专题: 非线性系统理论及其前沿应用

# 可积系统的双线性约化方法*

张大军†

(上海大学数学系, 上海 200444)

(2023 年 1 月 12 日收到; 2023 年 1 月 27 日收到修改稿)

本综述主要介绍了双线性约化方法在可积系统求解中的应用. 这一方法基于双线性方法和解的双 Wronskian 表示. 对于通过耦合系统约化而获得的可积方程, 先求解未约化的耦合系统, 给出用双 Wronskian 表示的解; 进而利用双 Wronskian 的规则结构, 施以适当的约化技巧, 获得约化后的可积方程的解. 以非线性 Schrödinger 方程族和微分-差分非线性 Schrödinger 方程为具体例证, 详述此方法的应用技巧. 除了经典可积方程, 该方法也适用于非局部可积系统的求解. 其他例子还包括 Fokas-Lenells 方程和非零背景的非线性 Schrödinger 方程等可积系统的求解.

**关键词:** 双线性约化方法, 双 Wronski 行列式, 可积系统, 精确解

**PACS:** 02.30.Ik, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.72.20230063

## 1 引 言

许多可积的物理模型可以描述为相应耦合系统的约化. 例如著名的非线性 Schrödinger (NLS) 方程:

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0, \tag{1}$$

可视为耦合系统

$$\mathrm{i}q_t = -q_{xx} + 2q^2 r, \tag{2a}$$

$$\mathrm{i}r_t = r_{xx} - 2r^2 q, \tag{2b}$$

在约化 $r = -q^*$ 之下的结果, 而方程组 (2) 从属于著名的 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) 方程族. 其中, $q$ 和 $r$ 都是 $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ 的函数, i 是虚数单位, $*$ 表示复共轭, $|q|^2 = qq^*$. 在上述约化背景下, 求解 NLS 方程可以转化为预先求解二阶 AKNS 系统 (2), 获得 $q$ 和 $r$ 的显式表达式, 进而在这些解上施加约束以使其满足 $r = -q^*$, 最终获得 NLS 方程 (1) 的解.

以 NLS 方程为例, "双线性约化方法"指利用双线性方法求解耦合系统 (2), 借助双 Wronski 行列式 (Wronskian) 给出 $q$ 和 $r$ 的显式表达式. 这种表示具有规则的结构, 允许存在一系列的自由参数. 通过一定的技巧, 将对 $q$ 和 $r$ 的约束 (如 $r = -q^*$) 转化为对自由参数的约束, 而双 Wronskian 的规则结构为实施这种约化技巧提供了方便. 这一技巧于 2018 年由 Chen 等[1,2] 提出, 应用于求解非局部 (nonlocal) 可积的 NLS 方程族. 这类方程作为一类新型的可积系统, 由 Ablowitz 和 Mussilimani[3] 在 2013 年提出, 他们在 $q$ 和 $r$ 上施以"非局部"约束 $r(x, t) = -q^*(-x, t)$, 从 (2) 式得到"逆空间"的非局部 NLS 方程:

$$\mathrm{i}q_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)q^*(-x, t) = 0. \tag{3}$$

这种非局部约化还可以推广到微分-差分系统以及逆时间和带有时空平移的情形[4,5]. 双线性约化方法不仅适用于非局部可积系统的解的构造与研究, 同样适用于经典的可积系统, 包括微分-差分方程. 这一方法已经被应用于求解 AKNS 方程族[1]、半

* 国家自然科学基金 (批准号: 12271334, 12126352, 11875040) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: djzhang@staff.shu.edu.cn

 

离散 NLS 方程[6,7]、半离散修正 Korteweg-de Vries (KdV) 方程[8]、半离散非等谱 NLS 方程[9]、具有互反变换的负一阶 AKNS 方程与短脉冲方程[10]、负阶 AKNS 方程族[11]、导数 NLS 系统[12–14]、Gross-Pitaevskii 方程[15]、Fokas-Lenells 方程[16,17]、具有时空平移的可积系统[18,19]、(2+1) 维混合 AKNS 系统[11,20] 以及非零背景下的可积系统[21] 等.

