

专题: 高能重离子碰撞过程的自旋与手征效应

相对论自旋流体力学*

浦实¹⁾ 黄旭光^{2)†}

1) (中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

2) (复旦大学物理学系, 粒子物理与场论中心, 核物理与离子束应用教育部重点实验室, 上海理论核物理中心, 上海 200433)

(2023 年 1 月 8 日收到; 2023 年 1 月 30 日收到修改稿)

近年来, 随着重离子碰撞实验中超子自旋极化与矢量介子自旋排列现象的发现, 关于夸克胶子物质中自旋输运的理论研究也得到蓬勃发展, 其中包括相对论自旋流体力学, 它是描述自旋输运的流体力学理论. 本文对相对论自旋流体力学的近期发展进行了综述, 主要包括以下内容: 1) 相对论自旋流体力学基本方程的推导, 包括宏观的唯象学推导、基于有效场论的推导以及基于输运理论的推导; 2) 该理论框架的一些特殊性质, 包括能动量张量中的反对称结构以及赝规范变换性质等; 3) 在 Bjorken 和 Gubser 膨胀体系中的解析解及其对于重离子碰撞物理的意义.

关键词: 自旋流体力学, 超子自旋极化, 相对论重离子碰撞**PACS:** 12.38.Mh, 25.75.-q, 47.10.-g**DOI:** 10.7498/aps.72.20230036

1 引言

相对于某一惯性系旋转的流体在自然界和实验室中是很常见的. 这样的流体可以在不同的空间尺度上出现, 大到转动星系, 小到超流体中的量子涡旋. 最近, 人们发现相对论重离子碰撞中产生的夸克-胶子等离子体 (QGP) 就是这样一种旋转的流体. 不但如此, 如果以 (非相对论性) 流体涡度

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (1)$$

来度量, QGP 可以呈现 $|\boldsymbol{\omega}| \sim 10^{21} \text{ s}^{-1}$ 的流体涡旋 (流体涡旋即流体的定域转动, 涡度刻画了该转动的角速度)^[1,2]. 这使得 QGP 成为目前已知的 (定域) 转动最快的流体. 流体涡旋一个直接的物理结果是会造成自旋极化现象的出现, 即流体中粒子的自旋将倾向于沿着流体涡旋的方向排列. 这可以通过自旋和转动的耦合 Hamilton 量 $H \sim -\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S}$ (其

中, $\boldsymbol{S}$ 表示自旋) 直接看出: 当自旋与涡旋方向一致时将降低体系的能量. 在重离子碰撞物理领域, 这意味着夸克在 QGP 中会出现自旋极化, 进而在 QGP 强子化后造成强子的自旋极化或自旋排列现象. 关于这一可能性, 最早是中国科学家梁作堂教授和王新年教授^[3,4] 在 2004 年提出的, 并在 2017 年被相对论重离子对撞机 (RHIC) 上的 STAR 实验组在 Au + Au 碰撞实验中的 Λ 超子上首次观察到^[5]. 最近 (2021 年), 又在 Ξ^- 和 Ω^- 超子上观测到^[6]. 在 2022 年, 自旋排列现象也在 ϕ 介子和 J/ψ 介子上被观察到^[7-10]. 虽然对于这些观测结果还存在一些有待于理论上深入理解的地方 (见综述文章^[11-18] 中的讨论), 但它们毫无疑问地显示 QGP 中是存在自旋极化和自旋输运现象的. 最近几年, 对于 QGP 中自旋极化和输运的理论研究也伴随着实验的进展向更广更深的方面发展, 其中特别值得关注的是自旋输运理论和自旋流体力学理论的发展. 本文将主要集中于自旋流体力学的讨论, 而关于自旋

* 国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1604900)、国家自然科学基金 (批准号: 12225502, 12075061, 12147101, 12075235, 12135011) 和上海市自然科学基金 (批准号: 20ZR1404100) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: huangxuguang@fudan.edu.cn

输运理论, 读者可以从文献中获得相关介绍, 如综述 [19,20] 及其所引用的文献. 除此以外, 自旋流体力学也在其他领域受到广泛关注, 如在凝聚态物理领域中, 人们发现流体材料中的自旋输运现象 [21], 在冷原子领域也有相关讨论 [22] 等, 这里不再展开讨论.

2 采用熵增原理推导相对论自旋流体力学

2.1 正则形式的相对论自旋流体

相对论流体力学是描述相对论多体系统的一种有效理论. 当系统宏观时间和空间尺度远大于微观尺度下粒子平均自由程时, 相对论流体力学可以较好地描述系统整体演化等. 在相对论流体力学中, 动力学变量是能量-动量密度、粒子数密度等各类守恒量的密度, 而对应的守恒定律即是相对论流体力学方程. 相对论流体力学可以通过对物理学量的梯度展开来构造. 通常情况下, 梯度展开的领头阶对应着相对论理想流体力学, 而高阶项则包含着热传导、粒子扩散、黏滞效应等耗散过程.

相对论自旋流体力学则是将系统角动量演化也纳入整体演化之中, 即要考虑能-动量守恒和角动量守恒定律. 除此之外, 若体系的动力学过程还具有内部对称性 (比如 $U(1)$ 重子数守恒), 也需要考虑对应守恒荷的守恒定律. 本文将首先回顾由能-动量守恒、角动量守恒和粒子数守恒这三种守恒定律确定的相对论流体力学形式. 由于在量子场论体系中, 从总角动量中定义出自旋角动量具有一定任意性, 为了确定起见, 本文选取正则形式的自旋角动量, 并得到在正则形式的相对论自旋流体力学 [23,24].

首先, 粒子数守恒、能-动量守恒以及总角动量守恒方程分别是:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \partial_\lambda J_{\text{can}}^{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

其中, j^μ 是粒子流矢量, $\Theta^{\mu\nu}$ 和 $J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu}$ 分别是正则形式的能动量张量和总角动量流张量. 总角动量流 $J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu}$ 通常具有如下形式:

$$J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu} = x^\mu \Theta^{\alpha\nu} - x^\nu \Theta^{\alpha\mu} + \Sigma^{\alpha\mu\nu}, \quad (3)$$

式中最后一项 $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$ 与轨道运动无关, 称为正则形式的自旋流张量. 将 (3) 式代入总角动量守恒方程 $\partial_\lambda J_{\text{can}}^{\lambda\mu\nu} = 0$, 并结合能-动量守恒方程 $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$,

可以得到

$$\partial_\alpha \Sigma^{\alpha\mu\nu} = -2\Theta^{[\mu\nu]}, \quad (4)$$

其中 $[ab]$ 表示对指标 a, b 反对称化. (4) 式说明, 相对论性量子系统自旋并不会单独守恒, 只有总角动量是守恒的, 而自旋和轨道角动量可以发生相互转化.

可以对 j^μ , $\Theta^{\mu\nu}$ 和 $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$ 做张量分解. 首先, 对于 j^μ 和 $\Theta^{\mu\nu}$, 可以得到 (除第 3 节外, 选取 Minkowski 时空度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$):

$$j^\mu = nu^\mu + j_{(1)}^\mu, \quad (5)$$

$$\Theta^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} + \Theta_{(1)}^{\mu\nu}, \quad (6)$$

其中 n, ε 和 P 分别是粒子数密度、能量密度和压强, 对应于梯度展开中的领头阶 (即 $O(1)$ 阶). 下标 (1) 代表梯度展开中 $O(\partial)$ 阶, $j_{(1)}^\mu$ 和 $\Theta_{(1)}^{\mu\nu}$ 与速度 u^μ 垂直. $\Theta_{(1)}^{\mu\nu}$ 还能进一步地分解为

$$\Theta_{(1)}^{\mu\nu} = 2h^{(\mu}u^{\nu)} + \pi^{\mu\nu} + 2q^{[\mu}u^{\nu]} + \phi^{\mu\nu}, \quad (7)$$

其中 (ab) 表示对指标 a, b 做对称化. 新引入的量满足以下恒等式:

$$h^\mu u_\mu = q^\mu u_\mu = \pi^{\mu\nu} u_\nu = \phi^{\mu\nu} u_\nu = \pi^{[\mu\nu]} = \phi^{(\mu\nu)} = 0. \quad (8)$$

可以看到, $\Theta_{(1)}^{\mu\nu}$ 的对称部分包含热流矢量 h^μ 和黏滞张量 $\pi^{\mu\nu}$, 在不包含自旋的普通相对论流体中也有这两项. 而 $\Theta_{(1)}^{\mu\nu}$ 的反对称部分是正则形式的相对论自旋流体所特有的, 引入它们可以方便地描述系统中的自旋和轨道角动量相互转化过程, 即 (4) 式. 其次, 对于自旋流 $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$, 可以模仿 (5) 式, 做如下分解:

$$\Sigma^{\alpha\mu\nu} = u^\alpha S^{\mu\nu} + \Sigma_{(1)}^{\alpha\mu\nu}, \quad (9)$$

其中, $S^{\mu\nu} = u_\alpha \Sigma^{\alpha\mu\nu} \sim O(1)$, 表示定域的自旋密度, 而 $\Sigma_{(1)}^{\alpha\mu\nu} \sim O(\partial)$ 属于高阶修正. 需要注意的是, 因为 $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$ 关于后两个指标反对称, 所以 $S^{\mu\nu}$ 是一个反对称张量, 共有 6 个自由度.

为了描述轨道-自旋的耦合对系统能量的修正, 需将热力学关系进行扩展. 类比粒子数 n 和粒子化学势 μ 的关系, 可引入与自旋密度 $S^{\mu\nu}$ 相应的自旋化学势 $\omega_{\mu\nu} \sim O(\partial)$, 并且将热力学关系修改为 [23,24]

$$\varepsilon + P = Ts + \mu n + \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \quad (10)$$

$$d\varepsilon = Tds + \mu dn + \omega_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}, \quad (11)$$

$$dP = sdT + nd\mu + S^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu}, \quad (12)$$

其中 T 和 s 分别是定域温度和熵密度.

类比普通相对论流体中的熵流密度^[25], 可以得到正则形式的含有自旋修正的熵流密度^[24]:

$$S_{\text{can}}^{\mu} = \frac{u_{\nu}}{T} \Theta^{\mu\nu} + \frac{P}{T} u^{\mu} - \frac{\mu}{T} j^{\mu} - \frac{1}{T} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma} u^{\mu} + O(\partial^2) \\ = s u^{\mu} + \frac{u_{\nu}}{T} \Theta_{(1)}^{\mu\nu} - \frac{\mu}{T} j_{(1)}^{\mu} + O(\partial^2), \quad (13)$$

式中第一项 $s u^{\mu}$ 是系统达到平衡时的熵流密度, 其余项是系统处于近平衡态时的修正. 需要注意的是, 近平衡时的熵流是不唯一的. 这是因为在 (13) 式中任加一项散度为零的项都不会改变熵产生率 $\partial_{\mu} S_{\text{can}}^{\mu}$ 的正定性, 从而也不违背热力学第二定律.

下面利用热力学第二定律来求出关于 h^{μ} , $\pi^{\mu\nu}$, q^{μ} , $\phi^{\mu\nu}$ 的本构方程. 根据熵流的表达式 (13), 可以计算出熵产生率为

$$\partial_{\mu} S_{\text{can}}^{\mu} = \left(h^{\mu} - \frac{\varepsilon + P}{n} j_{(1)}^{\mu} \right) \left(\partial_{\mu} \frac{1}{T} + \frac{1}{T} D u_{\mu} \right) \\ + \frac{1}{T} \pi^{\mu\nu} \partial_{\mu} u_{\nu} + q^{\mu} \left(\partial_{\mu} \frac{1}{T} - \frac{1}{T} D u_{\mu} \right) \\ + \frac{4}{T} \omega_{\mu\nu} u^{\nu} \Big) + \frac{1}{T} \phi^{\mu\nu} (\partial_{\mu} u_{\nu} + 2 \omega_{\mu\nu}) \quad (14)$$

在推导 (14) 式的过程中, 需要用到 (2) 式中的守恒方程. 热力学第二定律要求 $\partial_{\mu} S_{\text{can}}^{\mu} \geq 0$, (14) 式的右边必须凑成半正定的二次型. 由此得到:

$$h^{\mu} - \frac{\varepsilon + P}{n} j_{(1)}^{\mu} = \kappa [T^{-1} \Delta^{\mu\nu} \partial_{\nu} T - (u \cdot \partial) u^{\mu}], \quad (15)$$

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta \partial^{(\mu} u^{\nu)} + \zeta \Delta^{\mu\nu} (\partial \cdot u), \quad (16)$$

$$q^{\mu} = \lambda [T^{-1} \Delta^{\mu\nu} \partial_{\nu} T + (u \cdot \partial) u^{\mu} - 4\omega^{\mu\nu} u_{\nu}], \quad (17)$$

$$\phi^{\mu\nu} = -\gamma (\Omega^{\mu\nu} - 2T^{-1} \Delta^{\mu\alpha} \Delta^{\nu\beta} \omega_{\alpha\beta}), \quad (18)$$

其中 $\langle \mu\nu \rangle$ 表示对指标 μ, ν 取无迹对称化, $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^{\mu} u^{\nu}$,

$$\Omega^{\mu\nu} = -\Delta^{\mu\rho} \Delta^{\nu\sigma} \partial_{[\rho} (\beta u_{\sigma]}) \quad (19)$$

被称作热涡度张量^[26]. (15)–(18) 式新引入的输运系数 $\kappa, \eta, \zeta, \lambda, \gamma$ 都是非负数. κ, η, ζ 分别代表通常所说的热导率、剪切黏滞系数、体积黏滞系数, 而 λ, γ 是自旋流体中特有的, 它们和自旋与轨道角动量的相互转化有关. 不难发现, (15) 式和 (16) 式不含与自旋有关的项, 它们与普通流体中的相应表达式相同. 而 (17) 式和 (18) 式则显含自旋化学势 $\omega_{\mu\nu}$, 这两式表明, 流体中的转动、温度梯度以及自旋化学势共同作用导致系统自旋的变化.

