

## 双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的混溶性\*

贺丽<sup>1)†</sup> 张天琪<sup>2)</sup> 李可芯<sup>2)</sup> 余增强<sup>2)3)</sup>

1) (山西大学物理电子工程学院, 太原 030006)

2) (山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

3) (山西大学量子光学和光子器件国家重点实验室, 太原 030006)

(2023年1月3日收到; 2023年4月6日收到修改稿)

基于包含 Lee-Huang-Yang 修正的物态方程, 研究了具有排斥相互作用的双组分玻色-爱因斯坦凝聚体在平均场弱失稳区间的基态相图. 根据相平衡条件, 确定了等质量混合体系中不混溶态、部分混溶态以及均匀混溶态之间的相边界. 在原子密度足够稀薄的情形下, 给出了相边界和量子临界点的解析表达式. 讨论了密度响应的静态极化率在量子临界点附近的发散行为. 对于不等质量的双组分凝聚体, 利用低浓度展开的物态方程, 得到了部分混溶态出现的阈值密度, 并提出了判断部分混溶构型的解析方法, 为钠、钾、铷等冷原子混合体系的实验观测提供了明确的理论指引.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚体, 玻色混合物, 混溶性, 量子涨落

**PACS:** 03.75.Hh, 67.85.-d, 67.60.Bc, 42.50.Lc

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230001

## 1 引言

量子流体的混溶性是多体物理的一个重要课题. 在传统凝聚态体系中,  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  超流体的混溶性曾受到理论和实验方面的广泛关注<sup>[1-3]</sup>, 但限于考察对象的单一性, 相关研究难以得到进一步的拓展. 近年来, 冷原子物理的飞速发展, 为探索量子混合气体中新颖的多体效应提供了理想的平台. 利用丰富的调控技术手段, 实验上已经实现了由多种元素、同位素组成的玻色-玻色混合气体<sup>[4-14]</sup>、玻色-费米混合气体<sup>[15-19]</sup>、费米-费米混合气体<sup>[20-23]</sup>. 准确了解这些体系的混溶条件是全面、深入研究其他物性的前提基础.

双组分玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensate, BEC) 的混溶性决定于同组分相互作用与异组分相互作用的竞争. 根据平均场理论<sup>[24,25]</sup>, 在零温、无外势场情形下, 体系的混溶条件可以用单一相互作用参数  $\Delta_g \equiv g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}} - 1$  进行表征,

其中  $g_{ij}$  是  $i$  组分与  $j$  组分原子间  $s$  波相互作用的强度 (这里设定为排斥作用),  $i, j = 1, 2$  标记原子种类. 当  $\Delta_g < 0$  时, 两组分凝聚体可以均匀混溶; 当  $\Delta_g > 0$  时, 两组分则不能混溶. 通过 Feshbach 共振技术调控原子间的散射长度, 实验上已在多个冷原子体系中观测到了从混溶态到不混溶态的转变<sup>[4,7,8,12]</sup>. 理论模拟表明, 在简谐势阱中, 双组分 BEC 的混溶条件会偏离上述热力学极限的平均场结果<sup>[26-28]</sup>, 除了相互作用强度, 原子数、组分比和质量比也都是决定混溶相边界的因素<sup>[29-33]</sup>. 在不同实验参数下, 凝聚体的密度分布会呈现对称或非对称的不混溶结构<sup>[29,30,32]</sup>. 有限温度的热效应同样可能影响体系的混溶性, 但目前为止, 不同理论方法给出的结论尚不一致<sup>[34-36]</sup>.

最近, Naidon 和 Petrov<sup>[37]</sup> 指出, 当  $\Delta_g$  为正数且值很小时 (即在平均场弱失稳区间), 量子涨落会对体系的稳定性产生不可忽略的影响, 从而导致部分混溶态 (partially-miscible state) 的出现. 这种新物态实质上是单分量 BEC 与混合 BEC 达成共

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12104275, 12174230) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: heli@sxu.edu.cn

存平衡的相分离态, 故又被形象地称为从单分量背景气体中涌出的“混合气泡 (mixed bubble)”<sup>[37]</sup>. 由于部分混溶性体现了超越平均场近似的量子多体效应, 因此其后续的实验观测具有重要意义.

本文从包含量子涨落修正的物态方程出发, 研究了双组分 BEC 在平均场弱失稳区间的基态相图, 对部分混溶相的密度范围给出了更为全面的描述. 根据相平衡条件, 确定了等质量玻色混合气体中不混溶态、部分混溶态以及均匀混溶态之间的相边界, 并给出了它们在准至  $\Delta_g^2$  阶的解析表达式. 这些表达式适用于  $\Delta_g$  足够小、原子密度足够稀薄的情形. 此外, 还讨论了密度响应极化率在量子临界点附近的发散行为. 对于不等质量的双组分 BEC, 利用物态方程在低杂质浓度下的展开形式, 得到了部分混溶态出现的阈值密度, 并提出了用质量比和相互作用参数判断部分混溶态构型的解析方法, 为钠、钾、铷等冷原子体系的实验探索提供了明确的理论指引.

## 2 等质量双组分 BEC 的混溶性

### 2.1 物态方程与相平衡条件

首先, 考虑等质量的双组分 BEC. 当体系处于  $\Delta_g$  为小正数的相互作用区间时, 零温下单位体积内的能量可以写为<sup>[38]</sup>

$$\mathcal{E}(n_1, n_2) = \sum_{i,j=1,2} \frac{g_{ij}}{2} n_i n_j + \frac{8m^{3/2}}{15\pi^2 \hbar^3} (g_{11}n_1 + g_{22}n_2)^{5/2}, \quad (1)$$

其中, 等号右边第 1 项为平均场相互作用能, 第 2 项为量子涨落贡献的 Lee-Huang-Yang (LHY) 能量,  $n_1, n_2$  分别为两种组分的原子密度,  $m$  为原子质量,  $\hbar$  为约化 Planck 常数. 由于  $\Delta_g$  值较小, 此处忽略了 LHY 能量对于  $\Delta_g$  的依赖, 将其近似取为在平均场失稳边界上的值. 该假设不会影响导出的准至  $\Delta_g^2$  阶的解析结果.

