mathcal{D}_\mu$ 是表征一般坐标变换下的协变导数; n^μ 是类时矢量, 满足归一化条件 $n^2=1$ 和横向条件 $p\cdot n \neq 0$; θ^μ 是类光横向矢量, 满足 $\theta^\mu\theta_\mu = 0$ 和 $p^\mu\theta_\mu = 0$; 分布函数 $f_\pm = (f\pm f_A)/2$ 以及 $\Sigma_S^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\theta_\rho p_\sigma/2m$; 公式中的 $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ 是黎曼张量. 文献 [16]也讨论了如何从有质量动理学方程过渡到无质量情形下的手征动理学方程.

2.2 等时维格纳函数方法

等时维格纳函数[58,59] 是把协变维格纳函数的 p_0 积分掉得到的:

$$
\mathcal{W}(x,\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}p_0 W(x,p)\gamma^0. \tag{23}
$$

相应地也可以得到等时维格纳函数的量子动理学方程. 把 p_0 积分掉的主要优点是使动理论方程变成可以求解的初始问题, 且不论粒子是否处于质壳上. 等时维格纳函数可以分解为[14]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W} = & \frac{1}{4}[f_0 + \gamma_5 f_1 - \mathrm{i}\gamma_0\gamma_5 f_2 + \gamma_0 f_3 + \gamma_5\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_0 \\
& + \gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_2 - \gamma_5\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{g}_3].
\end{aligned} \tag{24}
$$

如果选择费米子数密度 f_0 和自旋流 $\boldsymbol{g}_0$ 作为独立变量, 则它们满足的动理学方程为

$$
\begin{aligned}
& \left(\nabla_t \pm \frac{\boldsymbol{p}}{E_p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right) f_0^\pm \\
= & \frac{\hbar \boldsymbol{E}}{2E_p^2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}_0^\pm \mp \frac{\hbar}{2E_p^3}\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{g}_0^\pm \\
& + \frac{\hbar\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{p}}{E_p^4}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{g}_0^\pm,
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(\nabla_t \pm \frac{\boldsymbol{p}}{E_p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{g}_0^\pm \\
= & \frac{1}{E_p^2}\left[\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{g}_0^\pm) \mp E_p \mathbf{B}\times\boldsymbol{g}_0^\pm\right] \\
& \mp \hbar\left(\frac{\boldsymbol{B}}{2E_p^3} \pm \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p}}{2E_p^4}\right)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla} f_0^\pm \\
& \mp \hbar\left(\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p})}{E_p^5} \pm \frac{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})}{2E_p^4}\right) f_0^\pm,
\end{aligned} \tag{26}
$$

其中上标“+”和“–”分别代表粒子和反粒子. 作者还选择了另一个独立的磁矩分布函数 $\boldsymbol{g}_3$ 来代替自旋分布函数 $\boldsymbol{g}_0$, 其满足的演化方程为

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{p}\cdot\left(\nabla_t \pm \frac{\boldsymbol{p}}{E_p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{g}_3^\pm \\
= & -\frac{\boldsymbol{p}^2}{E_p^2}\left(\boldsymbol{E} \pm \frac{\boldsymbol{p}}{E_p}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{g}_3^\pm \mp \frac{m^2}{E_p^3}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{g}_3^\pm) \\
& + \frac{m}{2E_p^4}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})f_0^\pm \mp \frac{m}{2E_p^3}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\nabla})f_0^\pm \\
& \pm \frac{3m}{2E_p^5}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})f_0^\pm \pm \frac{m\mathbf{p}^2}{2E_p^5}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E})f_0^\pm.
\end{aligned} \tag{27}
$$

文献 [14] 还分析了质量效应对手征动理学方程的修正, 发现在质量展开的一阶项, 质量修正更像附加的碰撞项, 对手征动理学方程的结构并没有影响.

近来还有一些工作研究了从有限质量量子动理学方程到手征动理学方程的平滑过渡问题[17,60,61], 在最近的工作[61] 中, 研究者利用维格纳函数方法推导出了推广的手征动理学方程, 实现了量子动理学方程从有质量到无质量的平滑过渡.

3 有碰撞项的自旋动理学方程

在相对论重离子非对心碰撞中, 两个原子核在碰撞平面的法向存在巨大的初始轨道角动量, 在碰撞形成的热密物质中初始轨道角动量通过物质粒子的自旋轨道相互作用转变为末态粒子的自旋角动量, 从微观上看, 这一过程是通过粒子间的非定域碰撞实现的[1,19–21,62]. 本节将简要介绍关于自旋为 1/2 的费米子系统的带碰撞项的自旋动理学的理论进展.