将 (15)–(18) 式代入 (2) 式, 就得到具有耗散

效应的自旋流体力学方程. 在上面的讨论中, 可以发现在 $\partial_{\mu} S_{\text{can}}^{\mu}$ 中 $\Sigma_{(1)}^{\alpha\mu\nu}$ 仅出现在 $O(\partial^3)$ 阶. 这导致无法在目前截断下得到 $\Sigma_{(1)}^{\alpha\mu\nu}$ 表达式.

2.2 Belinfante 形式相对论自旋流体

上一节中假设了能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 具有非零的反对称分量, 并将 $J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu}$ 按 (3) 式分解出非零自旋流 $\Sigma^{\alpha\mu\nu}$. 但是这种假设并不对所有可能的能动量张量和总角动量流都成立. 下面对 $\Theta^{\mu\nu}$ 和 $J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu}$ 做赝规范变换.

首先, 通过如下变换引入 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} K^{\lambda\mu\nu}, \quad (20)$$

$$K^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Sigma^{\lambda\mu\nu} - \Sigma^{\mu\lambda\nu} - \Sigma^{\nu\mu\lambda}). \quad (21)$$

注意到 $\Sigma^{\lambda\mu\nu}$ 关于后两个指标反对称, 所以 $K^{\lambda\mu\nu}$ 是全反对称张量. 由此不难验证, $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 的反对称部分严格为零, 而且 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 本身满足守恒方程

$$\partial_{\mu} \mathcal{T}^{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (22)$$

因此, $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 也是守恒量. 区别于正则形式下的能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}$, 我们将 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 称为 Belinfante 形式的能动量张量. 可以类似地引入

$$\mathcal{J}^{\alpha\mu\nu} \equiv J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu} + \partial_{\rho} (x^{\mu} K^{\rho\alpha\nu} - x^{\nu} K^{\rho\alpha\mu}), \quad (23)$$

其也满足守恒方程

$$\partial_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha\mu\nu} = \partial_{\alpha} J_{\text{can}}^{\alpha\mu\nu} = 0. \quad (24)$$

我们将其称为 Belinfante 形式的总角动量流. 进一步地, 利用 (20) 式可以把 (23) 式写成

$$\mathcal{J}^{\alpha\mu\nu} = x^{\mu} \mathcal{T}^{\alpha\nu} - x^{\nu} \mathcal{T}^{\alpha\mu}. \quad (25)$$

我们发现 Belinfante 形式的能动量张量 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 反对称部分严格为零, Belinfante 形式的总角动量流 $\mathcal{J}^{\alpha\mu\nu}$ 的分解 (25) 式中不显含自旋部分. 所以 2.1 节中采用的正则分解对 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 和 $\mathcal{J}^{\alpha\mu\nu}$ 不再成立, 但是这并不意味着在 Belinfante 形式下无法看到自旋的修正.

接下来讨论 Belinfante 形式的相对论自旋流体. 直接从 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 和 $\Theta^{\mu\nu}$ 的关系式 (20) 出发得到

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\lambda} (u^{\lambda} S^{\mu\nu} - u^{\mu} S^{\lambda\nu} + u^{\nu} S^{\mu\lambda}) + O(\partial^2) \\ = \Theta^{(\mu\nu)} + \frac{1}{2} \partial_{\lambda} (u^{\mu} S^{\nu\lambda} + u^{\nu} S^{\mu\lambda}) + O(\partial^2), \quad (26)$$

其中 $\Theta^{(\mu\nu)}$ 与 2.1 节中的 (7) 式相同. (26) 式中与自旋相关的项还可以进一步分解成以下形式:

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\mu S^{\nu\lambda} + u^\nu S^{\mu\lambda}) = \delta\varepsilon u^\mu u^\nu + 2\delta h^{(\mu} u^{\nu)} + \delta\pi^{\mu\nu}, \quad (27)$$

其中 $\delta\varepsilon, \delta h^\mu, \delta\pi^{\mu\nu}$ 的具体表达式为

$$\delta\varepsilon = u_\rho \partial_\sigma S^{\rho\sigma}, \quad (28)$$

$$\delta h^\mu = \frac{1}{2}[\Delta_\sigma^\mu \partial_\lambda S^{\sigma\lambda} + u_\rho S^{\rho\lambda} \partial_\lambda u^\mu], \quad (29)$$

$$\delta\pi^{\mu\nu} = \partial_\lambda(u^{(\mu} S^{\nu)\lambda}) + \delta\Pi \Delta^{\mu\nu}, \quad (30)$$

$$\delta\Pi = \frac{1}{3}\partial_\lambda(u^\sigma S^{\rho\lambda})\Delta_{\rho\sigma}. \quad (31)$$

(31) 式的 $\delta\Pi$ 是体黏滞修正. 根据 (26) 式, 可以将 $\delta\varepsilon, \delta h^\mu, \delta\pi^{\mu\nu}$ 看作是自旋对能量密度 ε 、热流矢量 h^μ 、黏滞张量 $\pi^{\mu\nu}$ 的修正. 因此, 我们发现 Belinfante 形式的 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 的反对称部分为零, 这并不表示 Belinfante 形式下没有自旋, 自旋的存在会影响 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 的对称部分, 最终表现为对能量密度、热流矢量和黏滞张量的修正 ((28)–(31) 式).

现在, 对 Belinfante 形式的自旋流体进行熵流分析, 可以看到源于正则能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}$ 的反对称部分 q^μ 和 $\phi^{\mu\nu}$ 也会出现在 Belinfante 形式的自旋流体中. 类似正则形式的熵流 (13) 式, 这里假设 Belinfante 形式的熵流为

$$\begin{aligned} S^\mu &= \frac{u_\nu}{T} \mathcal{T}^{\mu\nu} + \frac{P}{T} u^\mu - \frac{\mu}{T} j^\mu - \frac{1}{T} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma} u^\mu + O(\partial^2) \\ &= s u^\mu + \frac{u_\nu}{T} \mathcal{T}_{(1)}^{\mu\nu} - \frac{\mu}{T} j_{(1)}^\mu + O(\partial^2), \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\mathcal{T}_{(1)}^{\mu\nu}$ 的定义是

$$\mathcal{T}_{(1)}^{\mu\nu} \equiv 2h^{(\mu} u^{\nu)} + \pi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\mu S^{\nu\lambda} + u^\nu S^{\mu\lambda}). \quad (33)$$

据此可以求出相应的熵产生率:

$$\begin{aligned} \partial_\mu S^\mu &= \left(h^\mu - \frac{\varepsilon + P}{n} j_{(1)}^\mu\right) \left(\partial_\mu \frac{1}{T} + \frac{1}{T} D u_\mu\right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu + \Delta + O(\partial^2), \end{aligned} \quad (34)$$

其中 Δ 的表达式为

$$\Delta \equiv \frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\mu S^{\nu\lambda} + u^\nu S^{\mu\lambda})\partial_\mu \left(\frac{u_\nu}{T}\right) - \frac{\omega_{\rho\sigma}}{T}\partial_\lambda(u^\lambda S^{\rho\sigma}). \quad (35)$$

注意到, 精确到 $O(\partial^2)$ 阶时, $\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} = 0$ 可以写成

$$\partial_\mu \partial_\lambda(u^\lambda S^{\mu\nu} + u^\mu S^{\nu\lambda} + u^\nu S^{\mu\lambda}) = 0. \quad (36)$$

将 (36) 式代入 (35) 式, Δ 可以改写为

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}\partial_\mu \left[\partial_\lambda(u^\lambda S^{\mu\nu} + u^\mu S^{\nu\lambda} + u^\nu S^{\mu\lambda})\frac{u_\nu}{T}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\lambda S^{\rho\sigma}) \left[\partial_\rho \left(\frac{u_\sigma}{T}\right) + 2\frac{\omega_{\rho\sigma}}{T}\right]. \end{aligned} \quad (37)$$

为了保证热力学第二定律, 将 (37) 式中的全导数项吸收到熵流的定义中去, 也就是重新定义 Belinfante 形式的熵流 S'^μ :

$$S'^\mu \equiv S^\mu - \frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\lambda S^{\mu\nu} + u^\mu S^{\nu\lambda} + u^\nu S^{\mu\lambda})\frac{u_\nu}{T}. \quad (38)$$

如果再将 $-\frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\lambda S^{\rho\sigma})$ 分解成

$$-\frac{1}{2}\partial_\lambda(u^\lambda S^{\rho\sigma}) = 2q^{[\mu} u^{\nu]} + \phi^{\mu\nu}, \quad (39)$$

并代入到 (37) 式中, 不难发现 $\partial_\mu S'^\mu$ 与正则形式 (14) 式中的 $\partial_\mu S_{\text{can}}^\mu$ 完全一样. 因此通过 $\partial_\mu S'^\mu \geq 0$, 也可以得到 (15)–(18) 式中的本构方程.

最后, 对上面的熵流分析做几点说明. 首先, (37) 式中出现的全导数项类似文献 [27, 28] 中的 V^μ . 其中, 由 V^μ 引起的改变源于流体有效场论方法中的动力学 Kubo-Martin-Schwinger (KMS) 条件. 其次, (38) 式中的变换类似于文献 [29] 中对反常流体的处理. 在文献 [29] 中为了使得熵产生率非负, 与涡度有关的项被人为引入熵流表达式中. 最后, 我们强调, 由赝规范变换联系的不同的能动量张量会导出不同的熵流, 如 S_{can}^μ 和 S^μ , 它们在平衡态时是等价的, 而在非平衡态时, 由于耗散项的出现, 它们不再等价 [30–32].

下面讨论 Belinfante 形式下自旋对各个物理量修正的含义. 根据相对论流体力学的一般理论, 非平衡态时的流体元速度 u^μ 不是唯一确定的, 选择特定的 u^μ 对应于选择特定的流速系. 可以证明在各种可能的流速系中能量密度 ε 和黏滞张量 $\pi^{\mu\nu}$ 都不为零 [25,33], 从而在所有的流速系中都可以将 (28) 式和 (30) 式中的 $\delta\varepsilon$ 和 $\delta\pi^{\mu\nu}$ 理解为对能量密度和黏滞张量的自旋修正. 但是, 热流 h^μ 在常用的 Landau 系中严格为零, 此时 δh^μ 不能再解释成热流修正. 下面讨论 Landau 系中 δh^μ 的物理意义.

首先简要证明 Landau 系中热流为零. 为了便于区分, 下面将用“L”来标记在该系中定义的物理量. 在 Landau 系中, 精确到 $O(\partial)$ 阶, 速度 u_L^μ 满足 [25,33]

$$\Delta_{\rho\mu}^L \mathcal{T}^{\mu\nu} u_{L,\nu} = 0. \quad (40)$$

Landau 系速度 u_L^μ 与一般系中的速度 u^μ 的关系为

$$u_L^\mu = u^\mu + \frac{1}{\varepsilon + P}(h^\mu + \delta h^\mu). \quad (41)$$

再将 (40) 和 (41) 式代入 (26) 式, 发现 Landau 系中的 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 可以写成如下形式:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = (\varepsilon + \delta\varepsilon)u_L^\mu u_L^\nu - (P + \delta\Pi)\Delta_L^{\mu\nu} + \pi_L^{\mu\nu} + \delta\pi_L^{\mu\nu} + O(\partial^2). \quad (42)$$

从中可以看出 Landau 系中 $T^{\mu\nu}$ 的表达式里确实不出现热流项 h_L^μ , 等价于 $h_L^\mu = 0$. 其次, 我们发现 Landau 系中缺失的热流项其实是被吸收到了 $j_{L(1)}^\mu$ 的表达式中:

$$j_{L(1)}^\mu = \left(j_{(1)}^\mu - \frac{n}{\varepsilon + P} h^\mu \right) + \delta j_{(1)}^\mu, \quad (43)$$

$$\delta j_{(1)}^\mu = -\frac{n}{\varepsilon + P} \delta h^\mu. \quad (44)$$

(43) 式中的第一项 $\left(j_{(1)}^\mu - \frac{n}{\varepsilon + P} h^\mu \right)$ 不随流速系的改变而改变^[25]. 这可以通过流体运动方程和热力学关系来证明. (43) 式中的第二项 $\delta j_{(1)}^\mu$ 是与 δh^μ 有关的自旋修正项. 为了阐明其物理意义, 先把 $S^{\mu\nu}$ 分解如下:

$$S^{\mu\nu} = 2\mathbf{s}^{[\mu} u^{\nu]} - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\rho S_\sigma, \quad (45)$$

其中 $u_\mu \mathbf{s}^\mu = u_\mu S^\mu = 0$. 然后再取非相对论极限, 即 $u^\mu = (1, \mathbf{v})$ 且 $\mathbf{v} \rightarrow 0$. 保留到速度 $\mathbf{v}$ 的一阶项, $\delta j_{(1)}^\mu$ 的空间分量可以写成如下形式:

$$\delta j_{(1)} = -\frac{n}{2(\varepsilon + P)} [\nabla \times \mathbf{S} + \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{S} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{s} - 2(\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \dot{\mathbf{s}}]. \quad (46)$$

从中可以看出, 在 Landau 系中自旋会诱导出一项与自旋涡旋 $\nabla \times \mathbf{S}$ 有关的流, 这和量子自旋涡度理论^[34]得出的结论一致.