物态方程 (1) 是基于体系具有均匀密度的假定. 当体系发生相分离时 (设每个相内仍保持密度均匀), 其也可以用于确定共存态的相平衡构型. 考察 3 种相分离态: 不混溶态 (immiscible state, IM), 以及两种不同构型的部分混溶态 (PM1 和 PM2), 其结构示意图如图 1(a) 所示. 按图中符号, 将相分离态中由  $i$  组分原子组成的单分量 BEC 的密度设为  $n_i^S$ , 将部分混溶态中双组分 BEC 的密度设为  $(n_1^M, n_2^M)$ .

对于不混溶态, 相分离的热力学平衡条件为

$$\begin{aligned} P(n_1^S, 0) &= P(0, n_2^S), \\ \mu_1(n_1^S, 0) &< \mu_1(0, n_2^S), \\ \mu_2(n_1^S, 0) &> \mu_2(0, n_2^S). \end{aligned} \quad (2)$$

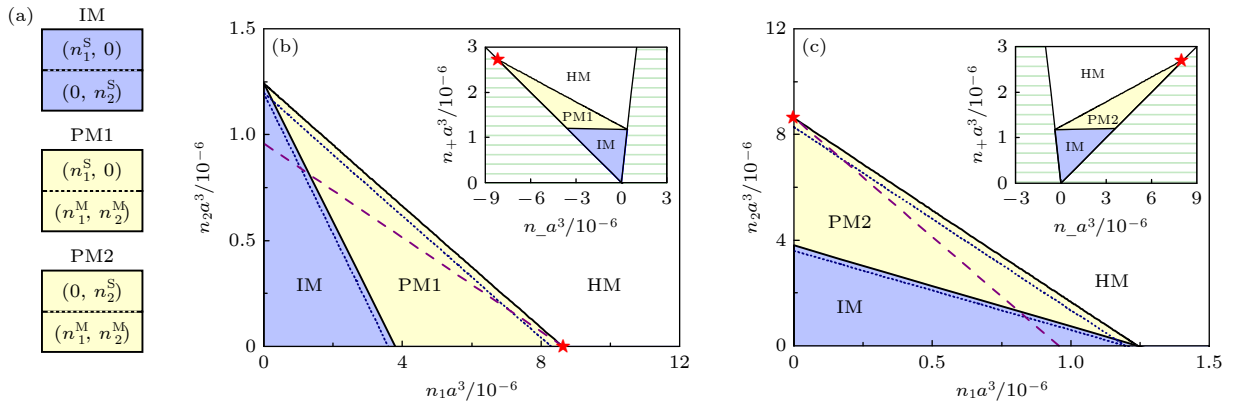


图 1 (a) 双组分 BEC 的不混溶态 (IM) 和两种部分混溶态 (PM1, PM2) 示意; (b), (c) 等质量玻色混合气体在平均场弱失稳区间的基态相图. HM 表示均匀混溶相, 点线是本文给出的密度准至  $\Delta_g^2$  阶的解析相边界. 旋节线 (虚线) 与部分混溶态的相边界相交于  $\star$  标记的临界点. 插图是在  $(n_+, n_-)$  平面绘出的相图, 其中绿色条纹填充的部分表示  $n_i < 0$  的非物理区间. (b) 图和 (c) 图的  $\alpha$  分别取 3 和 1/3, 二者的  $\Delta_g$  均为 0.01

Fig. 1. (a) Illustrations of immiscible state (IM) and two kinds of partially miscible states (PM1 and PM2) of dual-species BEC; (b), (c) ground state phase diagram of equal-mass Bose mixtures in the regime of a weak mean-field instability. HM represents the homogenous miscible phase, dotted-lines are the analytical phase boundaries given in the text. The spinodal line (dashed) meets the boundary of partially miscible state at the critical point denoted by  $\star$ . Inset: phase diagram in the  $n_+ - n_-$  plane. The area filled by green stripes is the unphysical region with  $n_i < 0$ . In plot (b),  $\alpha = 3$ ; in plot (c),  $\alpha = 1/3$ , for both plots,  $\Delta_g = 0.01$ .

其中, 第 1 个等式为力学平衡条件, 后两个不等式保证了两种组分的原子在分离相中不会互相扩散.  $P$  为压强,  $\mu_i$  为  $i$  组分原子的化学势, 它们可以通过热力学关系式  $P = \sum_i \mu_i n_i - \mathcal{E}$  和  $\mu_i = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_i}$  表达成密度的函数.

对于 PM1 态, 相平衡条件写为

$$\begin{aligned} P(n_1^S, 0) &= P(n_1^M, n_2^M), \\ \mu_1(n_1^S, 0) &= \mu_1(n_1^M, n_2^M), \\ \mu_2(n_1^S, 0) &> \mu_2(n_1^M, n_2^M). \end{aligned} \quad (3)$$

由于该态中 1 组分是两个平衡相的共同成分, 故其化学势须在两相中保持相等; 而 2 组分原子的化学势仍为不等式关系. 类似地, PM2 态的相平衡条件为

$$\begin{aligned} P(0, n_2^S) &= P(n_1^M, n_2^M), \\ \mu_2(0, n_2^S) &= \mu_2(n_1^M, n_2^M), \\ \mu_1(0, n_2^S) &> \mu_1(n_1^M, n_2^M). \end{aligned} \quad (4)$$

这相当于将 PM1 态的相平衡条件中的原子组分指标进行了互换 ( $1 \leftrightarrow 2$ ).

容易验证, 若忽略 LHY 能量的贡献, 平衡条件 (2) 式在  $\Delta_g > 0$  时总有解, 而平衡条件 (3) 式和 (4) 式都不能成立, 这意味着平均场理论预言的基态只能是不混溶态. 考虑 LHY 能量的涨落修正后, 部分混溶态可以在适当参数条件下出现.