3.1 基于 Kadanoff-Baym 方程的自旋动理学

为了研究自旋为 1/2 的费米子系统, 考虑其定义在闭时路径上的格林函数[63,64]:

$$
\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}(x,p) &\equiv \int \mathrm{d}^4 y \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot y} \left\langle T_{\mathrm{C}} \psi_\alpha \left(x+\frac{y}{2}\right) \overline{\psi}_\beta \left(x-\frac{y}{2}\right) \right\rangle \\
&\equiv \begin{pmatrix} G^F_{\alpha\beta}(x,p) G^<_{\alpha\beta}(x,p) \\ G^>_{\alpha\beta}(x,p) G^{\bar{F}}_{\alpha\beta}(x,p) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{28}
$$

其中 T_{C} 表示按照算符在闭时路径上的顺序进行排序. 该路径从某初始时刻 t_0 开始, 沿时间方向到达 $t\to+\infty$, 然后返回 t_0 时刻. 该路径的上半分支的方向与时间方向一致, 下半分支的方向则相反. 因此根据 $x\pm y/2$ 在路径上的位置, 可以将上述格林函数表示为 2×2 的矩阵形式, 其中第一行和第二行分别对应于 $x+y/2$ 处于路径的顺时和逆时部分, 第一列和第二列分别对应于 $x-y/2$ 处于路径的顺时和逆时部分. 对算符 ψ 和 $\overline{\psi}$ 之间的相对位置做傅里叶变换, 即得到相空间中的两点格林函数, 也叫作维格纳函数. 从闭时路径上的戴森-施温格方程出发, 可以得到格林函数满足的 Kadanoff-Baym 方程, 其中 $G^<(x,p)$ 满足以下方程:

$$
\begin{aligned}
&\left[\gamma\cdot\left(p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\partial\right)-m\right]G^<(x,p) \\
=&-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left[\Sigma^<(x,p)G^>(x,p)-\Sigma^>(x,p)G^<(x,p)\right] \\
&-\frac{\hbar^2}{4}\Big[\left\{\Sigma^<(x,p),G^>(x,p)\right\}_{\mathrm{PB}} \\
&-\left\{\Sigma^>(x,p),G^<(x,p)\right\}_{\mathrm{PB}}\Big],
\end{aligned} \tag{29}
$$

式中, Σ 表示由于相互作用导致的自能修正, $\{A,B\}_{\mathrm{PB}}\equiv(\partial_x A)\cdot(\partial_p B)-(\partial_p A)\cdot(\partial_x B)$ 为泊松括号. 对方程 (30) 右边的碰撞项进行关于普朗克常数 $\hbar$ 的准经典展开, 并保留 $\hbar$ 的领头阶与次领头阶项. 方程 (30) 的共轭方程为

$$
\begin{aligned}
&G^<(x,p)\left[\gamma\cdot\left(p-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}\right)-m\right] \\
=&-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left[G^<(x,p)\Sigma^>(x,p)-G^>(x,p)\Sigma^<(x,p)\right] \\
&-\frac{\hbar^2}{4}\Big[\left\{G^<(x,p),\Sigma^>(x,p)\right\}_{\mathrm{PB}} \\
&-\left\{G^>(x,p),\Sigma^<(x,p)\right\}_{\mathrm{PB}}\Big],
\end{aligned} \tag{30}
$$

其中的相互作用项可以通过交换方程 (30) 中的 G 和 Σ 得到.

由于维格纳函数满足 $G^{<\dagger}=\gamma^0 G^<\gamma^0$, 因此可以用 Clifford 代数的 16 个生成元:

$$
\Gamma_a\in\left\{1,\mathrm{i}\gamma^5,\gamma^\mu,\gamma^5\gamma^\mu,\sigma^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right\}, \tag{31}
$$

展开为如下形式:

$$
G^<(x,p)=\frac{1}{4}\left(\mathcal{F}+\mathrm{i}\gamma^5\mathcal{P}+\gamma^\mu\mathcal{V}_\mu+\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu+\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\mathcal{S}_{\mu\nu}\right), \tag{32}
$$

展开系数 $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{V}_\mu$, $\mathcal{A}_\mu$, 以及 $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ 都是定义在相空间中的实函数, 它们分别是维格纳函数的标量、赝标量、矢量、轴矢量和张量分量, 可以通过 $\mathrm{Tr}(\Gamma_a G^<)$ 得到. 这些维格纳函数分量都具有明显的物理含义, 例如矢量分量 $\mathcal{V}_\mu$ 表示相空间中的粒子数 (守恒荷) 流密度, 轴矢量分量 $\mathcal{A}_\mu$ 表示相空间中的自旋流密度, 等等. 文献 [21] 通过将方程 (30) 左乘 $\gamma\cdot(p+\mathrm{i}\hbar\partial/2)+m$, 然后向 Clifford 代数的生成元 Γ_a 上投影, 并分离实部与虚部, 得到了上述分量满足的质壳条件以及玻尔兹曼方程:

$$
\begin{aligned}
&\left(p^2-\frac{\hbar^2}{4}\partial_x^2-m^2\right)\ \mathrm{Tr}(\Gamma_a G^<) \\
&=\mathrm{ReTr}\left\{\Gamma_a\left[\gamma\cdot\left(p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\partial_x\right)+m\right]I_{\mathrm{coll}}\right\} \\
&\hbar p\cdot\partial_x\ \mathrm{Tr}(\Gamma_a G^<) \\
&=\mathrm{ImTr}\left\{\Gamma_a\left[\gamma\cdot\left(p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\partial_x\right)+m\right]I_{\mathrm{coll}}\right\},
\end{aligned} \tag{33}
$$

其中 I_{coll} 代表方程 (30) 右边的碰撞项. 文献 [21] 通过分析碰撞项 I_{coll} 满足的约束, 发现在玻尔兹曼方程中, 维格纳函数与 I_{coll} 的离壳部分在相互作用的领头阶恰好抵消, 这大大简化了玻尔兹曼方程. 他们还引入了粒子的矩阵形式的自旋分布函数