本节回顾了正则和 Belinfante 形式的相对论自旋流体力学. 这两种形式的能动量张量和总角动量流由赝规范变换相联系. 正则形式的能动量张量含有反对称项, Belinfante 形式的能动量张量是对称的. 通过计算, 我们发现两种形式下的运动方程是等价的, 但是相应的熵产生率会相差一个全导数项. 此外, 还发现在 Belinfante 形式的能量密度 ε 、热流矢量 h^μ 、黏滞张量 $\pi^{\mu\nu}$ 都有相应的自旋修正项 $\delta\varepsilon, \delta h^\mu, \delta\pi^{\mu\nu}$. 需要注意的是, 在 Landau 系中 h^μ 为零, 自旋修正项 δh^μ 不再是对热流的修正, 而是对粒子流的修正, 它诱导出了正比于自旋涡度的一阶流 $\delta j_{(1)} \propto \nabla \times \mathbf{S}$. 上述结果在重离子物理唯象学方面的应用还需要进一步的研究.

3 采用有效场论推导相对论自旋流体力学

作为一种低能有效理论, 流体力学方程是可以通过一般的有效场论方法得到的. 关于这种推导流

体力学的方法的一般性论述可以在文献^[33, 35]中找到. 在这一框架中, 能动量张量 $T^{\mu\nu}$ 是作为度规场 $g_{\mu\nu}$ 的源引入的, 而守恒流 J^μ 是作为规范场 A_μ 的源引入的. 不难想象, 自旋流体力学也可以通过这种方法得到, 正如下面将要论述的. 但这时要注意的是, 自旋流张量是自旋联络 ω_μ^{ab} (时空挠率密切相关) 的源, 从而必须考虑具有挠率的时空背景, 即 Einstein-Cartan 几何. 由于挠率的存在, 一般情况下仿射联络不是 Levi-Civita 联络, 而是具有一个反对称部分, 从而使得能动量张量不适合于作为度规场 $g_{\mu\nu}$ 的源, 而是作为标架场 e_μ^a 的源引入的 (这里为了区分, 用 Θ_a^μ 来表示能动量张量)^[36]:

$$\delta W[e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}] = \int d^4x e \left(\Theta_a^\mu \delta e_\mu^a - \frac{1}{2} \Sigma_{ab}^\mu \delta \omega_\mu^{ab} \right), \quad (47)$$

其中, $W[e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}]$ 为在背景场 e_μ^a, ω_μ^{ab} 中的有效作用量, e 为标架场的行列式. 由于涉及到弯曲时空的文献中大都采用具有正的号差的度规 (与其他节中的习惯相反), 这里延续这种习惯, 从而对于 Minkowski 度规 $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, 而用 $g_{\mu\nu}$ 表示一般完全时空的度规. 为了简便, 这里没有考虑可能的对应某种内部对称性的守恒流 j^μ . 原本对应于 $\Theta^{\mu\nu}$ 和总角动量 $J^{\mu\rho\sigma}$ 的守恒律这时变为关于 Θ_a^μ 和 Σ_{ab}^μ 的与一般坐标变换和定域 Lorentz 变换不变性关联的 Ward 恒等式. 下面来推导这些 Ward 恒等式. 考虑一个无穷小坐标变换和无穷小的定域 Lorentz 变换, 它们分别用参量 $\xi^\mu(x)$ 和 $\alpha^{ab}(x) = -\alpha^{ba}(x)$ 表征. 标架场和自旋联络中的坐标指标 μ 和定域 Lorentz 指标 a, b 等分别参与这两种变换, 从而

$$\delta e_\mu^a = \xi^\nu \partial_\nu e_\mu^a + e_\nu^a \partial_\mu \xi^\nu - \alpha_b^a e_\mu^b, \quad (48)$$

$$\delta \omega_\mu^a{}_b = \xi^\nu \partial_\nu \omega_\mu^a{}_b + \omega_\nu^a{}_b \partial_\mu \xi^\nu + \partial_\mu \alpha_b^a - \alpha_c^a \omega_\mu^c{}_b + \alpha_b^c \omega_\mu^a{}_c. \quad (49)$$

代入 (47) 式得到

$$\begin{aligned} \delta W = \int d^4x e \left\{ \frac{1}{2} \alpha^{ab} [\Theta_{ab} - \Theta_{ba} + (D_\mu - G_\mu) \Sigma_{ab}^\mu] \right. \\ \left. - \xi^a \left[(D_\mu - G_\mu) \Theta_a^\mu + \Theta_b^\mu T_{\mu a}^b - \frac{1}{2} \Sigma_b^c R_{c\mu a}^b \right] \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

其中 $T_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ 为时空挠率, $G_\mu = T_{\nu\mu}^\nu$, R_{bcd}^a 为 Riemann 曲率, D_μ 表示协变导数, 比如

$$D_\mu A_a^\nu = \partial_\mu A_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A_a^\rho - \omega_{\mu a}^b A_b^\nu. \quad (51)$$

因为变换 (48) 式和 (49) 式都是 W 的对称性, 所以 $\delta W = 0$ 对于任意的 x^μ 和 α^{ab} 都必须成立, 从而给出

$$(D_\mu - G_\mu)\Theta_a^\mu = -\Theta_b^\mu T_{\mu a}^b + \frac{1}{2}\Sigma_b^\mu R_{c\mu a}^b, \quad (52)$$

$$(D_\mu - G_\mu)\Sigma_{ab}^\mu = \Theta^{ba} - \Theta^{ab}. \quad (53)$$

这些就是要得到的 Ward 恒等式, 它们在平直时空中就回到了表示能-动量守恒和角动量守恒的守恒律方程 (2) 和 (4).

先考虑处于平衡态下的流体, 其结果对应着理想流体力学. 当我们说系统处于平衡态, 实际上是指存在一个类时的 Killing 矢量 V^μ , 使得对于任何的观测量有 $\mathcal{L}_V(\cdots) = 0$, 这里 $\mathcal{L}$ 表示李导数. 对于正则系综而言, 这种平衡态将由温度 T , 流体流速 u^μ , 自旋化学势 μ^{ab} 来表征^①. 它们与 V^μ 以及背景场有如下关系:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{-V^2}}, \quad u^\mu = \frac{V^\mu}{\sqrt{-V^2}}, \quad \mu^{ab} = \frac{V^\mu \omega_\mu^{ab} + \theta_V^{ab}}{\sqrt{-V^2}}, \quad (54)$$

其中 T_0 是一个具有温度量纲的常数, θ_V^{ab} 是一个定域 Lorentz 变换下的规范参量, 它的引入是为了使得 μ^{ab} 成为定域 Lorentz 变换下的张量, u^μ 将被认作流体的速度. 下面来确定平衡态条件, 在取规范 $\theta_V^{ab} = 0$ 时, 它们由 Killing 条件 $\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 0$ 和 $\mathcal{L}_V e_\mu^a = \mathcal{L}_V \omega_{ab}^\mu = 0$ 确定. 直接计算得到

$$0 = \mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2T_0\beta\left\{\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta\Delta_{\mu\nu} + \beta u_\mu u_\nu DT - \frac{1}{2}\left[u_\mu(\dot{u}_\nu + \beta\dot{\nabla}_\nu^\perp T) + u_\nu(\dot{u}_\mu + \beta\dot{\nabla}_\mu^\perp T)\right]\right\}, \quad (55)$$

$$0 = \mathcal{L}_V e_\mu^a = \frac{1}{2}e^{a\nu}\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} - T_0\beta\{e^{a\nu}[u_\mu(\dot{u}_\nu) - \beta\dot{\nabla}_\nu^\perp T] + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}u^\rho\omega^\sigma + u^\rho K_{\rho\mu}^a + \mu_\mu^a\}, \quad (56)$$

$$0 = \mathcal{L}_V \omega_\mu^{ab} = T_0\beta[u^\nu R_{\nu\mu}^{ab} + T\nabla_\mu(\beta\mu^{ab})], \quad (57)$$

这里, $\beta = 1/T$, $\dot{\nabla}_\mu$ 是对应 Christoffel 联络的协变导数, $T_{\rho\sigma}^\mu$ 是挠率张量, $K_{\rho\sigma}^\mu$ 是协挠率张量, 并且我们做了如下的张量分解:

$$\dot{\nabla}_\mu u_\nu = \sigma_{\mu\nu} + \frac{\theta}{3}\Delta_{\mu\nu} - u_\mu \dot{u}_\nu - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}u^\rho\omega^\sigma, \quad (58)$$

$$\mu^{ab} = u^a a^b - u^b a^a - \varepsilon^{abcd}u_c h_d. \quad (59)$$

其中 $\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{\nabla}_\mu^\perp u_\nu + \dot{\nabla}_\nu^\perp u_\mu) - \frac{\theta}{3}\Delta_{\mu\nu}$, $\theta = \Delta_{\mu\nu}\dot{\nabla}^\mu u^\nu$, $\dot{u}^\mu = Du^\mu \equiv u \cdot \dot{\nabla} u^\mu$, $\omega^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}u_\nu \dot{\nabla}_\rho u_\sigma$. 由此, 得到如下的平衡态条件:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{\mu\nu} = \theta = DT = D\mu^{ab}, \\ \dot{u}_\mu &= -\beta\partial_\mu^\perp T, \\ u^\nu(\partial_\mu\omega_\nu^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu^{ab}) &= T\partial_\mu^\perp(\beta\mu^{ab}), \\ u^\mu u_b K_\mu^{ab} &= a^a - e_\nu^a \dot{u}^\nu, \\ u^\mu \Delta_c^a \Delta_d^b K_\mu^{cd} &= \mu_\perp^{ab} - \varepsilon^{abcd}u_c \omega_d. \end{aligned} \quad (60)$$

可以看到, 流体处于平衡态下是可以具有加速度的, 但该加速度需要被温度的梯度平衡掉; 也可以具有转动或推动(boost), 只要 (60) 式中的最后两个方程得到满足即可. 另外, 这些平衡态条件也告诉我们在等式左右两边的量应当在梯度展开时作为同一阶对待, 这给选取不同的幂次计数规则(power counting rule)以很大的自由, 而不同的幂次计数规则的选取会得到不同的自旋流体力学本构关系. 作为例子, 选择如下的幂次计数规则:

$$T, u^\mu, e_\mu^a = O(1), \quad (61)$$

而将时空挠率作为梯度的一阶量, 其他量的幂次律依含有的导数幂次和方程 (60) 确定. 考虑到平衡态下流体是可以具有涡旋的, 用下面的有效作用量描述平衡态流体:

$$W[e_\mu^a, \omega_\mu^{ab}] = \int d^4x e P(T, h^2, K^2, h \cdot K), \quad (62)$$

其中 K^a 为一轴矢量, 它是通过如下关系定义的: $u^\mu \Delta_c^a \Delta_d^b K_\mu^{cd} = -\varepsilon^{abcd}u_c K_d$. 理想自旋流体力学本构关系可以由 (47) 式得到. 利用

$$\delta e = e e_\mu^a \delta e_\mu^a, \quad (63)$$

$$\delta T = T u^\mu u^\nu e_\nu^b \eta_{ab} \delta e_\mu^a = T u_a u^\mu \delta e_\mu^a, \quad (64)$$

$$\delta u^\rho = u^\rho u_a u^\mu \delta e_\mu^a, \quad (65)$$

$$\delta \mu^{cd} = \mu^{cd} u_a u^\mu \delta e_\mu^a + u^\mu \delta \omega_\mu^{cd}, \quad (66)$$

$$\delta K_\mu^{ab} = \delta \omega_\mu^{ab} - \frac{\delta \omega_\mu^{ab}}{\delta e_\lambda^c} \delta e_\lambda^c, \quad (67)$$

经过较为冗长的计算后得到

① 为了避免和自旋联络混淆, 在这一章中用 μ^{ab} 来表示自旋化学势, 它就是前一章中的 ω^{ab} .

$$\Theta_a^\mu = \frac{1}{e} \frac{\delta W}{\delta e_a^\mu} = \varepsilon u_a u^\mu + P \Delta_a^\mu - \frac{1}{2} \nabla_\lambda (S_a^{\lambda\mu} - S_a^{\lambda\mu} - S^{\mu\lambda}_a), \quad (68)$$

$$\Sigma_{ab}^\mu = -\frac{2}{e} \frac{\delta W}{\delta \omega_{ab}^\mu} = u^\mu S_{ab} + S_{ab}^\mu, \quad (69)$$

其中

$$S_{ab}^\mu = -2 \frac{\partial P}{\partial K^2} \varepsilon_{abcd} u^\mu K^c u^d - \frac{\partial P}{\partial K \cdot h} \varepsilon_{abcd} u^\mu h^c u^d = u^\mu \varepsilon_{abcd} u^c \frac{\partial P}{\partial K_d}, \quad (70)$$

$$\varepsilon = T \frac{\partial P}{\partial T} + 2h^2 \frac{\partial P}{\partial h^2} + 2K^2 \frac{\partial P}{\partial K^2} + 2K \cdot h \frac{\partial P}{\partial K \cdot h} - P = T \frac{\partial P}{\partial T} + h^\mu \frac{\partial P}{\partial h^\mu} + K^\mu \frac{\partial P}{\partial K^\mu} - P, \quad (71)$$

$$S_{ab} = \varepsilon_{abcd} u^c \left(2 \frac{\partial P}{\partial h^2} h^d + \frac{\partial P}{\partial K \cdot h} K^d \right) = \varepsilon_{abcd} u^c \frac{\partial P}{\partial h_d}. \quad (72)$$

现在可以取平直时空极限, 上面公式的物理意义就更清楚一些:

$$\Theta^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu + P \Delta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\lambda (S^{\lambda\mu\nu} - S^{\lambda\mu\nu} - S^{\nu\lambda\mu}), \quad (73)$$

$$\Sigma^{\mu\rho\sigma} = u^\mu S^{\rho\sigma} + S^{\mu\rho\sigma}, \quad (74)$$

$$\varepsilon = T \frac{\partial P}{\partial T} + h^\mu \frac{\partial P}{\partial h^\mu} - P. \quad (75)$$

另外, $S^{\lambda\mu\nu}$ 和 $S^{\mu\nu}$ 仍然由 (70) 式和 (72) 式给出. 可以看到, $S^{\lambda\mu\nu}$ 恰好扮演了赝规范的角色, 同时 (75) 式正是 Gibbs-Duhem 关系, 这说明 P 就是压强. 这样就得到了理想自旋流体力学的本构关系, 为了得到耗散效应对应的本构关系, 采用有效场论的方法也是可以做到的, 只是稍显复杂一些 [37,38]. 一个技术上简单一些的处理方法是采用熵流和定域热力学定律的办法, 正如第 2 节中处理的那样, 在此不再赘述.