## 2.2 不混溶态到部分混溶态的转变

平均场能量和 LHY 能量对于原子密度具有不同幂次的依赖关系. 在低密度极限下, LHY 能量在相平衡条件中的影响甚小, 因而两种组分的凝聚体仍会保持互不混溶. 但随着原子密度逐渐增大, 这种局面可能会被打破, 导致不混溶态与部分混溶态间的转变. 对比前文的相平衡条件可知, 该转变发生时 (2) 式的其中一个化学势不等式会变为等式. 若这种改变出现在 1 组分上, 则不混溶态转变为 PM1 态, 相应的转变条件为

$$\begin{aligned} P(n_1^{\text{IM}}, 0) &= P(0, n_2^{\text{IM}}), \\ \mu_1(n_1^{\text{IM}}, 0) &= \mu_1(0, n_2^{\text{IM}}), \\ \mu_2(n_1^{\text{IM}}, 0) &> \mu_2(0, n_2^{\text{IM}}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $n_1^{\text{IM}}$  和  $n_2^{\text{IM}}$  是发生转变时达到相平衡的两种单分量 BEC 的密度. 若这种改变出现在 2 组分上,

则不混溶态转变为 PM2 态, 相应的转变条件为:

$$\begin{aligned} P(n_1^{\text{IM}}, 0) &= P(0, n_2^{\text{IM}}), \\ \mu_2(n_1^{\text{IM}}, 0) &= \mu_2(0, n_2^{\text{IM}}), \\ \mu_1(0, n_2^{\text{IM}}) &> \mu_1(n_1^{\text{IM}}, 0). \end{aligned} \quad (6)$$

从对称性上不难看出, 当两种原子的相互作用强度相等时 (即  $g_{11} = g_{22}$ ), 条件 (5) 式和 (6) 式都不可能满足. 因此, 在这种情况下, 体系不会发生部分混溶转变, 基态只能一直保持为不混溶态.

当  $g_{11} \neq g_{22}$  时, 可以由转变条件 (5) 式或 (6) 式中的前两个等式解得  $n_1^{\text{IM}}$  和  $n_2^{\text{IM}}$ . 考虑到  $\Delta_g$  是小量, 可以将  $n_i^{\text{IM}}$  写成  $\Delta_g$  的幂级数展开形式, 并对展开项做适当截断. 对于不混溶态与 PM1 态间的转变, 准至  $\Delta_g^2$  阶, 可得到

$$\begin{aligned} n_i^{\text{IM}} &= \frac{225\pi}{1024a^3} \sqrt{\frac{g}{g_{ii}}} \frac{\alpha^{5/2}}{(2 + 3\alpha^{5/2} - 5\alpha^{3/2})^2} \Delta_g^2, \\ i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\alpha \equiv \sqrt{g_{22}/g_{11}}$ ,  $g \equiv \sqrt{g_{11}g_{22}}$ ,  $a \equiv \sqrt{a_{11}a_{22}}$  ( $a_{ii}$  为同种原子之间的散射长度). 对于不混溶态与 PM2 态的转变, 同样准至  $\Delta_g^2$  阶, 得到

$$\begin{aligned} n_i^{\text{IM}} &= \frac{225\pi}{1024a^3} \sqrt{\frac{g}{g_{ii}}} \frac{\alpha^{-5/2}}{(2 + 3\alpha^{-5/2} - 5\alpha^{-3/2})^2} \Delta_g^2, \\ i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

这相当于将 (7) 式中的  $\alpha$  替换为  $\alpha^{-1}$ . 这些解析结果适用于描述  $\Delta_g$  很小、发生在极稀薄情形下的转变.

对于给定的相互作用参数  $\alpha \neq 1$ , (7) 式和 (8) 式都能给出有限大小的  $n_i^{\text{IM}}$ . 但实际上, 体系只会发生一种不混溶到部分混溶的转变 (要么转变为 PM1 态, 要么转变为 PM2 态). 究竟发生哪种转变, 取决于哪种组分在更低的密度先达成化学势的相变平衡. 直接比较 (7) 式和 (8) 式的密度可知, 当  $\alpha > 1$  时, (7) 式给出的  $n_i^{\text{IM}}$  更小, 因而不混溶态会转变为 PM1 态; 当  $\alpha < 1$  时, (8) 式给出的  $n_i^{\text{IM}}$  更小, 因而不混溶态会转变为 PM2 态. 这个结论也可以通过分析 (5) 式和 (6) 式中的不等式条件得出.

由上面得到的  $n_i^{\text{IM}}$ , 可以写出不混溶态与部分混溶态的相边界方程:

$$\frac{n_1}{n_1^{\text{IM}}} + \frac{n_2}{n_2^{\text{IM}}} = 1. \quad (9)$$

该相边界在  $n_1$ - $n_2$  平面中是连接  $(n_1^{\text{M}}, 0)$  点和  $(0, n_2^{\text{M}})$  点的直线 (见图 1). 这从几何上体现了  $n_i^{\text{M}}$  的物理意义, 即  $i$  组分的凝聚体在不混溶态中所能达到的上界密度 (所以变量符号用 IM 作上标). 此外, 从 (7) 式和 (8) 式还可看出, 无论是哪种转变, 两种单分量 BEC 的密度比均为  $n_1^{\text{M}}/n_2^{\text{M}} = \alpha$ . 这个简单关系意味着, 在力学平衡的等压条件下, 平均场项的大部分贡献被抵消, 而未抵消的剩余部分是与 LHY 能量可比的同阶小量. 这也就是为何量子涨落会对体系的混溶性产生重要影响的原因.

### 2.3 部分混溶态到均匀混溶态的转变

在部分混溶态中, 特定组分的单分量 BEC 与混合 BEC 达成共存平衡. 给定的平衡密度下, 两个共存相的体积占比可以连续变化. 当混合 BEC 的占比趋于 100% 时, 共存态即转变为均匀混溶态. 因此, 密度  $(n_1^{\text{M}}, n_2^{\text{M}})$  在相图中的演化轨迹实际上就对应于体系从部分混溶到均匀混溶的转变线.

对于在  $\alpha > 1$  时出现的 PM1 态, 它与均匀混溶态间的相边界可以通过消去平衡条件 (3) 式前两式中的  $n_i^{\text{S}}$  得到. 取密度变量准至  $\Delta_g^2$  阶, 相边界方程可解析地写为

$$\begin{aligned} & \frac{15\sqrt{\pi}}{32a^{3/2}} \alpha^{7/2} \Delta_g (n_2^{\text{M}})^2 \\ & = 2(n_1^{\text{M}} + \alpha n_2^{\text{M}})^{5/2} - (n_1^{\text{M}} + \alpha^2 n_2^{\text{M}})^{3/2} \\ & \quad \times (2n_1^{\text{M}} + 5\alpha n_2^{\text{M}} - 3\alpha^2 n_2^{\text{M}}). \end{aligned} \quad (10)$$

该相边界与 (9) 式描述的不混溶边界共同圈定了 PM1 态的相区 (见图 1(b)). 两条边界在  $n_2$  轴上的交点即对应于不混溶态的上界密度  $n_2^{\text{M}}$ . 这个结论可以通过对 (10) 式取  $n_1^{\text{M}} \rightarrow 0$  的极限来加以验证.