$f_{\rm sr}^{(+)}$ $(r, s=+,-)$, 其定义如下:

$$f_{\rm sr}^{(+)}(x,p) \equiv \int \frac{{\rm d}^4 q}{2(2\pi)^3}\delta(p\cdot q){\rm e}^{-{\rm i}q\cdot x} \times \left\langle a_s^\dagger\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)a_r\left(\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right\rangle. \tag{34}$$

将粒子的产生与湮灭算符 $a^\dagger$ 和 a 替换为反粒子的相应算符 $b^\dagger$ 和 b, 即得到反粒子的自旋分布函数 $f_{\rm sr}^{(-)}$. 文献 [21] 还进一步假设了维格纳函数的在壳部分完全由上述分布函数给出, 其中标量及轴矢量分量为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,p) =& -2\pi\hbar\frac{m}{E_p}\left\{\delta(p_0-E_p){\rm tr}\left[f^{(+)}(x,p)\right]\right.\\&\left.+\delta(p_0+E_p){\rm tr}\left[f^{(-)}(x,\bar{p})-1\right]\right\},\\ \mathcal{A}^\mu(x,p) =& -2\pi\hbar\frac{m}{E_p}\left\{\delta(p_0-E_p)n_j^\mu(p)\right.\\&\times{\rm tr}\left[\boldsymbol{\tau}_j^{\rm T}f^{(+)}(x,p)\right]+\delta(p_0+E_p)n_j^\mu(\bar{p})\\&\left.\times{\rm tr}\left[\boldsymbol{\tau}_j^{\rm T}f^{(-)}(x,\bar{p})\right]\right\},\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_j$ $(j=1,2,3)$ 是自旋指标 rs 空间中的泡利矩阵, $j=1,2,3$ 标记在费米子静止系中的三个基矢方向, 其中一个基矢方向被选为自旋量子化方向, $n_j^\mu(p)$ 是沿着 j 方向的极化矢量:

$$n_j^\mu(p) = \left(\frac{\boldsymbol{n}_j\cdot\boldsymbol{p}}{m},\ \boldsymbol{n}_j+\frac{\boldsymbol{n}_j\cdot\boldsymbol{p}}{m(E_p+m)}\boldsymbol{p}\right), \tag{36}$$

这里的 $\boldsymbol{n}_j$ 是费米子或反费米子静止系中的三维基矢量, 构成右手直角坐标系, 其中 $\boldsymbol{n}_3$ 的方向设定为自旋量子化的方向. 依据维格纳函数的物理意义, 可以将 ${\rm tr}\left[f^{(\pm)}(x,p)\right]$ 解释为相空间中的粒子 (守恒荷) 数密度, 将 ${\rm tr}\left[\boldsymbol{\tau}_j^{\rm T}f^{(\pm)}(x,p)\right]$ 解释为相空间中的沿着 j 方向的自旋密度. 将方程 (33) 与方程 (35) 结合, 并通过对 $p_0>0$ 积分分离粒子部分, 即得到粒子数密度和自旋密度的玻尔兹曼方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\hbar}{E_p}p\cdot\partial_x{\rm tr}\left[f^{(+)}(x,p)\right]\\&=-2\int\frac{{\rm d}p_0}{2\pi\hbar}{\rm ImTr}(I_{\rm coll}^{\rm on})-\frac{\hbar}{m}\int\frac{{\rm d}p_0}{2\pi\hbar}{\rm ReTr}(\gamma\cdot\partial_x I_{\rm coll}^{\rm on}),\\&\frac{\hbar}{E_p}p\cdot\partial_x{\rm tr}\left[n_j^\mu(p)\boldsymbol{\tau}_j^{\rm T}f^{(+)}(x,p)\right]\\&=\frac{1}{m}\int\frac{{\rm d}p_0}{2\pi\hbar}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\nu\ {\rm ImTr}(\sigma_{\alpha\beta}I_{\rm coll}^{\rm on})\\&\quad+\frac{\hbar}{m}\int\frac{{\rm d}p_0}{2\pi\hbar}\ {\rm ReTr}(\gamma^5\partial_x^\mu I_{\rm coll}^{\rm on}).\end{aligned} \tag{37}$$

文献 [21] 以 Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型的四费米子相互作用为例, 对 2-2 散射过程带来的自能修正 $\varSigma$ 进行了计算, 并给出了 (37) 式中的碰撞项在 $\hbar$ 的零阶与一阶的具体形式. 在 $\hbar$ 的一阶, 碰撞项依赖于分布函数的梯度, 因此可以导致轨道角动量与自旋之间的相互转化.

文献 [18] 对维格纳函数以及自能 $\varSigma$ 均采取了 (32) 式的分解, 并假设各分量的阶数如下:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}\sim\mathcal{O}(\hbar^0),\ \ \mathcal{V}^\mu\sim\mathcal{O}(\hbar^0),\ \ \mathcal{A}^\mu\sim\mathcal{O}(\hbar),\\&\mathcal{S}^{\mu\nu}\sim\mathcal{O}(\hbar),\ \ \mathcal{P}\sim\mathcal{O}(\hbar^2),\\&\Sigma_F\sim\mathcal{O}(\hbar^0),\ \ \Sigma_V^\mu\sim\mathcal{O}(\hbar^0),\ \ \Sigma_A^\mu\sim\mathcal{O}(\hbar),\\&\Sigma_T^{\mu\nu}\sim\mathcal{O}(\hbar),\ \ \Sigma_P\sim\mathcal{O}(\hbar^0).\end{aligned} \tag{38}$$