4 通过量子输运理论来研究相对论自旋流体力学

回顾利用量子输运方程来推导相对论自旋流体力学 [39]. 经典统计物理中, 利用粒子的分布函数 $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ 来表示的是在时空点 $(t, \mathbf{x})$ 找到一个动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子的概率. 在量子场论的框架下, 引入协

变 Wigner 函数来表示粒子的有效分布 [40,41]:

$$W(x, p) \equiv \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \left\langle : \bar{\psi} \left(x + \frac{y}{2} \right) \otimes U \left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2} \right) \psi \left(x - \frac{y}{2} \right) : \right\rangle, \quad (76)$$

其中 $\langle : \rangle$ 表示取系综平均和正规乘积, $\otimes$ 表示两个矩阵的张量积, $U(x, y)$ 代表从 x 到 y 的规范链. 为了方便计算, 考虑无相互作用无背景场的费米子系统. 此时, 可以忽略 (76) 式中的规范链 $U(x, y)$ [40,42]. 通过 Dirac 方程, 可以推导出 Wigner 函数满足的动力学方程 [41,42]:

$$\left[\gamma_\mu \left(p^\mu + \frac{i}{2} \partial^\mu \right) - m \right] W(x, p) = 0. \quad (77)$$

我们一般通过梯度展开的方法求解 Wigner 函数. 在相对论流体力学中, 一般按照 Knudsen 数 $Kn = l/L \ll 1$ 来展开, 其中 l 与微观平均自由程相关, 而 L 可以被描述为宏观量的梯度 $1/L \sim |\partial_\mu O/O|$. 可以看出, 梯度展开等价于 Knudsen 数展开.

当系统包含自旋自由度时, 额外引入了一个参数 χ_s 去描述自旋极化. 该参数也可以从每粒子的平均自旋极化或平均磁偶极矩获得:

$$\chi_s \sim \frac{|\Sigma^{\lambda\mu\nu}|}{n}. \quad (78)$$

如果自旋效应是由热涡度引起的, 可以假设 $\chi_s \sim Kn$, 因此自旋效应可认为是在 $O(Kn)$ 上出现. 为了方便计算, 在接下来的讨论中考虑一个弱极化系统 $\chi_s \lesssim Kn$. 对于物理观测量保留了零阶项 $O(1)$, 一阶项 $O(Kn)$ 和 $O(\chi_s)$, 二阶项 $O(Kn^2)$ 、 $O(Kn\chi_s)$ 和 $O(\chi_s^2)$.

方程 (77) 的解可以写成

$$W = W_0 + \delta W, \quad (79)$$

其中, W_0 是梯度展开的领头阶, δW 是高阶修正. 在梯度展开的领头阶, 可以得到:

$$W_0(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \times \sum_{rs} \{ \theta(p^0) [\bar{u}_s(p) \otimes u_r(p)] f_{rs}^+(x, \mathbf{p}) - \theta(-p^0) [\bar{v}_s(-p) \otimes v_r(-p)] f_{rs}^-(x, -\mathbf{p}) \}, \quad (80)$$

其中, 矩阵分布 $f_{rs}^+(x, \mathbf{p})$ 由粒子和反粒子的产生和湮灭算符的系综平均构造 [43,44]. $\text{Tr} f^\pm(x, \mathbf{p})$ 为粒子或反粒子相空间的粒子数密度. $\text{Tr} \sigma^i f^+(x, \mathbf{p})$ 给出

了定域静止参考系的 i 方向的极化密度. 同时, $f^\pm$ 在领头阶满足类似玻尔兹曼方程:

$$\bar{p} \cdot \partial f_{ss'}^\pm(x, \mathbf{p}) = 0, \quad (81)$$

其中 $\bar{p}^\mu \equiv (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ 是在壳的粒子动量, 即 $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. 方程 (77) 和 (81) 中没有包含文献 [45–49] 中导出的碰撞项. 通过求解动力学方程 (77) 得到 Wigner 函数在 $O(\partial^2)$ 阶的形式解为

$$\begin{aligned} \delta W(x, p) = & \frac{i}{4m} [\gamma^\mu, \partial_\mu W_0(x, p)] \\ & + \frac{1}{16m^2} (\gamma \cdot \partial) W_0(x, p) (\gamma \cdot \overleftarrow{\partial}) \\ & + \frac{\gamma \cdot p + m}{8m(p^2 - m^2)} \partial^2 W_0(x, p). \end{aligned} \quad (82)$$

$O(\partial)$ 阶的结果与文献 [50–54] 的结果一致. 上述 Wigner 函数的解包含来自非定域关联的修正, 这些修正来自于由不均匀电荷分布引起的电偶极矩、磁化电流和非质壳关系的修正. 非质壳关系的修正也可由 Wigner 函数的质壳方程 $(p^2 - m^2 - \partial^2/4)W(x, p) = 0$ 得到 [41,42].

在热力学平衡下, 假设 $f_{rs}^\pm(x, \mathbf{p})$ 具有文献 [55] 中的形式:

$$\begin{aligned} & f_{\text{eq},rs}^+(x, \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2m} \bar{u}_r(\mathbf{p}) \left(e^{\beta \cdot \bar{p} - \xi - \frac{1}{4}\beta \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} + 1 \right)^{-1} u_s(\mathbf{p}), \\ & f_{\text{eq},rs}^-(x, \mathbf{p}) \\ &= -\frac{1}{2m} \bar{v}_r(\mathbf{p}) \left(e^{\beta \cdot \bar{p} + \xi + \frac{1}{4}\beta \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} + 1 \right)^{-1} v_s(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (83)$$

其中 $u_s(\mathbf{p}), v_s(\mathbf{p})$ 是粒子的波函数,

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \beta = 1/T, \quad \beta^\mu = \beta u^\mu, \quad \xi = \beta \mu, \quad (84)$$

γ^μ 是 gamma 矩阵. 这里假设在定域热平衡的情况下, 分布函数 $f_{rs}^\pm(x, \mathbf{p})$ 具有与全局热平衡相同的表达形式, 但公式中的参数 $\beta^\mu(x)$, $\xi(x)$ 和 $\omega^{\mu\nu}(x)$ 都是与时空相关的量.

为了方便讨论, 假设自旋弛豫时间远小于系统热化时间, 即假设系统总是处于定域热平衡态. 这与理想流体力学情况类似, 但是方程 (83) 的热平衡分布包含了由自旋化学势 $\omega^{\mu\nu}$ 描述的自旋极化. 在弱极化 $\chi_s \lesssim Kn \ll 1$ 情况下, 可以对热力学量按照 Kn, χ_s 展开:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \dots, \\ \beta^\mu &= \beta^{(0)\mu} + \beta^{(1)\mu} + \dots, \\ \omega^{\mu\nu} &= \omega^{(1)\mu\nu} + \omega^{(2)\mu\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (85)$$

其中上指标 (0), (1), $\dots$ 表示 Kn 和 χ_s 的阶数. 我们发现 χ_s 的幂次是由热平衡中的 $\omega^{\mu\nu}$ 决定的, 因此自旋化学势 $\omega^{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(\chi_s)$ 至少是一阶的, 其时空导数 $\partial^\alpha \omega^{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(Kn \chi_s)$ 至少是二阶的. 我们也对方程 (83) 进行展开:

$$\begin{aligned} f_{\text{eq},rs}^+(x, \mathbf{p}) &= \exp(-\beta \cdot \bar{p} + \xi) \\ &\times \left[\left(1 + \frac{1}{16} \beta^2 \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right) \delta_{rs} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8m} \beta \omega^{\mu\nu} \bar{u}_r(\mathbf{p}) \sigma_{\mu\nu} u_s(\mathbf{p}) \right], \\ f_{\text{eq},rs}^-(x, \mathbf{p}) &= \exp(-\beta \cdot \bar{p} - \xi) \\ &\times \left[\left(1 + \frac{1}{16} \beta^2 \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right) \delta_{rs} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8m} \beta \omega^{\mu\nu} \bar{v}_r(\mathbf{p}) \sigma_{\mu\nu} v_s(\mathbf{p}) \right]. \end{aligned} \quad (86)$$

定域热平衡的 Wigner 函数可以通过将方程 (86) 代入领头阶解 (80) 式和修正项 (82) 式获得.

下面利用 Wigner 函数的解来推导出宏观的自旋流体. Wigner 函数可以通过分解成如下线性独立的项 [42]:

$$W = \frac{1}{4} \left(\mathcal{F} + i\gamma^5 \mathcal{P} + \gamma^\mu \mathcal{V}_\mu + \gamma^5 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \mathcal{S}_{\mu\nu} \right), \quad (87)$$

展开系数 $\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{V}_\mu, \mathcal{A}_\mu, \mathcal{S}_{\mu\nu}$ 分别为 Wigner 函数的标量、赝标量、矢量、轴矢量和张量分量, 它们都是实数. 守恒流密度 $j^\mu(x)$ 、能动量张量 $\Theta^{\mu\nu}(x)$ 和自旋张量密度 $\Sigma^{\lambda\mu\nu}(x)$ 可以通过矢量 $\mathcal{V}_\mu$ 和轴矢量 $\mathcal{A}_\mu$ 获得:

$$j^\mu(x) = \int d^4p \mathcal{V}^\mu(x, p), \quad (88)$$

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = \int d^4p p^\nu \mathcal{V}^\mu(x, p), \quad (89)$$

$$\Sigma^{\lambda\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \int d^4p \mathcal{A}_\rho(x, p), \quad (90)$$

这里的 $\Theta^{\mu\nu}$ 和 $\Sigma^{\lambda,\mu\nu}$ 是正则形式的能动量张量和自旋张量.