另一方面, 当 (10) 式中的  $n_2^{\text{M}} \rightarrow 0$  时, 该相边界还会与旋节线在  $n_1$  轴上相交. 旋节线是均匀相发生动力学失稳的标志线. 它将相分离态的参数区间 (包括不混溶相区和部分混溶相区) 分成了两个部分: 在密度较小的一侧, 均匀相是动力学不稳定的; 在密度较大的一侧, 均匀相是局域稳定的, 但由于其能量比相分离态高, 因而只能以亚稳态形式存在. 在二元体系中, 旋节线方程可以一般地表达为  $\frac{\partial(\mu_1, \mu_2)}{\partial(n_1, n_2)} = 0$  [24]. 对于本文考虑的情形, 它约化为  $n_1$ - $n_2$  平面内的直线方程:

$$\frac{n_1}{n_1^{\text{C}}} + \frac{n_2}{n_2^{\text{C}}} = 1. \quad (11)$$

其中  $n_1^{\text{C}}$  和  $n_2^{\text{C}}$  分别是旋节线在  $n_1$  轴和  $n_2$  轴上的截距. 当密度准至  $\Delta_g^2$  阶时, 可得到:

$$n_i^{\text{C}} = \frac{\pi}{64a^3} \frac{g}{g_{ii}} \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^4} \Delta_g^2, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

不难验证, 旋节线与 (10) 式给出的 PM1 态的相边界相交于  $(n_1^{\text{C}}, 0)$  点. 这个点就是部分混溶相变的临界点.

沿用类似的计算步骤, 也可以得到  $\alpha < 1$  时 PM2 态与均匀混溶态间的相边界, 其解析表达式相当于将 (10) 式中的  $n_1^{\text{M}}$  与  $n_2^{\text{M}}$  互换, 并将  $\alpha$  替换为  $\alpha^{-1}$ . 该相边界与不混溶边界相交于  $(n_1^{\text{M}}, 0)$ , 与旋节线相交于临界点  $(0, n_2^{\text{C}})$ .

图 1 所示为  $\alpha = 3$  和  $\alpha = 1/3$  两种情形下的基态相图, 其中实线是通过数值求解相平衡条件得到的相边界, 点线是准至  $\Delta_g^2$  阶的解析结果. 二者在小的  $\Delta_g$  参数下符合得很好. 当  $\alpha$  的取值更接近或更远离 1 时, 部分混溶的相区会相应地向密度更大或更小的区间移动. 当  $\alpha \rightarrow 1$  时,  $n_i^{\text{M}}$  和  $n_i^{\text{C}}$  都趋于无穷, 这意味着部分混溶转变实际上不会发生, 体系将一直保持不混溶状态.

### 2.4 与单模近似结果的对比

不同于本文方法, 文献 [37] 采用了单模近似计算体系的相图. 该理论引入了两个新的密度变量:

$$\begin{aligned} n_+ & = n_1 \cos \theta + n_2 \sin \theta, \\ n_- & = -n_1 \sin \theta + n_2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\theta = \arctan \alpha$ . 由物态方程 (1) 不难推知, 在低密度区间,  $\frac{\partial \mu_i}{\partial n_+} \gg \frac{\partial \mu_i}{\partial n_-}$ , 因此可称  $n_+$  为硬模密度,  $n_-$  为软模密度. 当发生相分离时, 为了使体系能量达到最小, 两个平衡相的硬模密度会非常接近. 如果忽略两相中  $n_+$  值的微小差别, 则相分离构型完全由单变量能量函数  $\mathcal{E}(n_-)$  决定 [37]. 这就是单模近似的基本思想.

上文由相平衡条件推导出的相边界与单模近似方法给出的结果在准至  $\Delta_g^2$  阶一致. 为了验证这一点, 将前面得到的相图重新在  $(n_+, n_-)$  平面内画出 [见图 1(b),(c) 中的插图]. 可以看到, 部分混溶态的相区出现在  $n_{+, \text{min}}^{\text{PM}} < n_+ < n_{+, \text{max}}^{\text{PM}}$  区间内, 其中  $n_{+, \text{min}}^{\text{PM}}$  对应于不混溶边界的  $n_+$  值,  $n_{+, \text{max}}^{\text{PM}}$  对应于部分混溶临界点的  $n_+$  值. 对于 PM1 态, 利用 (7) 式

和 (12) 式, 可明确写出 (准至  $\Delta_g^2$  阶):

$$n_{+, \min}^{\text{PM}} = \frac{225\pi}{1024a^3} \frac{\alpha^3}{(2 + 3\alpha^{5/2} - 5\alpha^{3/2})^2 \sqrt{1 + \alpha^2}} \Delta_g^2, \quad (14)$$

$$n_{+, \max}^{\text{PM}} = \frac{\pi}{64a^3} \frac{\alpha^3}{(\alpha - 1)^4 \sqrt{1 + \alpha^2}} \Delta_g^2. \quad (15)$$

这正是文献 [37] 给出的部分混溶态的密度范围. 类似也可以写出 PM2 态所处的  $n_+$  值区间, 这相当于将 (14) 式和 (15) 式结果中的  $\alpha$  替换为  $\alpha^{-1}$ .

需要指出的是,  $n_{+, \min}^{\text{PM}} < n_+ < n_{+, \max}^{\text{PM}}$  只是部分混溶态出现的必要条件. 在此区间内, 体系也可能是均匀混溶的 [见图 1(b),(c) 中的插图]. 换言之, (14) 式和 (15) 式并不能完整地概括基态相图的特征. 从这个意义上说, 本文得到的相边界是对之前理论工作的重要补充. 本文结果更全面地描述了部分混溶态的密度范围, 为实验观测提供了明确的参考依据.

## 2.5 临界点的奇异性

部分混溶态与均匀混溶态间的转变在量子临界点终止. 对于 PM1 态和 PM2 态, 量子临界点的密度分别为  $(n_1^C, 0)$  和  $(0, n_2^C)$ . 趋近临界点时, 体系密度响应的静态极化率 (static susceptibility) 会表现出发散的奇异性.