精确到 $\hbar$ 阶, 文献 [18] 得到了如下方程:

$$\begin{aligned}&\delta(p^2-m^2)\Big\{p\cdot\partial(a^\mu f_A)+a^\mu p_\nu\widehat{\Sigma_V^\nu f_A}+m^2\widehat{\Sigma_A^\mu f_V}\\&-p^\mu p_\nu\widehat{\Sigma_A^\nu f_V}+m\left(a^\mu\widehat{\Sigma_S f_A}-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\nu\widehat{\Sigma_{T\rho\sigma}f_V}\right)\\&+\hbar\Big[p^\mu S_{m(n)}^{\rho\nu}(\partial_\rho\widehat{\Sigma_{V\nu})f_V}-m\Big(S_{m(n)}^{\mu\nu}(\partial_\nu\widehat{\Sigma_S)f_V}\\&+\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(p_\rho+mn_\rho)}{2(q\cdot n+m)}(\partial_\sigma\widehat{\Sigma_{V\nu})f_V}\Big)\Big]\Big\}=0,\end{aligned} \tag{39}$$

其中 $S_{m(n)}^{\mu\nu}\equiv\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha n_\beta/[2(q\cdot n+m)]$, n^μ 为任意的类时单位矢量, 即满足 $n^2=1$, f_V 为粒子数分布函数, f_A 为轴荷分布函数, a^μ 为局域极化矢量. 文献 [18] 还给出了有电磁场时的自旋演化方程, 并且确认了其理论与手征动理学的一致性. 作为该理论在夸克胶子等离子体 (quark-gluon plasma, QGP) 中的应用, 他们还计算了领头对数阶的自旋扩散效应及其非相对论极限. 文献 [65] 采用了类似的方法, 研究了无质量电子穿过介质时, 由于量子电动力学 (quantum electrodynamics, QED) 相互作用导致的极化效应.

文献 [66] 同样对自能项采用了 (32) 式所示的分解, 与文献 [18] 不同的是, 文献 [66] 在 $\hbar$ 的任意阶均保留了展开式的所有项, 这使得自旋密度的动理学方程更加复杂. 文献 [66] 还考虑了 NJL 模型的的标量耦合, 计算了自能项, 并推导出了动理学方程的精细平衡条件导致的局域热平衡的自旋密度.

3.2 基于量子场论方法的自旋动理学

文献 [19,20] 采用与 Kadanoff-Baym 方程不同的基于量子场论第一性原理的方法, 推导出了自

旋动理学方程. 其出发点为含有相互作用修正的狄拉克方程:

$$(\mathrm{i}\hbar\gamma\cdot\partial-m)\psi(x)=\hbar\rho(x), \tag{40}$$

其中 $\rho\equiv-(1/\hbar)\partial\mathcal{L}_I/\partial\overline{\psi}$, $\mathcal{L}_I$ 为拉氏量的相互作用部分. 从上述狄拉克方程, 可以得到维格纳函数的运动方程:

$$\left[\gamma\cdot\left(p+\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\partial\right)-m\right]W_{\alpha\beta}(x,p)$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}^4y}{(2\pi\hbar)^4}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot y}\left\langle:\rho_\alpha\left(x-\frac{y}{2}\right)\overline{\psi}_\beta\left(x+\frac{y}{2}\right):\right\rangle. \tag{41}$$

将算符 $\gamma\cdot[p+(\mathrm{i}\hbar/2)\partial]+m$ 作用在该方程的左边, 并分离实部与虚部, 即得到维格纳函数的玻尔兹曼方程:

$$p\cdot\partial\,W_{\alpha\beta}(x,p)=$$
$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4y}{(2\pi\hbar)^4}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\cdot y}\left\langle:\left[\overline{\rho}\left(x+\frac{y}{2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\times(-\mathrm{i}\hbar\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}+m)\right]_\beta\psi_\alpha\left(x-\frac{y}{2}\right)$$
$$\left.-\overline{\psi}_\beta\left(x+\frac{y}{2}\right)\left[(\mathrm{i}\hbar\gamma\cdot\partial+m)\rho\left(x+\frac{y}{2}\right)\right]_\alpha:\right\rangle. \tag{42}$$

若只考虑粒子间的 2-2 散射过程, 则 (42) 式右边的碰撞项 (简记为 $C_{\alpha\beta}$) 可以用 2-2 过程的散射矩阵元表示为

$$C_{\alpha\beta}=\frac{(2\pi\hbar)^6}{(2m)^4}\sum_{r_1,r_2,s_1,s_2}\int\mathrm{d}^4p_1\mathrm{d}^4p_2\mathrm{d}^4q_1\mathrm{d}^4q_2$$
$$\times\ {}_{\mathrm{in}}\left\langle p_1-\frac{q_1}{2},p_2-\frac{q_2}{2};r_1,r_2\left|\varPhi_{\alpha\beta}(p)\right|p_1\right.$$
$$\left.+\frac{q_1}{2},p_2+\frac{q_2}{2};s_1,s_2\right\rangle_{\mathrm{in}}$$
$$\times\prod_{j=1}^{2}\overline{u}_{s_j}\left(p_j+\frac{q_j}{2}\right)\left\{W(x,p_j)\delta^{(4)}(q_j)\right.$$
$$\left.-\mathrm{i}\hbar\left[\partial^\mu_{q_j}\delta^{(4)}(q_j)\right]\partial_\mu W(x,p_j)\right\}u_{r_j}\left(p_j-\frac{q_j}{2}\right), \tag{43}$$