通过方程 (88) 和 (89), 可以得到在定域热平衡下的 j_{eq}^μ 和 $\Theta_{\text{eq}}^{\mu\nu}(x)$:

$$\begin{aligned}
 j_{\text{eq}}^\mu(x) &= \left(1 + \frac{1}{16}\beta^2\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\right) K_1 u^\mu \sinh \xi - \frac{1}{16m^2}\partial^2 [(2\beta K_2 - 5K_1) u^\mu \sinh \xi] \\
 &\quad + \frac{1}{4m^2}\partial_\nu \left\{ \left[2\beta u^{[\mu}\omega^{\nu]}_\alpha u^\alpha (K_2 + \beta^{-1}K_1) + \beta\omega^{\mu\nu} (K_2 - \beta^{-1}K_1) \right] \sinh \xi \right\}, \\
 \Theta_{\text{eq}}^{\mu\nu}(x) &= \left(1 + \frac{1}{16}\beta^2\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\right) (u^\mu u^\nu K_2 - \Delta^{\mu\nu}\beta^{-1}K_1) \cosh \xi + \frac{1}{4m^2}\partial_\rho \left[(2\beta\omega_\alpha^{[\mu}I^{\rho]\nu\alpha} + \beta\omega^{\mu\rho}u^\nu m^2 K_1) \cosh \xi \right] \\
 &\quad + \frac{1}{16m^2}\partial^2 \{ [g^{\mu\nu} (2K_2 - 5\beta^{-1}K_1) - u^\mu u^\nu (K_2 + 2\beta m^2 K_1 + \beta^{-1}K_1)] \cosh \xi \}, \quad (91)
 \end{aligned}$$

其中 K_l 定义是:

$$K_l(\beta) \equiv \frac{8}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_p} E_p^l e^{-\beta \cdot p}, \quad (92)$$

且满足递推关系

$$K_l = \frac{l+1}{\beta} K_{l-1} + m^2 K_{l-2} - \frac{l-2}{\beta} m^2 K_{l-3}. \quad (93)$$

这允许我们可以选用任意两个不同的 K_i 和 K_j 表示 K_l . 下面选取 K_1 和 K_2 作为基本函数来表示 K_l . 方程 (91) 中三阶矩 $I^{\mu\nu\alpha}$ 按照定义可以推导出与 K_l 间的关系:

$$\begin{aligned}
 I^{\mu\nu\alpha} &= u^\mu u^\nu u^\alpha K_3 + \frac{1}{3}(\Delta^{\mu\nu}u^\alpha + \Delta^{\mu\alpha}u^\nu \\
 &\quad + \Delta^{\nu\alpha}u^\mu)(m^2 K_1 - K_3). \quad (94)
 \end{aligned}$$

可以发现, 方程 (91) 中的自旋依赖项至少是 $O(\partial^2)$ 阶. 在 Kn 和 χ_s 的领头阶, j_{eq}^μ 与 $\Theta_{\text{eq}}^{\mu\nu}$ 和理想流体力学的结果一致^[56]. 按照张量分解可得:

$$\begin{aligned}
 j_{\text{eq}}^\mu &= n_{\text{eq}} u^\mu + \delta j_{(1)}^\mu, \\
 \Theta_{\text{eq}}^{\mu\nu} &= \varepsilon_{\text{eq}} u^\mu u^\nu - P_{\text{eq}} \Delta^{\mu\nu} + \Theta_{(1)}^{\mu\nu}, \quad (95)
 \end{aligned}$$

其中 n_{eq} , ε_{eq} 和 P_{eq} 分别是定域热平衡态下粒子数密度、能量密度和压强,

$$n_{\text{eq}} = u_\mu J_{\text{eq}}^\mu, \quad \varepsilon_{\text{eq}} = u_\mu u_\nu \Theta_{\text{eq}}^{\mu\nu}, \quad P_{\text{eq}} = -\frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} \Theta_{\text{eq}}^{\mu\nu}. \quad (96)$$

我们发现,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\text{eq}} - 3P_{\text{eq}} &= \left(1 + \frac{1}{16}\beta^2\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\right) m^2 K_0 \cosh \xi \\
 &\quad + \frac{1}{16}\partial^2 [(7K_0 - 2\beta K_1) \cosh \xi]. \quad (97)
 \end{aligned}$$

(95) 式中的 $\delta j_{(1)}^\mu$, $\Theta_{(1)}^{\mu\nu}$ 描述了定域热平衡下偏离理想流体动力学的部分, 它们至少是 $O(\partial^2)$ 阶.

在定域热平衡下, 也可以得到自旋张量

$$\Sigma_{\text{eq}}^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4} \left(\beta u^\lambda \omega^{\mu\nu} + 2\beta u^{[\mu} \omega^{\nu]\lambda} \right) K_1 \cosh \xi, \quad (98)$$

其中 K_1 的定义由方程 (92) 给出. 自旋化学势 $\omega^{\mu\nu}$ 含有 6 个独立变量. 然而, $\Sigma_{\text{eq}}^{\lambda\mu\nu}$ 只含有 3 个独立变量.

为了研究 $\omega^{\mu\nu}$ 剩余的 3 个自由度, 引入偶极矩张量:

$$D^{\mu\nu}(x) = \int d^4p S^{\mu\nu}(x, p), \quad (99)$$

其中 $S^{\mu\nu}$ 是 Wigner 函数的张量分量. 偶极矩张量 $D^{\mu\nu}$ 相对于它的指标是反对称张量, 可以进行如下分解:

$$D^{\mu\nu} = \mathcal{E}^\mu u^\nu + \mathcal{E}^\nu u^\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \mathcal{M}_\beta, \quad (100)$$

$$\mathcal{E}^\mu = D^{\mu\nu} u_\nu, \quad \mathcal{M}^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu D_{\alpha\beta}, \quad (101)$$

分别为电偶极矩矢量和磁偶极矩矢量. 在定域热平衡下, 计算可得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\text{eq}}^\mu &= -\frac{1}{m\beta} (\beta\omega^{\mu\nu} u_\nu + \frac{1}{2}\beta u_\nu \partial^\nu u^\mu) K_1 \sinh \xi \\
 &\quad + \frac{1}{2m} \nabla^\mu (K_1 \sinh \xi), \\
 \mathcal{M}_{\text{eq}}^\mu &= -\frac{1}{4m} \beta \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu \omega_{\rho\sigma} (K_2 - \beta^{-1} K_1) \sinh \xi \\
 &\quad - \frac{1}{2m} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu (\partial_\alpha u_\beta) K_1 \sinh \xi. \quad (102)
 \end{aligned}$$

电偶极矩 $\mathcal{E}_{\text{eq}}^\mu$ 有三部分贡献, 分别来源于粒子的电偶极矩、流体的加速度和粒子不均匀分布引起的贡献. 磁偶极矩 $\mathcal{M}_{\text{eq}}^\mu$ 包含两部分, 第一项正比于 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu \omega_{\rho\sigma}$ 是自旋自由度的贡献, 另一部分起源于流体的旋转或与涡度 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu (\partial_\alpha u_\beta)$ 成正比的轨道角动量.

已知 $j^\mu(x)$ 和 $\Theta^{\mu\nu}(x)$ 分别守恒. 将方程 (91) 中的 $j^\mu(x)$ 和 $\Theta^{\mu\nu}(x)$ 的平衡表达式代入守恒定律 (5) 式, 可以推导出 β , ξ 和 u^μ 的运动方程:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\beta}{d\tau} &= \frac{K_2 + \beta^{-1} K_1 \cosh^2 \xi}{K_1 K_3 \cosh^2 \xi - K_2^2 \sinh^2 \xi} K_1 \theta, \\
 \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{(K_2 + \beta^{-1} K_1) K_2 - K_1 K_3}{K_1 K_3 \cosh^2 \xi - K_2^2 \sinh^2 \xi} \theta \sinh \xi \cosh \xi, \\
 \frac{du^\mu}{d\tau} &= \frac{K_1}{K_1 + \beta K_2} \tanh \xi \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \xi - \frac{1}{\beta} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu \beta, \quad (103)
 \end{aligned}$$

其中 $\theta = \partial \cdot u$. 利用方程 (96) 和 (97) 可以发现:

$$\begin{aligned} K_1 &\approx n_{\text{eq}} / \sinh \xi \approx \beta P_{\text{eq}} / \cosh \xi, \\ K_2 &\approx \varepsilon_{\text{eq}} / \cosh \xi, \\ K_3 &= \frac{3}{\beta} K_2 + \left(m^2 + \frac{3}{\beta^2} \right) K_1. \end{aligned} \quad (104)$$

因此, 方程 (103) 可以用平衡物理量 n_{eq} , P_{eq} 和 ε_{eq} 表示. 这时, 可以发现一个非零的 $\omega^{\mu\nu}$ 在 Kn 和 χ_s 的领头阶和次领头阶没有贡献. 这表明, 无自旋理想流体动力学高阶修正项至少是 $\mathcal{O}(Kn^2, Kn\chi_s, \chi_s^2)$ 阶.

总角动量守恒可以给出 $\omega^{\mu\nu}$ 的运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta\omega^{\mu\nu}}{d\tau} &= \Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta \frac{d\beta\omega^{\alpha\beta}}{d\tau} - u^\mu \frac{d\beta\omega^{\nu\alpha}}{d\tau} u_\alpha \\ &\quad + u^\nu \frac{d\beta\omega^{\mu\alpha}}{d\tau} u_\alpha, \end{aligned} \quad (105)$$

其中

$$\begin{aligned} &\beta^{-1} \Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta \frac{d\beta\omega^{\alpha\beta}}{d\tau} \\ &= C_3 \Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta \omega^{\alpha\beta} + C_4 \Delta^\mu_\beta \sigma_h^{\nu\rho} \omega_\rho^\beta \\ &\quad - \frac{1}{2} C_4 \left(\nabla^{[\mu} \omega^{\nu]}_\rho \right) u^\rho + C_2 C_4 \omega^{[\mu}_\rho u^{\rho} \nabla^{\nu]} \xi, \\ &\beta^{-1} \frac{d\beta\omega^{\mu\nu}}{d\tau} u_\nu \\ &= C_1 \omega^{\mu\nu} u_\nu + C_2 \Delta^\mu_\rho \omega^{\rho\nu} \nabla_\nu \xi \\ &\quad + \sigma_h^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} u^\rho + \frac{1}{2} \Delta^\mu_\rho \left(\nabla^\nu \omega^\rho_\nu \right), \end{aligned} \quad (106)$$

其中 $\sigma_h^{\mu\nu} \equiv (\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu)/2 - \Delta^{\mu\nu} \theta/3$. 输运系数 $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 具体形式如下:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{5}{3} \theta + \frac{5}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{\beta m^2 K_1}{K_1 + \beta K_2} \frac{d\beta}{d\tau} - \tanh \xi \frac{d\xi}{d\tau} \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5K_1}{K_1 + \beta K_2} - \frac{m^2 \beta^2 K_1^2}{(K_1 + \beta K_2)^2} \right) \tanh \xi \\ C_3 &= - \left[5 - \frac{2\beta^2 m^2 K_1}{2(K_1 + \beta K_2) + \beta^2 m^2 K_1} \right] \frac{\theta}{3} - \tanh \xi \frac{d\xi}{d\tau} \\ &\quad + \left[5 - \frac{m^2 \beta^2 (3K_1 - \beta K_2)}{2(K_1 + \beta K_2) + \beta^2 m^2 K_1} \right] \frac{d\beta}{\beta d\tau} \\ C_4 &= \frac{\beta^2 m^2 K_1}{2(K_1 + \beta K_2) + \beta^2 m^2 K_1} - 1. \end{aligned} \quad (107)$$

在梯度展开的框架下, $\omega^{\mu\nu} \sim \mathcal{O}(\chi_s)$, 因此方程 (105) 的两边是 $\mathcal{O}(Kn\chi_s)$ 阶. 方程 (105) 有一个平凡解 $\omega^{\mu\nu} = 0$, 这对应于无自旋的情况, 与参考文献 [57] 类似.

综上所述, 利用无相互作用情况下的量子动力学理论推导出了具有自旋自由度的理想流体动力学. 在梯度展开下, 得到了 Wigner 函数的二阶通解. 基于定域热平衡的 Wigner 函数, 推导了电流密度、能量动量张量、自旋张量和电、磁偶极矩. 另外还从守恒定律出发, 导出了热力学参数 β , ξ , u^μ 和 $\omega^{\mu\nu}$ 的运动方程.

5 Bjorken 型与 Gubser 型膨胀的耗散自旋流体解析解

在相对论重离子碰撞实验中, 产生的 QGP 在达到定域热平衡以后, 可以用相对论流体力学来描述系统的演化. 由于初始两个重离子在纵向速度接近光速, 这使得产生的 QGP 主要沿着纵向膨胀. 在这些特征下, 通常有两种简化的流体模型可以用来描述体系的演化, 分别是 Bjorken 型和 Gubser 型膨胀的流体. 下面将回顾在这两类膨胀情况下相对论自旋流体所满足的特殊形式解析解 [58,59].

为了求解相对论自旋流体特殊形式的解析解, 需要引入两个额外的状态方程. 首先选取近理想流体或高温极限下的状态方程:

$$\varepsilon = 3P. \quad (108)$$

根据统计物理, 类比粒子数密度与化学势之间的关系, 假设在高温近似下自旋密度 $S^{\mu\nu}$ 与自旋化学势 $\omega^{\mu\nu}$ 之间满足下列状态方程:

$$S^{\mu\nu} \approx a T^2 \omega^{\mu\nu}, \quad (109)$$

其中 a 为表征自旋磁化率的一个常数.

为了方便, 采用下标 0 代表物理量在初始 τ_0 时刻的取值, 如 $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(\tau = \tau_0)$.