本文旨在综述“双线性约化方法”, 以 NLS 方程族和半离散 NLS 方程为具体例证, 介绍这一方法的基本思想与应用技巧, 并列出其他代表结果. 第 2 节将介绍涉及的基本概念与符号, 第 3 节将以 NLS 方程族为例, 详述这一方法. 第 4 节将以半离散 NLS 方程为例, 介绍这一方法在空间离散可积方程中的应用. 第 5 节和第 6 节将分别给出这一方法在求解 Fokas-Lenells 方程和非零背景下的 NLS 方程上的应用, 最后给出结论. 关于 Hirota 双线性方法特别是孤子解的 Wronskian 表示, 推荐参考文献 [22].

## 2 基本概念与符号

Hirota 的双线性算子 $D$ 定义为[23]

$$\begin{aligned}&D_x^m D_y^n f(x,y)\cdot g(x,y)\\&=(\partial_x-\partial_{x'})^m(\partial_y-\partial_{y'})^n\\&\quad\times f(x,y)g(x',y')|_{x'=x,y'=y},\end{aligned}\tag{4}$$

式中, $f(x,\ y)$和$g(x,y)$都是关于 $(x,\ y)$ 的无穷可微函数. 上述定义也可以等价叙述为 ($f(\boldsymbol{t})$ 和 $g(\boldsymbol{t})$是关于$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 的无穷可微函数)

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i D_{t_i}\right)f(\boldsymbol{t})\cdot g(\boldsymbol{t})=f(\boldsymbol{t}+\varepsilon)\cdot g(\boldsymbol{t}-\varepsilon),\tag{5}$$

其中, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_i\in\mathbb{R}$.

Wronski 行列式 (Wronskian) 是一类特殊矩阵的行列式, 该矩阵中的各列满足后一列是前一列的导数. 假设:

$$\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)^{\mathrm{T}},\tag{6}$$

其中, $\phi_i=\phi_i(x)$ 是关于 $x$ 的无穷可微函数, 则由 $\phi$ 生成的 Wronskian 可以记为

$$W=|\phi,\phi^{(1)},\phi^{(2)},\cdots,\phi^{(N-1)}|,$$

式中 $\phi^{(i)}=\partial_x^i\phi$. 这种行列式也可以简记为[24]

$$W=|0,1,2,\cdots,N-1|=|\widehat{N-1}|.$$

双 Wronskian 由一对列向量生成. 假设:

$$\begin{aligned}\varphi&=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{N+M})^{\mathrm{T}},\\\psi&=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{N+M})^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{7}$$

其中, $\varphi_i=\varphi_i(x)$和$\psi_i=\psi_i(x)$都是关于 $x$ 的无穷可微函数. 由它们生成的行列式:

$$W=|\varphi,\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\varphi^{(N-1)};\ \psi,\psi^{(1)},\psi^{(2)},\cdots,\psi^{(M-1)}|,$$

称为双 Wronskian, 简记为[25]

$$\begin{aligned}W&=|0,1,2,\cdots,N-1;\ 0,1,2,\cdots,M-1|\\&=|\widehat{N-1};\widehat{M-1}|.\end{aligned}$$

Casoratian 是 Wronskian 的离散形式. 假设:

$$\varphi(n)=(\varphi_1(n),\varphi_2(n),\cdots,\varphi_N(n))^{\mathrm{T}},\quad n\in\mathbb{Z},\tag{8}$$

Casoratian 可以表示为[26]

$$\begin{aligned}C(\varphi)&=|\varphi(n),\varphi(n+1),\cdots,\varphi(n+N-1)|\\&=|0,1,2,\cdots,N-1|=|\widehat{N-1}|.\end{aligned}\tag{9}$$

类似地, 双 Casoratian 定义为

$$\begin{aligned}C(\varphi,\psi)&=|\varphi(n),\varphi(n+1),\cdots,\varphi(n+N-1);\\&\qquad\psi(n),\psi(n+1),\cdots,\psi(n+M-1)|\\&=|0,1,2,\cdots,N-1;0,1,\cdots,M-1|\\&=|\widehat{N-1};\widehat{M-1}|,\end{aligned}\tag{10}$$

其中, $\varphi$ 和 $\psi$ 都是关于 $n$ 的 $(N{+}M)$ 维列向量.

在双线性约化方法中, 解都是通过双 Wronkian 或双 Casoratian 进行表示.

## 3 NLS 方程族

本节将以 NLS 方程族为例, 详细介绍双线性约化方法的基本思想与应用技巧.