其中 $\varPhi_{\alpha\beta}(p)$ 可以进一步用相互作用的 t-矩阵表示[20]. 文献 [19, 20] 通过扩展相空间, 引入了自旋依赖的标量分布函数 $f(x,p,\mathfrak{s})$:

$$\mathfrak{f}(x,p,\mathfrak{s})\equiv\frac{1}{2}\left[\bar{\mathcal{F}}(x,p)-\mathfrak{s}\cdot\mathcal{A}(x,p)\right]$$
$$\equiv m\delta(p^2-m^2-\hbar\delta m^2)f(x,p,\mathfrak{s}), \tag{44}$$

其中 $\mathfrak{s}^\mu$ 为归一的、与动量垂直的自旋方向, $\mathcal{F}$ 为扣除掉相互作用修正的维格纳函数的标量部分, $\hbar\delta m^2$ 为质壳修正. 将算符 $p\cdot\partial$ 作用在 $\mathfrak{f}(x,p,\mathfrak{s})$ 上, 结合方程 (42), 即可得到 $f(x,p,\mathfrak{s})$ 满足的玻尔兹曼方程:

$$\delta(p^2-m^2)p\cdot\partial\,f(x,p,\mathfrak{s})=\delta(p^2-m^2)\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathrm{on-shell}}[f]. \tag{45}$$

该方程中的动量 p^μ 都是在壳的, 因为离壳的部分自然抵消. 方程中的碰撞项由以下表达式给出:

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{\mathrm{on-shell}}[f]=$$
$$\int\mathrm{d}\varGamma_1\mathrm{d}\varGamma_2\mathrm{d}\varGamma'\widetilde{\mathcal{W}}\ [f(x+\varDelta_1,p_1,\mathfrak{s}_1)$$
$$-f(x+\varDelta_2,p_2,\mathfrak{s}_2)-f(x+\varDelta,p,\mathfrak{s})f(x+\varDelta',p',\mathfrak{s}')]$$
$$+\int\mathrm{d}\varGamma_2\mathrm{d}S_1(p)\mathfrak{W}\ f(x+\varDelta_1,p,\mathfrak{s}_1)f(x+\varDelta_2,p_2,\mathfrak{s}_2), \tag{46}$$

其中, 相空间积分 $\mathrm{d}S(p)\equiv\dfrac{\delta(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s}+3)\delta(p\cdot\mathfrak{s})}{\sqrt{3}\pi/\sqrt{p^2}}$, $\mathrm{d}\varGamma\equiv\mathrm{d}^4p\delta(p^2-m^2)\mathrm{d}S(p)$, 而方程中的空间位移 $\varDelta^\mu$ 为

$$\varDelta^\mu\equiv-\frac{\hbar}{2m(p\cdot\hat{t}+m)}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\nu\hat{t}_\alpha\mathfrak{s}_\beta, \tag{47}$$

其中 $\hat{t}^\mu=(1,0,0,0)$ 为时间方向的单位矢量. (46) 式的第一项代表的碰撞过程既改变粒子的动量, 也改变粒子的自旋; 而第二项代表的过程不改变粒子的动量, 仅改变粒子的自旋, 是第一项在动量转移为零时的特殊情况. 方程中的 $\widetilde{\mathcal{W}}$ 与 $\mathfrak{W}$ 分别为两个过程对应的散射振幅, 由 (43) 式中的 $\varPhi_{\alpha\beta}(p)$ 在两粒子态上的期望值计算得到. 在这个计算过程中, 采用了玻尔兹曼近似, 忽略了动量为 p^μ 和 p'^μ 的末态粒子的泡利阻塞 (Pauli blocking) 项. 轨道角动量与自旋之间的转换来自于方程 (46) 中的非定域效应, 即其中的位移项 $\varDelta^\mu$. 文献 [19,20] 还讨论了精细平衡条件导出的含有自旋的局域热平衡分布, 以及由玻尔兹曼方程得到的流体力学方程.

3.3 其他方法

文献 [67] 考虑了洛伦兹协变性的要求, 发现由 (34) 式定义的矩阵分布在洛伦兹变换下, 不仅有自旋空间中的转动 (维格纳转动), 还有非平庸的时空平移. 作者定义了矩阵分布

$$F(x,p)\equiv f(x,p)+\frac{\hbar}{4(u_0\cdot p)(u_0\cdot p+m)}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_{0,\mu}p_\nu$$
$$\times\left\{n_\beta(p)_j\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{T}},\partial_\alpha f(x,p)\right\}, \tag{48}$$

其中 $u_0^\mu=(1,0,0,0)$ 为时间方向的单位矢量, $n^\mu(p)$ 由 (36) 式给出. 该分布的迹 $\mathrm{tr}(F)$ 为相空间中的粒子数密度, 而 $\mathrm{tr}[n^\mu(p)_j\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{T}}F]$ 为相空间中的自旋密度. 在相对于当前参考系以速度 u^μ 运动的另一参考系中, 矩阵分布 F' 为

$$F' = D(R_{u,\boldsymbol{p}})\left[F + \frac{\hbar}{2}\left\{\Delta^{\mu}_{u_0 u}, \partial_\mu F\right\}\right] D^{\dagger}(R_{u,\boldsymbol{p}}), \tag{49}$$