5.1 Bjorken 型流体耗散自旋流体解析解

Bjorken 型流体中, 人们假设系统具有纵向膨胀不变性, 即假设在中心快度区, 体系中的各种物理量不依赖于快度 η , 仅依赖于固有时 $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$. 在此流体模型中, 流体初始速度为

$$u^\mu = (t/\tau, 0, 0, z/\tau). \quad (110)$$

根据能动量张量守恒 $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$, 可以分别得到能量守恒方程 $u_\nu \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$ 和流体加速方程 $\Delta_{\nu\alpha} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$,

$$\begin{aligned} &(u \cdot \partial) \varepsilon + (\varepsilon + P) \partial \cdot u + (\partial \cdot q) + q^\nu (u \cdot \partial) u_\nu \\ &\quad - \tau^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu + u_\nu \partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (111)$$

$$(u \cdot \partial)u_\alpha = \frac{1}{\varepsilon + P} [\Delta_\alpha^\nu \partial_\nu P - (q \cdot \partial)u_\alpha + q_\alpha (\partial \cdot u) + \Delta_{\nu\alpha} (u \cdot \partial)q^\nu - \Delta_{\nu\alpha} \partial_\mu \tau^{\mu\nu} - \Delta_{\nu\alpha} \partial_\mu \phi^{\mu\nu}]. \quad (112)$$

为了保持初始四速度能在演化过程中稳定, 通过代入 $q^\mu, \tau^{\mu\nu}, \phi^{\mu\nu}$ 的本构方程 (16)–(18) 可知, 若 $\omega^{tx} = \omega^{ty} = \omega^{tz} = \omega^{xz} = \omega^{yz} = 0$, 只有 $\omega^{xy} \neq 0$, 此时则有 $(u \cdot \partial)u_\alpha = 0$, 即系统可以一直保持 Bjorken 速度 ((110) 式). 类似地, 将 $q^\mu, \tau^{\mu\nu}, \phi^{\mu\nu}$ 的本构方程 (16)–(18) 代入能量密度演化方程, 可得:

$$\frac{d}{d\tau} \varepsilon + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{\tau} - s \left(\frac{2}{3} \frac{\eta_s}{s} + \frac{\zeta}{s} \right) \frac{1}{\tau^2} = 0. \quad (113)$$

再根据角动量守恒 (4) 式在 $O(\partial)$ 阶的形式 $\partial_\lambda (u^\lambda S^{\mu\nu}) = -2(q^\mu u^\nu - q^\nu u^\mu + \phi^{\mu\nu})$, 结合本构方程可得自旋密度演化方程:

$$\frac{dS^{xy}}{d\tau} + S^{xy} \frac{1}{\tau} = -\frac{4\gamma}{T} \omega^{xy}. \quad (114)$$

利用热力学方程及状态方程 (108) 和 (109) 可得:

$$\varepsilon(T, \omega^{xy}) = c_1 T^4 + 3a_1 T^2 \omega_{xy}^2, \quad (115)$$

$$s(T, \omega^{xy}) = \frac{4}{3} c_1 T^3 + 2a_1 T \omega_{xy}^2, \quad (116)$$

其中,

$$c_1 = \frac{\varepsilon_0}{T_0^4} - 3a_1 \left(\frac{\omega_0^{xy}}{T_0} \right)^2 = \frac{3s_0}{4T_0^3} - \frac{3}{2} a_1 \left(\frac{\omega_0^{xy}}{T_0} \right)^2. \quad (117)$$

在高温极限 $\omega_{xy}^2/T^2 \ll 1$ 近似下, 将 (109) 式、(115) 和 (116) 式分别代入能量守恒方程 (113) 与自旋密度演化方程 (114) 后, 得到最终可解的方程:

$$\frac{d}{d\tau} T + \frac{1}{3} \frac{T}{\tau} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \frac{\eta_s}{s} + \frac{\zeta}{s} \right) \frac{1}{\tau^2} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\omega_{xy}}{T} \right)^2 \right) = 0, \quad (118)$$

$$T \frac{d}{d\tau} \omega^{xy} + 2\omega^{xy} \frac{d}{d\tau} T + T \omega^{xy} \frac{1}{\tau} + \frac{4\gamma}{a_1 T^2} \omega^{xy} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\omega_{xy}}{T} \right)^2 \right) = 0. \quad (119)$$

在相对论重离子碰撞中, 有 $\eta_s/s, \zeta/s \ll 1$, 故最终解得:

$$T(\tau) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} - \frac{1}{2\tau} \left(\frac{2}{3} \frac{\eta_s}{s} + \frac{\zeta}{s} \right) \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{2/3} \right] + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\omega_0^{xy}}{T_0} \right)^2 \right), \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \omega^{xy}(\tau) = \omega_0^{xy} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} \exp \left[-\frac{2\gamma\tau_0}{a_1 T_0^3} \left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right) \right] & \left(1 + \left(\frac{2}{3} \frac{\eta_s}{s} + \frac{\zeta}{s} \right) \frac{1}{T_0^4} \times \left\{ \frac{T_0^3}{\tau_0} \left[\left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{2/3} - 1 \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma}{a_1} \left[3 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 - \frac{9}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{4/3} + \frac{3}{2} \right] \right\} \right) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\omega_0^{xy}}{T_0} \right)^2, \left(\frac{\eta_s}{s} \right)^2, \left(\frac{\zeta}{s} \right)^2, \left(\frac{\eta_s \zeta}{s^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (121)$$

将 $T(\tau), \omega^{xy}(\tau)$ 代入 (115) 和 (116), 得到:

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} - 2 \frac{\varepsilon_0 \tau_0}{T_0 \tau^2} \left(\frac{2}{3} \frac{\eta_s}{s} + \frac{\zeta}{s} \right) \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{2/3} \right] + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\omega_0^{xy}}{T_0} \right)^2, \left(\frac{\eta_s}{s} \right)^2, \left(\frac{\zeta}{s} \right)^2, \left(\frac{\eta_s \zeta}{s^2} \right) \right), \quad (122)$$

$$\begin{aligned} S^{xy}(\tau) = a_1 \omega_0^{xy} T_0^2 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right) \exp \left[-\frac{2\gamma\tau_0}{a_1 T_0^3} \left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right) \right] & \times \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \frac{\eta_s}{s} + \frac{\zeta}{s} \right) \frac{3\gamma}{2a_1 T_0^4} \left[2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 - 3 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{4/3} + 1 \right] \right\} \\ & + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\omega_0^{xy}}{T_0} \right)^2, \left(\frac{\eta_s}{s} \right)^2, \left(\frac{\zeta}{s} \right)^2, \left(\frac{\eta_s \zeta}{s^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (123)$$

(120)–(123) 式即为 Bjorken 型耗散自旋流体的特解. 我们发现 $T \sim \tau^{-1/3}$, $s \sim \tau^{-1}$, $\varepsilon \sim \tau^{-4/3}$, 与理想的 Bjorken 流体标度解一致. 若在理想 Bjorken 流体中加入耗散效应, 会使得 T, ε 都有与耗散相关的修正项. 若再在耗散 Bjorken 流体中引入自旋的部分, 即 $\gamma \neq 0$, ω^{xy}, S^{xy} 会被压低. 而当

$\gamma \rightarrow 0$ 时, $\exp \left[-\frac{2\gamma\tau_0}{a_1 T_0^3} \left(\frac{\tau^2}{\tau_0^2} - 1 \right) \right]$ 将会变大趋于 1, 会有 $\omega^{xy}(\tau) \sim \tau^{-1/3}$ 与 $S^{xy}(\tau) \sim \tau^{-1}$.

5.2 Gubser 型流体耗散自旋流体解析解

Gubser 型流体 [60,61] 不仅包含 Bjorken 流体的纵向膨胀, 还考虑了流体的横向膨胀. 一般处理

Gubser 型流体需要进行 Weyl 变换. 需要先将系统从 Minkowski 时空的 (t, x, y, z) 进行坐标变换到 $(\tau, x_\perp, \varphi, \eta)$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -d\tau^2 + dx_\perp^2 + x_\perp^2 d\varphi^2 + \tau^2 d\eta^2, \end{aligned} \quad (124)$$

注意, 这里采用的 Minkowski 度规是 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. 再对整个空间做共形变化 $d\hat{s}^2 = \frac{1}{\tau^2} ds^2$ (即从 $\{ds^2, (\tau, x_\perp, \varphi, \eta)\}$ 变换到 $\{d\hat{s}^2, (\tau, x_\perp, \varphi, \eta)\}$):

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= \frac{1}{\tau^2} (-d\tau^2 + dx_\perp^2 + x_\perp^2 d\varphi^2) + d\eta^2 \\ &= -d\rho^2 + \cosh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + d\eta^2. \end{aligned} \quad (125)$$

在上式的变换中

$$\sinh \rho = -\frac{L^2 - \tau^2 + x_\perp^2}{2L\tau}, \quad (126)$$

$$\tan \theta = \frac{2Lx_\perp}{L^2 + \tau^2 - x_\perp^2}, \quad (127)$$

其中, L 是 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空下系统的特征尺度. 为了区别, 下面用符号 $\hat{\cdot}$ 表示在 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空中的各种量, 如 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空度规 $\hat{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \cosh^2 \rho, \cosh^2 \rho \sin^2 \theta, 1)$.

列出在 Weyl 变换后得到的 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空中 (m, n) 型张量的变换形式:

$$A_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}(x) \rightarrow \hat{A}_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m} = \Omega^l A_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}(x), \quad (128)$$

其中 $l = [A] + m - n$, $[A]$ 指的是张量 A 的共形维数. 在流体相关的计算中, 取 $\Omega = \tau$, 利用上述规则可得:

$$\hat{u}_\mu = \tau^{-1} u_\mu, \quad \hat{u}^\mu = \tau u^\mu, \quad \hat{\varepsilon} = \tau^4 \varepsilon, \quad \hat{P} = \tau^4 P, \quad (129)$$

$$\hat{T} = \tau T, \quad \hat{s} = \tau^3 s, \quad \hat{S}^{\mu\nu} = \tau^5 S^{\mu\nu}, \quad \hat{\omega}_{\mu\nu} = \tau^{-1} \omega_{\mu\nu}, \quad (130)$$

$$\hat{\omega}^{\mu\nu} = \tau^3 \omega^{\mu\nu}, \quad \hat{g}^{\mu\nu} = \tau^2 g^{\mu\nu}, \quad \hat{\Delta}^{\mu\nu} = \tau^2 \Delta^{\mu\nu}. \quad (131)$$

而 Minkowski 时空与 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空的联络可以通过下式联系起来:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{\tau} \left(\delta_\nu^\lambda \hat{\nabla}_\mu \tau + \delta_\mu^\lambda \hat{\nabla}_\nu \tau - \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\lambda\alpha} \hat{\nabla}_\alpha \tau \right). \quad (132)$$

Gubser 型流体要求在 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空下的流体初始速度为

$$\hat{u}_\mu = (-1, 0, 0, 0), \quad (133)$$

若变换回 Minkowski 时空, 对应的流速是

$$u_\mu = \left(-\frac{1}{\cosh \rho} \frac{L^2 + \tau^2 + x_\perp^2}{2L\tau}, \frac{1}{\cosh \rho} \frac{x_\perp}{L}, 0, 0 \right). \quad (134)$$

我们发现这个速度是在 Bjorken 型流体的基础上多考虑了横平面径向的膨胀.

下面将上述思路应用到计算 Gubser 型流体耗散自旋流体中. 首先, 从 (129) 式可以发现 $\Pi = -\zeta \nabla_\mu u^\mu$ 与 $q^\mu = \lambda \left(-\frac{1}{T} \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu T + u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu + 4u_\nu \omega^{\mu\nu} \right)$ 不具有共形变换协变性. 为了简化计算, 取 $\zeta = \tau^{-3} \hat{\zeta} = 0$, $\lambda = \tau^{-3} \hat{\lambda} = 0$. 最终能动量张量的分解及本构方程可以写成下面的形式:

$$\hat{\Theta}^{\mu\nu} = \hat{\varepsilon} \hat{u}^\mu \hat{u}^\nu + \hat{P} \hat{\Delta}^{\mu\nu} + \hat{\pi}^{\mu\nu} + \hat{\phi}^{\mu\nu}, \quad (135)$$

$$\hat{\pi}^{\mu\nu} = -\hat{\eta}_s \hat{\nabla}^{<\mu} \hat{u}^{\nu>}, \quad (136)$$

$$\hat{\phi}^{\mu\nu} = \hat{\gamma} \left(2\hat{\Delta}^{\mu\alpha} \hat{\Delta}^{\nu\beta} \hat{\omega}_{\alpha\beta} - \hat{\nabla}_\perp^{[\mu} \hat{u}^{\nu]} \right), \quad (137)$$

其中 $\hat{\eta}_s, \hat{\gamma} \geq 0$. 由于做了坐标变换和共形变化, 因此这系列方程中, 将普通微商 ∂_μ 改为协变微商 ∇_μ .

类似地, $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空下热力学关系变成:

$$\hat{\varepsilon} + \hat{P} = \hat{T} \hat{s} + \hat{\omega}_{\mu\nu} \hat{S}^{\mu\nu}, \quad (138)$$

$$d\hat{\varepsilon} = \hat{T} d\hat{s} + \hat{\omega}_{\mu\nu} d\hat{S}^{\mu\nu}, \quad (139)$$

$$d\hat{P} = \hat{s} d\hat{T} + \hat{S}^{\mu\nu} d\hat{\omega}_{\mu\nu}. \quad (140)$$

对应的状态方程 (108) 和 (109) 变成

$$\hat{\varepsilon} = 3\hat{P}, \quad (141)$$

$$\hat{S}^{\mu\nu} = a_1 \hat{T}^2 \hat{\omega}^{\mu\nu}. \quad (142)$$

根据热力学方程组和状态方程, 可得:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{T}^4 \left(c_0 + \frac{3}{2} a_1 \bar{\omega}^2 \right), \quad (143)$$

$$\hat{s} = \hat{T}^3 \left(\frac{4}{3} c_0 + a_1 \bar{\omega}^2 \right), \quad (144)$$

其中, $c_0 \equiv \hat{\varepsilon}_0 / \hat{T}_0^4 - 3a_1 \bar{\omega}_0^2 / 2 = 3\hat{s}_0 / (4\hat{T}_0^3) - 3a_1 \bar{\omega}_0^2 / 4$, 并且 $\hat{\varepsilon}_0 = \hat{\varepsilon}(\rho_0)$, $\hat{s}_0 = \hat{s}(\rho_0)$, $\hat{T}_0 = \hat{T}(\rho_0)$, $\bar{\omega}_0^2 = \bar{\omega}^2(\rho_0)$. 另外引入了一个依赖于 ρ 无量纲量:

$$\bar{\omega}^2 \equiv \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} / T^2 = \hat{\omega}_{\mu\nu} \hat{\omega}^{\mu\nu} / \hat{T}^2 = \bar{\omega}^2(\rho). \quad (145)$$

最后, 得到在 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空下能动量和角动量守恒方程:

$$\hat{\nabla}_\mu \hat{\Theta}^{\mu\nu} = 2\tau^{-1} \hat{\Theta}^{[\mu\nu]} \hat{\nabla}_\mu \tau, \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\alpha \left(\hat{u}^\alpha \hat{S}^{\mu\nu} \right) - 2\hat{\phi}^{\mu\nu} &= (\hat{u}_\alpha \hat{S}^{\alpha\nu} \hat{g}^{\mu\beta} \\ &+ \hat{u}_\alpha \hat{S}^{\mu\alpha} \hat{g}^{\nu\beta} + \hat{u}^\mu \hat{S}^{\nu\beta} - \hat{u}^\nu \hat{S}^{\mu\beta}) \tau^{-1} \hat{\nabla}_\beta \tau. \end{aligned} \quad (147)$$

我们发现一般情况下上述两个守恒方程并不具有共形协变性. 但若假设所有的宏观量在 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空中仅依赖于 ρ , 并且仔细地选取 $\phi^{\mu\nu}$ 不为零的分量, 则可以使得 (146) 式和 (147) 式中右边破坏共形不协变性的量均为零.