设想体系在均匀混合状态下出现粒子数变化的扰动. 微扰哈密顿量写为  $\delta\hat{H} = -\sum_{i=1,2} A_i \hat{N}_i$ , 其中  $\hat{N}_i$  为  $i$  组分的原子数算符,  $A_i$  为扰动强度. 在线性响应条件下, 扰动引起的密度变化正比于  $A_i$ ,

$\delta n_i = \sum_{j=1,2} \chi_{ij} \Lambda_j$ , 线性系数  $\chi_{ij}$  即为静态极化率, 它等于  $i$  组分原子的平衡态密度对  $j$  组分原子化学势的偏导数:

$$\chi_{ij} = \left( \frac{\partial n_i}{\partial \mu_j} \right)_{\mu_{3-j}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (16)$$

利用热力学关系和雅可比行列式的性质, 极化率又可写为

$$\chi_{ii} = \frac{\gamma_{3-i}}{\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_{12}^2}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$\chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{\gamma_{12}}{\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_{12}^2}, \quad (18)$$

其中  $\gamma_i \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_i^2}$  和  $\gamma_{12} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_1 \partial n_2}$  可以根据物态方程 (1) 算出. 由于临界点是旋节线与部分混溶相边界的交点, 它满足旋节线方程  $\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_{12}^2 = 0$ , 因此极化率张量的所有分量在临界点都是发散的.

在临界点附近, 静态极化率的奇异部分可以简化为

$$\chi_{ii} = \frac{1}{g_{ii} \Delta_g} \left( \frac{n_1}{n_1^C} + \frac{n_2}{n_2^C} - 1 \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$\chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{1}{g \Delta_g} \left( \frac{n_1}{n_1^C} + \frac{n_2}{n_2^C} - 1 \right)^{-1}. \quad (20)$$

该结果表明, 对于密度高于旋节线的均匀混溶相,  $\chi_{11}$  和  $\chi_{22}$  均为正数, 这符合热力学的稳定性要求; 而  $\chi_{12}$  和  $\chi_{21}$  为负数, 说明异组分之间的密度响应是反相的 (out-of-phase).

图 2 所示为  $\alpha = 3$  时静态极化率  $\chi_{11}$  和  $\chi_{12}$  在临界点  $(n_1^C, 0)$  附近的变化曲线 ( $\chi_{22}$  的行为与  $\chi_{11}$  类似). 实线是根据 (17) 式和 (18) 式算得的数值

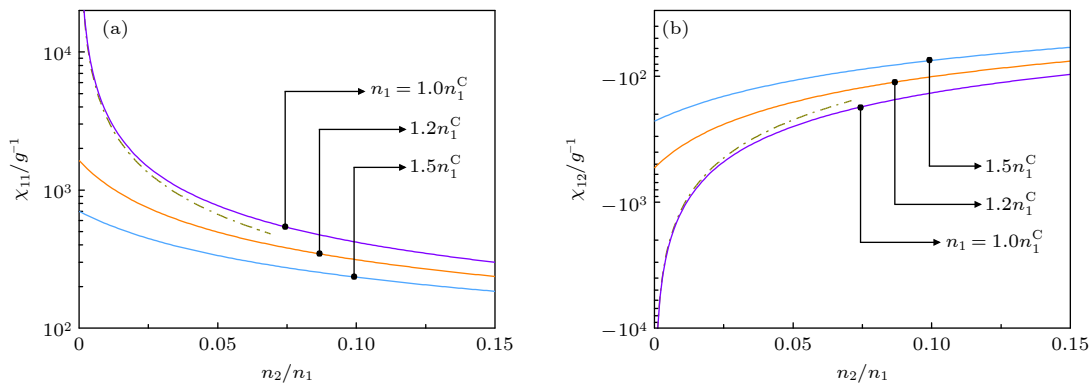


图 2 在不同  $n_1$  取值下, 静态极化率  $\chi_{11}$  和  $\chi_{12}$  随 2 组分原子浓度的变化曲线. 两图中的点划线分别对应于  $n_1 = n_1^C$  时 (19) 式和 (20) 式给出的解析结果. 相互作用参数:  $\alpha = 3$ ,  $\Delta_g = 0.01$

Fig. 2. Static susceptibilities  $\chi_{11}$  and  $\chi_{12}$  as functions of the concentration of species 2 with  $n_1$  fixed at different values. The dash-dotted lines in two plots correspond to the analytical results given by Eqs. (19) and (20), respectively, with  $n_1 = n_1^C$ . Interaction parameters:  $\alpha = 3$ , and  $\Delta_g = 0.01$ .

结果, 点划线是固定  $n_1 = n_1^c$  时 (19) 式和 (20) 式给出的解析结果, 后者很好地刻画了极化率在临界点处的奇异性.

除了静态极化率发散之外, 体系在临界点附近还会表现出声子模软化、关联长度发散等特征行为. 对于这些临界现象的描述, 超出了纯热力学分析的范畴, 有待今后进一步探讨.

### 3 不等质量的双组分 BEC

在当前冷原子实验中, 用同一种原子制备的双组分 BEC 还很难实现  $\Delta_g$  为小正数的参数条件. 现实中更有希望的实验方案是在不等质量的异核原子组成的玻色混合气体中探测部分混溶态及其相变.

当两组分存在质量失配时, 混合 BEC 的平均场能量与等质量情形相同, 但量子涨落贡献的 LHY 能量更为复杂, 其积分形式为<sup>[39,40]</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{LHY}} = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \hbar\omega_{k,+} + \hbar\omega_{k,-} - \epsilon_{k,1} \right. \\ & \left. - \epsilon_{k,2} - g_{11}n_1 - g_{22}n_2 + \frac{g_{11}^2 n_1^2}{2\epsilon_{k,1}} \right. \\ & \left. + \frac{g_{22}^2 n_2^2}{2\epsilon_{k,2}} + \frac{2g^2 n_1 n_2}{\epsilon_{k,1} + \epsilon_{k,2}} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $k$  为波矢,  $\epsilon_{k,i} = \hbar^2 k^2 / 2m_i$  为  $i$  组分的单粒子能量 ( $m_i$  为原子质量),  $\hbar\omega_{k,\pm}$  是 Bogoliubov 元激发能谱:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{k,\pm} = & \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\hbar\omega_{k,1})^2 + (\hbar\omega_{k,2})^2 \right] \right. \\ & \left. \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(\hbar\omega_{k,1})^2 - (\hbar\omega_{k,2})^2]^2 + 16g^2 n_1 n_2 \epsilon_{k,1} \epsilon_{k,2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $\hbar\omega_{k,i} = \sqrt{\epsilon_{k,i}(\epsilon_{k,i} + 2g_{ii}n_i)}$ . 为了简化, 这里同样忽略了  $\mathcal{E}_{\text{LHY}}$  对  $\Delta_g$  的依赖.