其中$D(R_{u,\boldsymbol{p}})$为上述参考系变换对应的维格纳转动在自旋空间中的表示, 位移项$\Delta^{\mu}_{u_0 u}$的定义为

$$\Delta^{\mu}_{u_0 u} = \Delta^{\mu}_{u_0} - \Delta^{\mu}_{u},$$
$$\Delta^{\mu}_{u} \equiv -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} n_{j\nu}(p) p_\alpha u_\beta \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}_j / (2mu_0\cdot p), \tag{50}$$

其中$\boldsymbol{\Delta}^{\mu}_{u}$为自旋空间中的矩阵. 上述非平庸位移项的出现, 说明带自旋的微观粒子, 其能量密度的中心位置并不是洛伦兹矢量. 因此在粒子碰撞的过程中, 在某个参考系中的对心碰撞, 在另一个参考系中则是非对心碰撞. 假设存在某一个参考系$\bar{u}$, 使碰撞过程中轨道角动量和自旋分别守恒, 那么在这个参考系中可以合理地忽略非定域的碰撞项, 假设分布函数$\bar{F}$在这个参考系中满足玻尔兹曼方程$\bar{p}\cdot\bar{\partial}\bar{F}(\bar{x},\bar{p}) = \bar{\mathcal{C}}[\bar{F}]$, 那么在实验室系中, 玻尔兹曼方程的形式为

$$\begin{aligned}
p\cdot\partial\, \tilde{F}_{rs} = {} & \frac{1}{4(2\pi\hbar)^9}\sum_{r_i,s_i}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1}{2E_{p_1}}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_2}{2E_{p_2}}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_3}{2E_{p_3}}(2\pi\hbar)^4 \\
& \times \delta^{(4)}(p_1+p_2-p-p_3) \\
& \times \mathcal{M}(p_1,p_2;s_1,s_2\to p,p_3;r_0,r_3) \\
& \times \mathcal{M}^*(p_1,p_2;r_1,r_2\to p,p_3;r,s_3) \\
& \times \left\{\tilde{F}_{r_1,s_1}(p_1)\tilde{F}_{r_2,s_2}(p_2)\left[\delta_{r_0 s} - \tilde{F}_{r_0 s}(p)\right]\right. \\
& \times \left[\delta_{r_3 s_3} - \tilde{F}_{r_3 s_3}(p_3)\right] \\
& - \tilde{F}_{r_0 s}(p)\tilde{F}_{r_3 s_3}(p_3)\left[\delta_{r_1 s_1} - \tilde{F}_{r_1,s_1}(p_1)\right] \\
& \times \left.\left[\delta_{r_2 s_2} - \tilde{F}_{r_2,s_2}(p_2)\right]\right\} + \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{51}$$

其中的h.c.表示前面项的复共轭并交换r, s指标, $\tilde{F} = F + \frac{\hbar}{2}\{\Delta^{\mu}_{u_0\bar{u}}, \partial_\mu F\}$, F为实验室系中的矩阵分布, $\mathcal{M}$为带自旋的粒子之间的2-2散射过程的散射振幅. 这一结果同样与无质量费米子的手征动理学相符合.

如果不在意相互作用的细节, 那么文献 [68] 提出的维格纳函数的弛豫时间近似不失为一种简单而有效的方案, 其中维格纳函数满足的方程为

$$\begin{aligned}
&\left[\gamma\cdot\left(p + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\partial\right) - m\right] W(x,p) \\
&= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\gamma\cdot u \frac{W(x,p) - W_{\mathrm{eq}}(x,p)}{\tau},
\end{aligned} \tag{52}$$

其中$W_{\mathrm{eq}}(x,p)$为热平衡的维格纳函数, u^μ为局域的流速, τ为弛豫时间. 由此得到的自旋密度的动理学方程为

$$p\cdot\partial\mathcal{A}^\mu = -\frac{u\cdot p}{\tau}\delta\mathcal{A}_\mu + \frac{\hbar}{2\tau T}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\nu\omega^{\alpha\beta}_T\delta f_V, \tag{53}$$

其中$\omega^{\alpha\beta}_T \equiv [\partial^\alpha(Tu^\beta) - \partial^\beta(Tu^\alpha)]/2$是温度涡旋场[69,70], $\delta\mathcal{A}_\mu$与δf_V是自旋密度与粒子数密度相对平衡态的偏离. 文献 [68] 讨论了如何对 Kadanoff-Baym 方程做弛豫时间近似, 并且在 NJL 模型标量相互作用的框架下, 对粒子数演化以及自旋演化的阻尼率进行了计算.

除了上述工作以外, 最近几年还有其他未在此详细描述的工作, 例如文献 [71] 从维格纳函数的 Kadanoff-Baym 方程出发, 系统地研究了量子电动力学中的费米子与光子的自旋动理学; 文献 [72] 研究了夸克在色电磁场背景中的动理学, 等等. 目前, 有质量粒子的含相互作用的动理学仍处于刚起步的阶段, 不同的理论框架给出的结果有相同之处也有不同之处, 同时也存在怎样得到局域热平衡解、如何从动理学方程得到自旋流体力学方程等问题, 仍有待进一步深入研究.