从能-动量守恒方程可得:

$$\hat{u}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\alpha = -\frac{1}{\hat{e} + \hat{p}} \left(\hat{\Delta}_\alpha^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{p} + \hat{\Delta}_{\nu\alpha} \hat{\nabla}_\mu \hat{\pi}^{\mu\nu} + \hat{\Delta}_{\nu\alpha} \hat{\nabla}_\mu \hat{\phi}^{\mu\nu} - 2\tau^{-1} \hat{g}_{\alpha\nu} \hat{\phi}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \tau \right), \quad (148)$$

$$\frac{d\hat{e}}{d\rho} + \frac{8}{3} \hat{e} \tanh \rho - \frac{2}{3} \left(\frac{\hat{\eta}_s}{\hat{s}} \right) \hat{s} \tanh^2 \rho = 0. \quad (149)$$

(148) 式结合本构方程分析可得:

$$\begin{aligned} \hat{u}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\rho &= 0, \quad \hat{u}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\theta = 0, \\ \hat{u}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\varphi &= \frac{2 \cosh^2 \rho \sin^2 \theta}{\hat{e} + \hat{p}} \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \hat{s} (-\partial_\theta \hat{\omega}^{\theta\varphi} - \cot \theta \hat{\omega}^{\theta\varphi} + 2\hat{\omega}^{\theta\varphi} \tau^{-1} \partial_\theta \tau), \\ \hat{u}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\eta &= \frac{2}{\hat{e} + \hat{p}} \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \hat{s} (-\partial_\theta \hat{\omega}^{\theta\eta} - \cot \theta \hat{\omega}^{\theta\eta} + 2\hat{\omega}^{\theta\eta} \tau^{-1} \partial_\theta \tau). \end{aligned} \quad (150)$$

我们发现只有当 $\hat{\omega}^{\theta\varphi}, \hat{\omega}^{\theta\eta} = 0$ 时, Gubser 流速才是稳定不变的. 因此, 假设初始状态为 $\hat{\omega}^{\theta\varphi}, \hat{\omega}^{\theta\eta} = 0$. 另一方面, 由角动量守恒方程可以得到以下方程:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \hat{S}^{\rho\varphi} + 3 \tanh \rho \hat{S}^{\rho\varphi} + \hat{S}^{\varphi\tau} \tau^{-1} \partial_\theta \tau &= 0, \\ \partial_\rho \hat{S}^{\rho\eta} + 2 \tanh \rho \hat{S}^{\rho\eta} + \hat{S}^{\eta\tau} \tau^{-1} \partial_\theta \tau &= 0, \\ \partial_\rho \hat{S}^{\theta\varphi} + 4 \tanh \rho \hat{S}^{\theta\varphi} + \cosh^{-2} \rho \hat{S}^{\rho\varphi} \tau^{-1} \partial_\theta \tau \\ &+ 4 \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \hat{s} \hat{\omega}^{\theta\varphi} = 0, \\ \partial_\rho \hat{S}^{\theta\eta} + 3 \tanh \rho \hat{S}^{\theta\eta} + \cosh^{-2} \rho \hat{S}^{\rho\eta} \tau^{-1} \partial_\theta \tau \\ &+ 4 \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \hat{s} \hat{\omega}^{\theta\eta} = 0, \\ \partial_\rho \hat{S}^{\varphi\eta} + 3 \tanh \rho \hat{S}^{\varphi\eta} + 4 \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \hat{s} \hat{\omega}^{\varphi\eta} &= 0, \\ \partial_\rho \hat{S}^{\rho\theta} + 3 \tanh \rho \hat{S}^{\rho\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (151)$$

我们发现 $\hat{S}^{\theta\varphi}, \hat{S}^{\theta\eta}$ 与 $\hat{S}^{\rho\varphi}, \hat{S}^{\rho\eta}$ 相互耦合在一起. 因此, 需要令初始状态时的 $\hat{\omega}^{\rho\varphi}, \hat{\omega}^{\rho\eta}, \hat{S}^{\rho\varphi}, \hat{S}^{\rho\eta} = 0$. 在这样的条件下, 可以发现 $\hat{u}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{u}_\alpha = 0$, ($\alpha = \rho, \theta, \varphi, \eta$) 恒成立, 即 Gubser 流速稳定不变, 同时 $\hat{\omega}^{\rho\varphi}, \hat{\omega}^{\rho\eta}, \hat{S}^{\rho\varphi}, \hat{S}^{\rho\eta}$ 也会一直保持为零. 在这些简化下, 只需要求解方程组 (143), (144), (149), (151), (152).

将方程 (143) 和 (144) 及 (142) 式代入方程 (149) 和 (151) 中, 可得:

$$\frac{d}{d\rho} \hat{T} + \frac{2}{3} \hat{T} \tanh \rho - \frac{2}{9} \left(\frac{\hat{\eta}_s}{\hat{s}} \right) \tanh^2 \rho + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2) = 0, \quad (152)$$

$$\partial_\rho \hat{S}^{\varphi\eta} + 3 \tanh \rho \hat{S}^{\varphi\eta} + \frac{4}{a_1 \hat{T}^2} \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \hat{s} \hat{S}^{\varphi\eta} = 0, \quad (153)$$

$$\partial_\rho \hat{S}^{\rho\theta} + 3 \tanh \rho \hat{S}^{\rho\theta} = 0. \quad (154)$$

上述方程组对应的解析解为

$$\hat{T}(\rho) = \hat{T}_0 \left(\frac{\cosh \rho_0}{\cosh \rho} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{\hat{\eta}_s}{\hat{s}} B(\rho) \right) + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2), \quad (155)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}(\rho) &= \hat{e}_0 \left(\frac{\cosh \rho_0}{\cosh \rho} \right)^{\frac{8}{3}} \left(1 + 4 \frac{\hat{\eta}_s}{\hat{s}} B(\rho) \right) \\ &+ \mathcal{O}(\bar{\omega}^2, \left(\frac{\hat{\eta}_s}{\hat{s}} \right)^2), \end{aligned} \quad (156)$$

$$\hat{S}^{\rho\theta}(\rho, \theta) = c_1 \cosh^{-3} \rho, \quad (157)$$

$$\hat{S}^{\varphi\eta}(\rho, \theta) = c_2 \cosh^{-3} \rho \sin^{-1} \theta A(\rho) + \mathcal{O}(\bar{\omega}^2), \quad (158)$$

其中

$$\begin{aligned} B(\rho) &\equiv \frac{2}{27} \frac{1}{\hat{T}_0} \cosh^{-\frac{2}{3}} \rho_0 \left[\sinh^3 \rho F \left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -\sinh^2 \rho \right) \right. \\ &\quad \left. - \sinh^3 \rho_0 F \left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -\sinh^2 \rho_0 \right) \right], \\ A(\rho) &\equiv \exp \left[-\frac{4}{a} \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \frac{\hat{s}(\rho')}{\hat{T}(\rho')^2} \right] \\ &= 1 + \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right) \frac{6}{a_1} \frac{\hat{s}_0}{\hat{T}_0^2} \cosh^{\frac{2}{3}} \rho_0 \\ &\quad \times \left[\operatorname{sech}^{\frac{2}{3}} \rho_0 F \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \operatorname{sech}^2 \rho_0 \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sech}^{\frac{2}{3}} \rho F \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \operatorname{sech}^2 \rho \right) \right] \\ &+ \mathcal{O} \left(\frac{\hat{\omega}^{\alpha\beta} \hat{\omega}_{\alpha\beta}}{\hat{T}^2}, \left(\frac{\hat{\eta}_s}{\hat{s}} \right)^2, \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{s}} \right)^2, \frac{\hat{\gamma} \hat{\eta}_s}{\hat{s}^2} \right), \end{aligned} \quad (159)$$

且

$$\begin{aligned} c_1 &= \hat{S}^{\rho\theta}(\rho_0, \theta_0) \cosh^3 \rho_0, \\ c_2 &= \hat{S}_0^{\varphi\eta} A^{-1}(\rho_0) \cosh^3 \rho_0 \sin \theta_0, \end{aligned} \quad (160)$$

这里的 $F(a, b; c; z)$ 是超几何函数.

最后, 可以将在 $dS_3 \otimes \mathbb{R}$ 时空下的解析解转回

Minkowski 时空, 得到:

$$\varepsilon = \frac{\hat{\varepsilon}_0}{\tau_0^4} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\frac{G(L, \tau_0, x_{\perp 0})}{G(L, \tau, x_{\perp})} \right]^{\frac{4}{3}} \times \left(1 + 4 \frac{\eta_s}{s} B(\rho) \right) + \mathcal{O} \left(\bar{\omega}^2, \left(\frac{\eta_s}{s} \right)^2 \right), \quad (161)$$

$$S^{0x} = \frac{4L^2}{\tau} C_+ G(L, \tau, x_{\perp})^{-1}, \quad (162)$$

$$S^{0y} = \frac{4L^2}{\tau} C_- G(L, \tau, x_{\perp})^{-1}, \quad (163)$$

$$S^{xz} = \frac{4L^2}{\tau} D_+ G(L, \tau, x_{\perp})^{-1}, \quad (164)$$

$$S^{yz} = \frac{4L^2}{\tau} D_- G(L, \tau, x_{\perp})^{-1}, \quad (165)$$

其中,

$$\begin{aligned} G(L, \tau, x_{\perp}) &= 4L^2 \tau^2 + (L^2 - \tau^2 + x_{\perp}^2)^2, \\ C_{\pm}(t, x, y, z) &= c_1 \cosh \eta \cos \varphi \pm c_2 \sinh \eta \sin \varphi A(\rho), \\ D_{\pm}(t, x, y, z) &= -c_1 \sinh \eta \cos \varphi \pm c_2 \cosh \eta \sin \varphi A(\rho). \end{aligned} \quad (166)$$

在 $\tau, x_{\perp} \ll L$ 的极限下, 我们发现 $L^2 G(L, \tau, x_{\perp})^{-1} \sim L^{-2}$, 并得到 $\varepsilon \sim \tau^{-4/3}$, 且 $S^{0x}, S^{0y}, S^{xz}, S^{yz} \sim \tau^{-1}$, 这与 Bjorken 型自旋流体力学解析解有着类似的衰减规律.

6 结 论

产生和研究高温高密条件下的退禁闭的夸克胶子物质——夸克-胶子等离子体 (QGP) 的物理性质是高能核物理的主要课题之一. 目前, 在实验上只有相对论重离子碰撞实验可以做到这一点. 在这些实验中, QGP 在碰撞的早期产生, 只能通过实验探测器捕捉到的强子信号来反推出 QGP 的性质. 通过过去 20 多年的实验和理论研究, 已经了解到 QGP 一些非常独特的特性, 如它的极端高温、极端低的黏滞性等性质. 近几年来, 对超子自旋极化和矢量介子自旋排列实验测量的实现, 使得我们首次能够对 QGP 中的自旋结构和自旋输运性质进行研究. 这也促进了关于在相对论性系统中自旋极化和自旋输运现象的理论研究. 由于流体力学模型描述 QGP 演化过程取得了极大成功, 非常自然地, 人们希望能够通过流体力学方法来研究自旋输运现象, 这便要求发展相对论自旋流体力学.

本文论述了如何通过能-动量守恒和角动量守

恒来得到相对论自旋流体力学. 讨论了三种不同的方法, 包括基于熵流和定域热力学第二定律的唯象学推导、采用有效场论的方法和基于输运理论的推导方法. 得到的描述自旋流体的基本方程中含有非对称的能动量张量, 它表征了自旋角动量和轨道角动量的转化, 并且由于这种转化导致自旋流体中不可避免地出现耗散现象. 熵流和定域热力学第二定律的唯象学推导方法是从宏观理论出发进行的推导; 有效场论的方法则不依赖于具体的流体类型, 更具有一般性; 基于输运理论的方法则是从微观理论出发进行研究的. 这三种推导方法是相互关联且互为补充的. 在得到基本的理论框架后, 讨论了如何在两种理想的膨胀体系——Bjorken 膨胀和 Gubser 膨胀体系中求解相对论自旋流体力学方程. 这两种膨胀体系经常被用来模型化相对论重离子碰撞中的 QGP 演化, 因此本文的结果不但提供了关于膨胀 QGP 中自旋极化和输运的一些基本特征, 也为将来基于数值求解自旋流体力学方程提供了参考.