由于不等质量情况下物态方程没有简洁的解

析形式, 实际理论计算时只能针对特定参数 (质量比和相互作用强度), 通过数值求解相平衡条件确定体系的基态相图. 这样的预测方式对于实验上可能采用的多种原子组合来说不方便, 而且也难以建立起不同体系之间的图象联系. 为弥补这个不足, 这里提出一种简单方法, 可以解析地给出部分混溶态出现的阈值密度, 并判断其相分离构型.

注意到在求解不混溶态到部分混溶态的转变条件时, 实际上只用到了  $n_1 \rightarrow 0$  和  $n_2 \rightarrow 0$  两个极限情形的物态方程, 因此可以采用玻色极化子图象简化计算, 将组分含量大的原子视为多体背景, 把组分含量小的原子视为杂质. 当杂质浓度足够低时, 将 (21) 式保留至浓度的线性项, 可以得到:

$$\mathcal{E}_{\text{LHY}} = \mathcal{E}_{\text{LHY}}^{\text{BG}} \left[ 1 + \frac{15}{4} \frac{g^2}{g_{\text{BG}}^2} \frac{n_I}{n_{\text{BG}}} f\left(\frac{m_I}{m_{\text{BG}}}\right) \right], \quad (23)$$

其中  $\mathcal{E}_{\text{LHY}}^{\text{BG}} = 8m_{\text{BG}}^3 (g_{\text{BG}} n_{\text{BG}})^{5/2} / (15\pi^2 \hbar^3)$  为背景 BEC 的 LHY 能量,  $n_{\text{BG}}$  和  $n_I$  分别为背景原子和杂质原子的密度,  $g_{\text{BG}}$  为背景原子间的相互作用强度,  $f$  是原子质量比  $\frac{m_I}{m_{\text{BG}}}$  的无量纲函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} \left( 1 - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-x^2} \right), & 0 < x < 1, \\ \frac{x}{x^2-1} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{x^2-1} - 1 \right), & x > 1. \end{cases} \quad (24)$$

(23) 式中括号中的第 2 项实际上就对应于极化子能量的二阶微扰修正<sup>[41]</sup>.

将 1 组分、2 组分原子分别视为杂质 (另一组分视为多体背景), 即可得到  $n_i \rightarrow 0$  时低浓度展开的物态方程. 再根据转变条件 (5) 式和 (6) 式, 便可确定不混溶态的上界密度. 当不混溶态转变为 PM1 态时, 准至  $\Delta_g^2$  阶, 可得到

$$n_i^{\text{IM}} = \frac{225\pi}{256a^3} \sqrt{\frac{g}{g_{ii}}} \frac{\alpha^{5/2} \beta^{3/2}}{[4 + 6\alpha^{5/2} \beta^{3/2} - 15\alpha^{3/2} \beta^{3/2} f(\beta^{-1})]^2} \Delta_g^2, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

其中  $\beta \equiv m_2/m_1$ . 当不混溶态转变为 PM2 态时, 同样准至  $\Delta_g^2$  阶, 有

$$n_i^{\text{IM}} = \frac{225\pi}{256a^3} \sqrt{\frac{g}{g_{ii}}} \frac{\alpha^{-5/2} \beta^{-3/2}}{[4 + 6\alpha^{-5/2} \beta^{-3/2} - 15\alpha^{-3/2} \beta^{-3/2} f(\beta)]^2} \Delta_g^2, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

这相当于对 (25) 式进行变量替换,  $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$ ,  $\beta \rightarrow \beta^{-1}$ . 若取  $m_1 = m_2 = m$ , 由  $f(1) = 2/3$  可知, (25) 式和 (26) 式即分别回到等质量情形的 (7) 式和 (8) 式.

与之前的处理类似, 对于给定的参数  $\alpha$  和  $\beta$ , 可以通过比较 (25) 式和 (26) 式的密度大小, 判断究竟会发生哪种不混溶转变. 引入无量纲的判别函数  $W$ ,

$$W(\alpha, \beta) = \alpha^{1/4} \beta^{3/4} [2\alpha - 15f(\beta^{-1})] - \alpha^{-1/4} \beta^{-3/4} [2\alpha^{-1} - 15f(\beta)], \quad (27)$$

容易验证, 当  $W > 0$  时, (25) 式给出的  $n_i^{\text{IM}}$  更小, 因而不混溶态会转变为 PM1 态; 当  $W < 0$  时, (26) 式给出的  $n_i^{\text{IM}}$  更小, 因而不混溶态会转变为 PM2 态. 在等质量情形下 ( $\beta = 1$ ), 判别条件  $W \geq 0$  就约化为  $\alpha \geq 1$ .

利用上面的结果, 很容易从解析上判断在现实冷原子系统中会出现哪种构型的部分混溶态. 图 3 所示为判别函数  $W$  在  $\alpha$ - $\beta$  参数平面内的零值线. 在该曲线上方,  $W > 0$ , 对应于 PM1 态出现的参数区间; 在该曲线下方,  $W < 0$ , 对应于 PM2 态出现的参数区间. 图中还标记了几种常见的玻色混合气体在参数空间中的位置, 由此可以很清楚地判断出各体系可能出现的部分混溶构型. 相关结果如表 1 所示.

由 (25) 式和 (26) 式求得  $n_i^{\text{IM}}$  后, 再代入相边界方程 (9), 即可得到部分混溶态出现的阈值条件. 表 1 所示为  $\Delta_g = 0.01$  时各实验体系的  $n_i^{\text{IM}}$  值. 可以看到, 在  $^{23}\text{Na}+^{39}\text{K}$  和  $^{41}\text{K}+^{87}\text{Rb}$  体系中, 不混溶态的上界密度达到了  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$  量级, 这在冷原子实验中一般很难获得. 仅从密度的阈值条件看, 部分混溶态在  $^{39}\text{K}+^{41}\text{K}$  体系中更容易实现. 而且, 由

(8) 式和 (26) 式对比可知, 该同位素体系可以很好地用等质量情形的结果描述 (质量失配引起的修正约为 2%).