4 总 结

整体极化效应是重离子碰撞中反映自旋轨道耦合效应的重要物理现象, 自从 STAR 合作组于 2017 年在 Au+Au 碰撞实验中观测到Λ超子的整体极化效应之后, 该效应引起了学术界的广泛关注. 在重离子碰撞产生的热密物质中, 自旋轨道耦合来自于粒子之间的非局域碰撞, 而碰撞过程的轨道角动量涉及碰撞粒子的空间和动量信息, 所以需要在相空间中描述有自旋轨道耦合效应的粒子碰撞. 另外自旋轨道耦合是一种量子效应, 需要量子理论. 基于维格纳函数的量子动理学就成为描述整体极化效应的一个有力工具. 本文介绍了自旋为 1/2 的费米子系统的基于维格纳函数的量子动理学, 以及在此基础上发展起来的自旋输运理论. 在自旋输运理论方面的最新进展为模拟重离子碰撞中的自旋极化效应的时空演化提供了坚实的理论基础.

参考文献

[1] Liang Z T, Wang X N 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 102301 (Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **96** 039901)

[2] Adamczyk L, et al. [STAR Collaboration]. 2017 *Nature* **548**

62
[3] Gao J H, Chen S W, Deng W T, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2008 *Phys. Rev. C* **77** 044902
[4] Huang X G, Huovinen P, Wang X N 2011 *Phys. Rev. C* **84** 054910
[5] Zhang J J, Fang R H, Wang Q, Wang X N 2019 *Phys. Rev. C* **100** 064904
[6] Liang Z T, Song J, Upsal I, Wang Q, Xu Z B 2021 *Chin. Phys. C* **45** 014102
[7] Becattini F, Piccinini F, Rizzo J 2008 *Phys. Rev. C* **77** 024906
[8] Becattini F, Chandra V, Del Zanna L, Grossi E 2013 *Annals Phys.* **338** 32
[9] Becattini F, Florkowski W, Speranza E 2019 *Phys. Lett. B* **789** 419
[10] Becattini F, Buzzegoli M, Grossi E 2019 *Particles* **2** 197
[11] Fang R H, Pang L G, Wang Q, Wang X N 2016 *Phys. Rev. C* **94** 024904
[12] Gao J H, Liang Z T 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056021
[13] Weickgenannt N, Sheng X L, Speranza E, Wang Q, Rischke D H 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056018
[14] Wang Z, Guo X, Shi S, Zhuang P 2019 *Phys. Rev. D* **100** 014015
[15] Hattori K, Hidaka Y, Yang D L 2019 *Phys. Rev. D* **100** 096011
[16] Liu Y C, Mameda K, Huang X G 2020 *Chin. Phys. C* **44** 094101 [Erratum: 2021 *Chin. Phys. C* **45** 089001]
[17] Sheng X L, Wang Q, Huang X G 2020 *Phys. Rev. D* **102** 025019
[18] Yang D L, Hattori K, Hidaka Y 2020 *JHEP* **07** 070
[19] Weickgenannt N, Speranza E, Sheng X L, Wang Q, Rischke D H 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 052301
[20] Weickgenannt N, Speranza E, Sheng X L, Wang Q, Rischke D H 2021 *Phys. Rev. D* **104** 016022
[21] Sheng X L, Weickgenannt N, Speranza E, Rischke D H, Wang Q 2021 *Phys. Rev. D* **104** 016029
[22] Florkowski W, Friman B, Jaiswal A, Speranza E 2018 *Phys. Rev. C* **97** 041901
[23] Florkowski W, Friman B, Jaiswal A, Ryblewski R, Speranza E 2018 *Phys. Rev. D* **97** 116017
[24] Hattori K, Hongo M, Huang X G, Matsuo M, Taya H 2019 *Phys. Lett. B* **795** 100
[25] Hongo M, Huang X G, Kaminski M, Stephanov M, Yee H Y 2021 *JHEP* **11** 150
[26] Weickgenannt N, Wagner D, Speranza E, Rischke D H 2022 *Phys. Rev. D* **106** 096014
[27] Huang X G, Liao J, Wang Q, Xia X L 2021 *Lect. Notes Phys.* **987** 281
[28] Gao J H, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2021 *Lect. Notes Phys.* **987** 195
[29] Liu Y C, Huang X G 2020 *Nucl. Sci. Tech.* **31** 56
[30] Jiang Y, Guo X, Zhuang P 2021 *Lect. Notes Phys.* **987** 167
[31] Gao J H, Liang Z T, Wang Q 2021 *Int. J. Mod. Phys. A* **36** 2130001
[32] Hidaka Y, Pu P, Wang Q, Yang D L 2022 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **127** 103989
[33] Gao J H, Ma G L, Pu S, Wang Q 2020 *Nucl. Sci. Tech.* **31** 90
[34] Stephanov M A, Yin Y 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 162001
[35] Son D T, Yamamoto N 2013 *Phys. Rev. D* **87** 085016
[36] Chen J W, Pu S, Wang Q, Wang X N 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 262301
[37] Manuel C, Torres-Rincon J M 2014 *Phys. Rev. D* **89** 096002
[38] Manuel C, Torres-Rincon J M 2014 *Phys. Rev. D* **90** 076007
[39] Chen J Y, Son D T, Stephanov M A, Yee H U, Yin Y 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 182302
[40] Chen J Y, Son D T, Stephanov M A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 021601
[41] Hidaka Y, Pu S, Yang D L 2017 *Phys. Rev. D* **95** 091901
[42] Mueller N, Venugopalan R 2018 *Phys. Rev. D* **97** 051901
[43] Huang A, Shi S, Jiang Y, Liao J, Zhuang P 2018 *Phys. Rev. D* **98** 036010
[44] Gao J H, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2018 *Phys. Rev. D* **98** 036019
[45] Liu Y C, Gao L L, Mameda K, Huang X G 2019 *Phys. Rev. D* **99** 085014
[46] Sun Y, Ko C M, Li F 2016 *Phys. Rev. C* **94** 045204
[47] Sun Y, Ko C M 2017 *Phys. Rev. C* **95** 034909
[48] Sun Y, Ko C M 2017 *Phys. Rev. C* **96** 024906
[49] Sun Y, Ko C M 2018 *Phys. Rev. C* **98** 014911
[50] Sun Y, Ko C M 2019 *Phys. Rev. C* **99** 011903
[51] Zhou W H, Xu J 2018 *Phys. Rev. C* **98** 044904
[52] Zhou W H, Xu J 2019 *Phys. Lett. B* **798** 134932
[53] Liu S Y F, Sun Y, Ko C M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 062301
[54] Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749
[55] Heinz U W 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 351
[56] Elze H T, Gyulassy M, Vasak D 1986 *Nucl. Phys. B* **276** 706
[57] Elze H T, Gyulassy M, Vasak D 1987 *Annals Phys.* **173** 462
[58] Bialynicki-Birula I, Davis E D, Rafelski J 1993 *Phys. Lett. B* **311** 329
[59] Zhuang P F, Heinz U W 1998 *Phys. Rev. D* **57** 6525
[60] Guo X 2020 *Chin. Phys. C* **44** 104106
[61] Ma S X, Gao J H 2022 arXiv: 2209.10737[hep-ph]
[62] Zhang J J, Fang R H, Wang Q, Wang X N 2019 *Phys. Rev. C* **100** 064904
[63] Martin P C, Schwinger J S 1959 *Phys. Rev.* **115** 1342
[64] Keldysh L V 1964 *Zh. Eksp. Thero. Fiz.* **47** 1515
[65] Fang S, Pu S, Yang D L 2022 *Phys. Rev. D* **106** 016002
[66] Wang Z, Guo X, Zhuang P 2021 *Eur. Phys. J. C* **81** 799
[67] Sheng X L, Wang Q, Rischke D H 2022 *Phys. Rev. D* **106** L111901
[68] Wang Z, Zhuang P 2021 arXiv: 2105.00915
[69] Gao J H, Qi B, Wang S Y 2014 *Phys. Rev. D* **90** 083001
[70] Wu H Z, Pang L G, Huang X G, Wang Q 2019 *Phys. Rev. Rese.* **1** 033058
[71] Lin S 2022 *Phys. Rev. D* **105** 076017
[72] Yang D L 2022 *JHEP* **06** 140