由于相对论自旋流体力学还在快速的发展之中, 本文只提供了对这一领域中基本问题的一个简单的论述, 关于更专门和更详尽的讨论, 读者可以在原始文献中找到, 如文献 [23, 24, 36–39, 59, 62–79]. 同时, 相对论自旋流体力学的理论框架中依然存在待进一步澄清和发展的地方, 如关于赝规范变换的物理意义、关于自旋流体力学方程的稳定性、关于自旋流体力学中引入的新的输运系数的计算等问题; 另外, 数值求解自旋流体力学方程并应用到高能重离子碰撞中也是亟待发展的课题. 相对论自旋流体可以作为描述自旋极化与矢量介子自旋排列的宏观理论, 未来数值模拟将为更好地描述相对论重离子碰撞实验中的极化问题提供帮助. 此外, 基于相对论自旋流体中引入的自旋化学势和自旋密度, 也会对自旋极化矢量有所修正 [80], 具体的修正依赖于自旋流体的数值模拟, 这也是未来需要解决的问题之一. 我们期待在未来几年中, 这些问题会得到解决或部分解决.

感谢 Cao Z, Hattori K, Hongo M, Kaminski M, Matsuo M, Stephanov M, Taya H, Yee H U, Wang D, Fang S, Xie X 等在相关课题上的讨论和合作.

参考文献

- [1] Deng W T, Huang X G 2016 *Phys. Rev. C* **93** 064907
- [2] Jiang Y, Lin Z W, Liao J 2016 *Phys. Rev. C* **94** 044910
- [3] Liang Z T, Wang X N 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 102301
- [4] Liang Z T, Wang X N 2005 *Phys. Lett. B* **629** 20
- [5] Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, et al. 2017 *Nature* **548** 62
- [6] Adam J, Adamczyk L, Adams J R, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 162301
- [7] STAR Collaboration 2023 *Nature* **614** 244
- [8] ALICE Collaboration 2022 arXiv: 2204.10171
- [9] Ma Y G 2023 *Nucl. Sci. Technol.* **34** 16
- [10] Wang X N 2023 *Nucl. Sci. Technol.* **34** 15
- [11] Liu Y C, Huang X G 2020 *Nucl. Sci. Technol.* **31** 56
- [12] Gao J H, Ma G L, Pu S, Wang Q 2020 *Nucl. Sci. Technol.* **31** 90
- [13] Sun X, Zhou C S, Chen J H, Chen Z Y, Ma Y G, Tang A H, Xu Q H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 072401 (in Chinese) [孙旭, 周晨升, 陈金辉, 陈震宇, 马余刚, 唐爱洪, 徐庆华 2023 物理学报 **72** 072401]
- [14] Gao J H, Huang X G, Liang Z T, Wang Q, Wang X N 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 072501 (in Chinese) [高建华, 黄旭光, 梁作堂, 王群, 王新年 2023 物理学报 **72** 072501]
- [15] Jiang Z F, Wu X Y, Yu H Q, Cao S S, Zhang B W 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 072504 (in Chinese) [江泽方, 吴祥宇, 余华清, 曹杉杉, 张本威 2023 物理学报 **72** 072504]
- [16] Zhao X L, Ma G L, Ma Y G 2023 *Acta Phys. Sin.* Accepted (in Chinese) [赵新丽, 马国亮, 马余刚 2023 物理学报 Accepted]
- [17] Sheng X L, Liang Z T, Wang Q 2023 *Acta Phys. Sin.* Accepted (in Chinese) [盛欣力, 梁作堂, 王群 2023 物理学报 Accepted]
- [18] Yin Y 2023 *Acta Phys. Sin.* Accepted (in Chinese) [尹伊 2023 物理学报 Accepted]
- [19] Hidaka Y, Pu S, Wang Q, Yang D L 2022 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **127** 103989
- [20] Gao J H, Sheng X L, Wang Q, Zhuang P F 2023 *Acta Phys. Sin.* Accepted (in Chinese) [高建华, 盛欣力, 王群, 庄鹏飞 2023 物理学报 Accepted]
- [21] Takahashi R, Matsuo M, Ono M, et al. 2016 *Nat. Phys.* **12** 52
- [22] Jepsen P N, Amato-Grill J, Dimitrova I, Ho W W, Demler E, Ketterle W 2020 *Nature* **588** 403
- [23] Hattori K, Hongo M, Huang X G, Matsuo M, Taya H 2019 *Phys. Lett. B* **795** 100
- [24] Fukushima K, Pu S 2021 *Phys. Lett. B* **817** 136346
- [25] Israel W, Stewart J M 1979 *Ann. Phys.* **118** 341
- [26] Becattini F, Bucciattini L, Grossi E, Tinti L 2015 *Eur. Phys. J. C* **75** 191
- [27] Glorioso P, Liu H 2016 arXiv: 1612.07705
- [28] Glorioso P, Crossley M, Liu H 2017 *JHEP* **09** 096
- [29] Son D T, Surowka P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 191601
- [30] Becattini F, Tinti L 2011 *Phys. Rev. D* **84** 025013
- [31] Becattini F, Tinti L 2013 *Phys. Rev. D* **87** 025029
- [32] Becattini F, Florkowski W, Speranza E 2019 *Phys. Lett. B* **789** 419
- [33] Kovtun P 2012 *J. Phys. A* **45** 473001
- [34] Fukuda M, Ichikawa K, Senami M, Tachibana A 2016 *AIP Adv.* **6** 025108
- [35] Crossley M, Glorioso P, Liu H 2017 *JHEP* **09** 095
- [36] Hongo M, Huang X G, Kaminski M, Stephanov M, Yee H U 2021 *JHEP* **11** 150
- [37] Gallegos A D, Gürsoy U, Yarom A 2021 *SciPost Phys.* **11** 41
- [38] Gallegos A D, Gürsoy U, Yarom A 2022 arXiv: 2203.05044
- [39] Peng H H, Zhang J J, Sheng X L, Wang Q 2021 *Chin. Phys. Lett.* **38** 116701
- [40] Heinz U W 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 351
- [41] Elze H T, Gyulassy M, Vasak D 1986 *Nucl. Phys. B* **276** 706
- [42] Vasak D, Gyulassy M, Elze H T 1987 *Annals Phys.* **173** 462
- [43] Sheng X L 2019 arXiv: 1912.01169
- [44] Sheng X L, Wang Q, Huang X G 2020 *Phys. Rev. D* **102** 025019
- [45] Yang D L, Hattori K, Hidaka Y 2020 *JHEP* **07** 070
- [46] Weickgenannt N, Speranza E, Sheng X L, Wang Q, Rischke D H 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 052301
- [47] Sheng X L, Weickgenannt N, Speranza E, Rischke D H, Wang Q 2021 *Phys. Rev. D* **104** 016029
- [48] Wang Z Y, Zhuang P F 2021 arXiv: 2105.00915
- [49] Fang S, Pu S, Yang D L 2022 *Phys. Rev. D* **106** 016002
- [50] Gao J H, Liang Z T 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056021
- [51] Weickgenannt N, Sheng X L, Speranza E, Wang Q, Rischke D H 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056018
- [52] Hattori K, Hidaka Y, Yang D L 2019 *Phys. Rev. D* **100** 096011
- [53] Wang Z, Guo X, Shi S, Zhuang P F 2019 *Phys. Rev. D* **100** 014015
- [54] Liu Y C, Mameda K, Huang X G 2020 *Chin. Phys. C* **44** 094101
- [55] Becattini F, Chandra V, Del Zanna L, Grossi E 2013 *Ann. Phys.* **338** 32
- [56] Romatschke P, Romatschke U 2019 *Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [57] Bhadury S, Florkowski W, Jaiswal A, Kumar A, Ryblewski R 2021 *Phys. Rev. D* **103** 014030
- [58] Wang D L, Fang S, Pu S 2021 *Phys. Rev. D* **104** 114043
- [59] Wang D L, Xie X Q, Fang S, Pu S 2022 *Phys. Rev. D* **105** 114050
- [60] Gubser S S, Yarom A 2011 *Nucl. Phys. B* **846** 469
- [61] Gubser S S 2010 *Phys. Rev. D* **82** 085027
- [62] Montenegro D, Torrieri G 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056011
- [63] Montenegro D, Tinti L, Torrieri G 2017 *Phys. Rev. D* **96** 056012A
- [64] Florkowski W, Friman B, Jaiswal A, Speranza E 2018 *Phys. Rev. C* **97** 041901
- [65] Florkowski W, Kumar A, Ryblewski R 2019 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **108** 103709
- [66] Li S, Yee H U 2019 *Phys. Rev. D* **100** 056022
- [67] Bhadury S, Florkowski W, Jaiswal A, Kumar A, Ryblewski R 2021 *Phys. Lett. B* **814** 136096
- [68] Montenegro D, Torrieri G 2020 *Phys. Rev. D* **102** 036007
- [69] Li S, Stephanov M A, Yee H U 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 082302
- [70] Shi S, Gale C, Jeon S 2021 *Phys. Rev. C* **103** 044906
- [71] She D, Huang A, Hou D F, Liao J F 2022 *Sci. Bull.* **67** 2265
- [72] Hu J 2021 *Phys. Rev. D* **103** 116015
- [73] Hu J 2022 *Phys. Rev. D* **105** 076009
- [74] Hongo M, Huang X G, Kaminski M, Stephanov M, Yee H U 2022 *JHEP* **08** 263
- [75] Singh R, Shokri M, Mehr S M A T 2022 arXiv: 2202.11504
- [76] Daher A, Das A, Florkowski W, Ryblewski R 2022 arXiv: 2202.12609
- [77] Weickgenannt N, Wagner D, Speranza E, Rischke D H 2022 *Phys. Rev. D* **106** 096014
- [78] Bhadury S, Florkowski W, Jaiswal A, Kumar A, Ryblewski R 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 192301

[79] Cao Z, Hattori K, Hongo M, Huang X G, Taya H 2022 *PTEP* 2022 071D

[80] Liu Y C, Huang X G 2022 *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 65 272011

SPECIAL TOPIC—Spin and chiral effects in high energy heavy ion collisions

Relativistic spin hydrodynamics^{*}

Pu Shi¹⁾ Huang Xu-Guang^{2)†}

1) (Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

2) (Shanghai Research Center for Theoretical Nuclear Physics, Key Laboratory of Nuclear Physics and Ion-beam Application, Ministry of Education, Center for Particle Physics and Field Theory, Physics Department, Fudan University, Shanghai 200433)

(Received 8 January 2023; revised manuscript received 30 January 2023)

Abstract

In recent years, due to the discoveries of hyperon spin polarization and vector meson spin alignment in relativistic heavy-ion collision experiments, the spin transports in quark-gluon matter has received intensive studies. The relativistic spin hydrodynamics is one of the important theoretical frameworks to describe the spin transports, which encodes the spin degree of freedom into a hydrodynamic theory. The relativistic spin hydrodynamics have the conservation equations for energy-momentum tensor, currents and total angular momentum. In this article, we give an overview of the recent progresses of the relativistic spin hydrodynamics. We focus on the following topics: 1) The derivation of the relativistic spin hydrodynamic equations, including the phenomenological approach, the effective theory method, and the kinetic approach, 2) Some special properties of spin hydrodynamics, especially the asymmetric energy-momentum tensor and the pseudogauge transformation, and 3) The analytical solutions to the relativistic spin hydrodynamics for systems under Bjorken and Gubser expansion.

Keywords: Spin hydrodynamics, hyperon spin polarization, relativistic heavy-ion collisions

PACS: 12.38.Mh, 25.75.-q, 47.10.-g

DOI: 10.7498/aps.72.20230036

^{*} Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2022YFA1604900), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12225502, 12075061, 12147101, 12075235, 12135011), and the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. 20ZR1404100).

[†] Corresponding author. E-mail: huangxuguang@fudan.edu.cn

相对论自旋流体力学

浦实 黄旭光

Relativistic spin hydrodynamics

Pu Shi Huang Xu-Guang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 071202 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230036

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230036>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

FP-1装置铝套筒内爆动力学过程的一维磁流体力学模拟

One-dimensional magneto-hydrodynamics simulation of magnetically driven solid liner implosions on FP-1 facility

物理学报. 2018, 67(8): 080701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172300>

磁性硅烯超晶格中电场调制的谷极化和自旋极化

Valley and spin polarization manipulated by electric field in magnetic silicene superlattice

物理学报. 2018, 67(8): 086801 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180080>

黑腔中等离子体相互作用的流体力学现象观测

Observation of hydrodynamic phenomena of plasma interaction in hohlraums

物理学报. 2018, 67(23): 235201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181391>

相对论多组态相互作用方法计算Mg⁺离子同位素位移

Calculation of isotope shift of Mg⁺ ion by using the relativistic multi-configuration interaction method

物理学报. 2018, 67(1): 013101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171817>

高超声速磁流体力学控制霍尔效应影响

Influence of Hall effect on hypersonic magnetohydrodynamic control

物理学报. 2020, 69(21): 214703 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200630>

X波段高重频长脉冲高功率多注相对论速调管放大器的设计与实验研究

Design and experiment of X-band high-repetition rate high-power multi-beam relativistic klystron amplifier

物理学报. 2020, 69(21): 218401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201013>