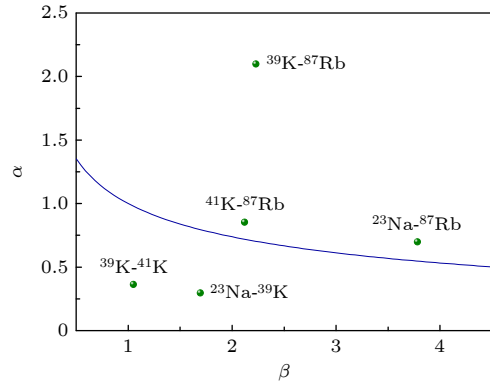


图 3  $W$  函数在  $\alpha$ - $\beta$  平面内的零值线. 在零值线两侧, 可实现的部分混溶态具有不同的构型 (见正文). 圆点标出了几种实验上已制备出的双组分 BEC 在参数平面内的位置. Fig. 3. Contour plot of  $W = 0$  in  $\alpha$ - $\beta$  plane. In the two regions separated by the contour, the achievable partially miscible state has different configuration (see text). Big dots mark several experimentally realized mixtures at their positions in the parameters plane.

需要说明的是, 在上面的讨论中, 始终假定对于给定的参数  $\alpha$  和  $\beta$ , 基态只会出现一种部分混溶态. 但实际上在不等质量情形下, PM1 态和 PM2 态有可能在同一体系中出现 [37]. 此时, 不混溶态的转变条件并非由 (5) 式和 (6) 式给出. 此前文献 [37] 的数值结果表明, 当两组分的质量失配不超过 5 倍时, 这种特殊情况对应的参数区间是极小的 (非常靠近  $W$  的零值线). 由钠、钾、铷原子组成的混合气体, 事实上都不满足这种极特殊的参数条件, 因此表 1 中  $n_i^{\text{IM}}$  的计算结果并不会受影响.

表 1 冷原子玻色混合气体中可实现的部分混溶构型, 以及不混溶相边界的密度值  $n_i^{\text{IM}}$ . 这里约定质量轻的元素为组分 1, 质量重的元素为组分 2. 散射长度为平均场失稳阈值处的数据 (以 Bohr 半径  $a_0$  为单位), 取自所列的参考文献.  $n_i^{\text{IM}}$  的预测值是根据 (25) 式和 (26) 式计算的,  $\Delta_g$  均设为 0.01

Table 1. Configuration of partially miscible state and  $n_i^{\text{IM}}$  in various Bose mixtures of cold atoms. Here, the lighter elements are set as species 1, and the heavier elements are set as species 2. Intraspecies scattering lengths at the mean-field immiscibility threshold, measured in unit of Bohr radius  $a_0$ , are taken from the listed references. The predicted  $n_i^{\text{IM}}$  are computed using Eqs. (25) and (26), with  $\Delta_g = 0.01$ .

玻色混合气体	$a_{11}/a_0$	$a_{22}/a_0$	部分混溶构型	$n_1^{\text{IM}}/(10^{14}\text{cm}^{-3})$	$n_2^{\text{IM}}/(10^{14}\text{cm}^{-3})$	文献
$^{23}\text{Na} + ^{39}\text{K}$	52	7.8	PM2	21.46	72.14	[9]
$^{23}\text{Na} + ^{87}\text{Rb}$	54.5	100.4	PM1	2.87	4.12	[8]
$^{39}\text{K} + ^{41}\text{K}$	470	65	PM2	0.026	0.073	[10]
$^{39}\text{K} + ^{87}\text{Rb}$	10.2	100.4	PM1	3.19	1.52	[7]
$^{41}\text{K} + ^{87}\text{Rb}$	65	100.4	PM1	16.14	18.96	[12]

采用上面的玻色极化子图象, 如果将物态方程保留至杂质浓度的更高阶, 还可以得到量子临界点随质量比参数的变化行为. 对于这个问题的考察, 我们留待今后作进一步研究.

## 4 结 论

综上所述, 本文运用包含 LHY 修正的物态方程, 研究了双组分 BEC 在平均场弱失稳区间的基态相图. 对于等质量的混合体系, 给出了各相边界的解析表达式, 可以很好地描述稀薄情形下不混溶态、部分混溶态以及均匀混溶态之间的转变, 同时指出了密度响应的静态极化率在量子临界点附近的奇异性. 对于不等质量的混合体系, 利用物态方程在低杂质浓度下的展开形式, 得到了部分混溶态出现的阈值密度, 并提出了依据原子质量比和相互作用参数判断部分混溶构型的解析方法. 这些结果揭示了量子涨落效应对双组分 BEC 混溶性的重要影响, 也为当前冷原子物理的实验探索提供了有价值的参考依据.