物 理 学 报 *Acta Phys. Sin.* **Vol. 72, No. 11 (2023) 112501**

SPECIAL TOPIC—Spin and chiral effects in high energy heavy ion collisions

Relativistic spin transport theory for spin-1/2 fermions*

Gao Jian-Hua [1)†] Sheng Xin-Li [2)] Wang Qun [3)] Zhuang Peng-Fei [4)]

1) (*Shandong Provincial Key Laboratory of Optical Astronomy and Solar-Terrestrial Environment, School of Space Science and Physics, Shandong University, Weihai* 264209, *China*)

2) (*INFN-Firenze, Via Giovanni Sansone*, 1, 50019 *Sesto Fiorentino FI, Italy*)

3) (*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

4) (*Department of Physics, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

(Received 31 December 2022; revised manuscript received 25 March 2023)

Abstract

Global polarization effect is an important physical phenomenon reflecting spin-orbit couplings in heavy ion collisions. Since STAR's observation of the global polarization of Λ hyperons in Au+Au collisions in 2017, this effect has attracted a lot of interests in the field. In the hot and dense matter produced in heavy ion collisions, the spin-orbit couplings come from non-local collisions between particles, in which the orbital angular momentum involves the space and momentum information of the colliding particles, so it is necessary to describe the particle collisions with spin-orbit couplings in phase space. In addition, the spin-orbit coupling is a quantum effect, which requires quantum theory. In combination of two aspects, the quantum kinetic theory based on covariant Wigner functions has become a powerful tool to describe the global polarization effect. In this paper, we introduce the quantum kinetic theory for spin-1/2 Fermion system based on Wigner functions as well as the spin transport theory developed on this basis. The recent research progress of spin transport theory provides a solid theoretical foundation for simulating the space-time evolution of spin polarization effects in heavy ion collisions.

Keywords: Wigner function, quantum kinetic theory, spin transport theory

PACS: 25.75.Nq, 12.38.Mh **DOI:** 10.7498/aps.72.20222470

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11890710, 11890713, 12175123, 12135011).

† Corresponding author. E-mail: gaojh@sdu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

费米子的相对论自旋输运理论

高建华 盛欣力 王群 庄鹏飞

Relativistic spin transport theory for spin−1/2fermions

Gao Jian-Hua Sheng Xin-Li Wang Qun Zhuang Peng-Fei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 112501 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222470

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20222470

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