## 参考文献

- [1] Graf E H, Lee D M, Reppy J D 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 417
- [2] Pricauptenko L, Treiner J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 430
- [3] Maciolek A, Krech M, Dietrich S 2004 *Phys. Rev. E* **69** 036117
- [4] Papp S B, Pino J M, Wieman C E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 040402
- [5] Thalhammer G, Barontini G, De Sarlo L, Catani J, Minardi F, Inguscio M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 210402
- [6] McCarron D J, Cho H W, Jenkin D L, Koppinger M P, Cornish S L 2011 *Phys. Rev. A* **84** 011603
- [7] Wacker L, Jorgensen N B, Birkmose D, Horchani R, Ertmer W, Klempt C, Winter N, Sherson J, Arlt J J 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053602
- [8] Wang F, Li X, Xiong D, Wang D 2016 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **49** 015302
- [9] Schulze T A, Hartmann T, Voges K K, Gempel M W, Tiemann E, Zenesini A, Ospelkaus S 2018 *Phys. Rev. A* **97** 023623
- [10] Tanzi L, Cabrera C R, Sanz J, Cheiney P, Tomza M, Tarruell L 2018 *Phys. Rev. A* **98** 062712
- [11] Li W X, Chen Y D, Sun Y T, Tung S, Julianne P S 2022 *Phys. Rev. A* **106** 023317
- [12] Burchianti A, D'Errico C, Prevedelli M, Salasnich L, Ancilotto F, Modugno M, Minardi F, Fort C 2020 *Condes. Matter* **5** 21
- [13] Castilho P C M, Pedrozo-Peñañiel E, Gutierrez E M, Mazo P L, Roati G, Farias K M, Bagnato V S 2019 *Laser Phys. Lett.* **16** 035501
- [14] Mi C D, Nawaz K S, Wang P J, Chen L C, Meng Z M, Huang L H, Zhang J 2021 *Chin. Phys. B* **30** 063401
- [15] Hadzibabic Z, Stan C A, Dieckmann K, Gupta S, Zwierlein M W, Gorlitz A, Ketterle W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 160401
- [16] Ospelkaus S, Ospelkaus C, Humbert L, Sengstock K, Bongs K 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 120403
- [17] Ferrier-Barbut I, Delehaye M, Laurent S, Grier A T, Pierce M, Rem B S, Chevy F, Salomon C 2014 *Science* **345** 1035
- [18] Yao X C, Chen H Z, Wu Y P, Liu X P, Wang X Q, Jiang X, Deng Y, Chen Y A, Pan J W 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 145301
- [19] Roy R, Green A, Bowler R, Gupta S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 055301
- [20] Taglieber M, Voigt A C, Aoki T, Hansch T W, Dieckmann K 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 010401
- [21] Hara H, Takasu Y, Yamaoka Y, Doyle J M, Takahashi Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 205304
- [22] Ravensbergen C, Corre V, Soave E, Kreyer M, Kirilov E, Grimm R 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 203402
- [23] Ciamei A, Finelli S, Trenkwalder A, Inguscio M, Simoni A, Zaccanti M 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 093402
- [24] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation In Dilute Gases* (New York: Cambridge University Press) pp350–352
- [25] Pitaevskii L, Stringari S 2016 *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity* (New York: Oxford University Press) pp401–403
- [26] Navarro R, Carretero-González R, Kevrekidis P G 2009 *Phys. Rev. A* **80** 023613
- [27] Wen L, Liu W M, Cai Y, Zhang J M, Hu J 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043602
- [28] Bisset R N, Kevrekidis P G, Ticknor C 2018 *Phys. Rev. A* **97** 023602
- [29] Pattinson R W, Billam T P, Gardiner S A, McCarron D J, Cho H W, Cornish S L, Parker N G, Proukakis N P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 013625
- [30] Lee K L, Jørgensen N B, Liu I K, Wacker L, Arlt J J, Proukakis N P 2016 *Phys. Rev. A* **94** 013602
- [31] Cikojević V, Markić L V, Boronat J 2018 *New J. Phys.* **20** 085002
- [32] Wen L, Guo H, Wang Y J, Hu A Y, Saito H, Dai C Q, Zhang X F 2020 *Phys. Rev. A* **101** 033610
- [33] Gutierrez E M, Oliveira G A, Farias K M, Bagnato V S, Castilho P C M 2021 *Appl. Sci.* **11** 9099
- [34] Schaebybroeck B V 2013 *Physica A* **392** 3806
- [35] Ota M, Giorgini S, Stringari S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 075301
- [36] Spada G, Parisi L, Pascual G, Parker N G, Billam T P, Pilati S, Boronat J, Giorgini S 2022 arXiv: 2211.09574
- [37] Naidon P, Petrov D S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 115301
- [38] Petrov D S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 155302
- [39] Larsen D M 1963 *Ann. Phys. (Berlin)* **24** 89
- [40] Balabanyan G O 1986 *Theor. Math. Phys.* **66** 81
- [41] Christensen R S, Levinsen J, Bruun G M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 160401

# Miscibility of dual-species Bose-Einstein condensates\*

He Li<sup>1)†</sup> Zhang Tian-Qi<sup>2)</sup> Li Ke-Xin<sup>2)</sup> Yu Zeng-Qiang<sup>2)3)</sup>

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

( Received 3 January 2023; revised manuscript received 6 April 2023 )

## Abstract

The miscibility of quantum liquids is an interesting topic in many-body physics, which has been intensively investigated in <sup>3</sup>He-<sup>4</sup>He superfluids and the mixtures of ultracold atoms. In the context of dual species Bose-Einstein condensates, the mean-field description has been well established, according to which, the miscibility condition is density independent and determined only by the ratio of inter- and intra-species interaction strength. Recently, Nadion and Petrov proposed that [*Phys. Rev. Lett.* **126** 115301], in the vicinity of the mixing-demixing threshold, quantum fluctuations play an important role to affect the equilibrium stability, and as a result, the partially miscible state emerges. This new phase of quantum matter opens up new perspectives to explore the beyond mean-field effect in ultracold atomic gases.

In this work, according to the equation of state taking the Lee-Huang-Yang correction into consideration, we investigate the ground state phase diagram of repulsive binary Bose mixtures in the interacting regime suffering a weak mean-field instability. Under the thermodynamic balance conditions, the phase boundaries between the immiscible state, partially miscible state and the homogenous state are determined. For the equal-mass case, these phase transitions only take place on condition that intra-species interactions are in an asymmetric form. In terms of interaction parameters, we explicitly derive analytical expressions of the phase boundaries, which are appropriate to describe the transitions in sufficiently dilute atomic gases. At the quantum critical point, where the partially miscible state terminates, the susceptibility tensor of the density response exhibits a divergent behavior. For the unequal-mass case, the beyond-mean-field equation of state cannot be written in a compact form, thus the determination of the phase boundaries is more involved. By expanding the Lee-Huang-Yang energy expression to the terms linear in the concentration of the minority species, we analytically obtain the threshold density for the partially miscible transition. We also propose a discriminant function, from which the configuration of the partially miscible state can be identified for the given mass ratio and interaction strength. Applications of these theoretical results to experimental systems, such as sodium, potassium, and rubidium gases, are presented.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, Bose mixture, miscibility, quantum fluctuation

**PACS:** 03.75.Hh, 67.85.-d, 67.60.Bc, 42.50.Lc

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230001

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12104275, 12174230).

† Corresponding author. E-mail: [heli@sxu.edu.cn](mailto:heli@sxu.edu.cn)

## 双组分玻色-爱因斯坦凝聚体的混溶性

贺丽 张天琪 李可芯 余增强

### Miscibility of dual-species Bose-Einstein condensates

He Li Zhang Tian-Qi Li Ke-Xin Yu Zeng-Qiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 110302 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230001

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230001>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

#### 可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2022, 71(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

#### 光晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性能谱特性

Nonlinear energy band structure of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in optical lattice

物理学报. 2021, 70(20): 200302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210705>

#### 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展

The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010303 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191648>

#### 偶极玻色-爱因斯坦凝聚体中的各向异性耗散

Anisotropic dissipation in a dipolar Bose-Einstein condensate

物理学报. 2020, 69(8): 080302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200025>

#### 光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity

物理学报. 2018, 67(18): 183701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180971>