### 3.1 AKNS 方程族的双 Wronskian 解

NLS 方程族从属于著名的 AKNS 方程族:

$$\begin{aligned}&u_{t_n}=K_n=\begin{pmatrix}K_{1,n}\\K_{2,n}\end{pmatrix}=L^n\begin{pmatrix}-q\\r\end{pmatrix},\\&u=\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix},\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}\tag{11}$$

可以从 AKNS 谱问题[27] 导出, AKNS 谱问题为

$$\varPhi_x=\begin{pmatrix}\lambda&q\\r&-\lambda\end{pmatrix}\varPhi,\quad \varPhi=\begin{pmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{pmatrix},\tag{12}$$

导出步骤可以参考文献 [28] 的第 2 节. 这里, $q$ 和 $r$ 是 $(x,t)\in\mathbb{R}^2$的函数, $\lambda$为谱参数, $(\phi_1,\phi_2)$是波函

数, $L$ 是 AKNS 方程族的递推算子:

$$L=\begin{pmatrix}-\partial_x+2q\partial_x^{-1}r & 2q\partial_x^{-1}q\\ -2r\partial_x^{-1}r & \partial_x-2r\partial_x^{-1}q\end{pmatrix},$$

其中, $\partial_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_x^{-1}\partial_x=\partial_x\partial_x^{-1}=1$. AKNS 方程族中的偶指标方程 (将 $t_{2l}$ 替换为 $\mathrm{i}t_{2l}$), 即

$$\mathrm{i}u_{t_{2l}}=-K_{2l},\quad l=1,2,\cdots,\tag{13}$$

在约束

$$r(x,t)=\delta q^*(\sigma x,t),\quad \delta,\sigma=\pm1\tag{14}$$

之下, 可以约化为 NLS 方程族:

$$\mathrm{i}q_{t_{2l}}=-K_{1,2l}|_{(14)},\quad l=1,2,\cdots,\tag{15}$$

其中, $\delta=\mp1$ 分别对应散焦和聚焦的 NLS 方程族. 特别地, 当 $\sigma=-1$时, (15) 式称为逆空间的非局部 NLS 方程族[3]. 对于 NLS 方程族, 还存在逆时间和逆时空的非局部形式. 本文仅以 (15)式为例详述双线性约化方法的过程. 对于其他非局部约化对应的精确解, 可以参考文献 [1].

接下来给出 AKNS 方程族 (11) 和未约化的 NLS 方程族 (13) 的双 Wronskian 形式的解. 将 AKNS 方程族 (11) 改写为下面的递推形式:

$$\begin{pmatrix}q_{t_{n+1}}\\ r_{t_{n+1}}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}q_{t_n}\\ r_{t_n}\end{pmatrix},\quad n=1,2,\cdots.\tag{16}$$

借助于变换

$$q=\frac{h}{f},\quad r=-\frac{g}{f},\tag{17}$$

可以将方程族 (16) 进行双线性化 (特别地, 取 $t_1=x$), 得到[29]

$$(D_{t_{n+1}}-D_xD_{t_n})g\cdot f=0,\tag{18a}$$

$$(D_{t_{n+1}}-D_xD_{t_n})f\cdot h=0,\tag{18b}$$

$$D_x^2f\cdot f=2gh.\tag{18c}$$

并称之为双线性 AKNS 方程族. 特别当 $n=1$时, 上述方程给出耦合系统 (2) 的双线性形式:

$$(D_t-D_x^2)g\cdot f=0,\tag{19a}$$

$$(D_t-D_x^2)f\cdot h=0,\tag{19b}$$

$$D_x^2f\cdot f=2gh.\tag{19c}$$

双线性 AKNS 方程族 (18) 具有双 Wronskian 解.

**定理 1** 双线性 AKNS 方程族 (18) 具有如下的双 Wronskian 解[30,31]:

$$f=|\widehat{N-1};\widehat{M-1}|,\tag{20a}$$

$$g=2^{N-M+1}|\widehat{N};\widehat{M-2}|,\tag{20b}$$

$$h=2^{M-N+1}|\widehat{N-2};\widehat{M}|,\tag{20c}$$

其中, 构成上述双 Wronskian 的列向量 $\varphi$ 和 $\psi$(见 (7) 式) 定义为

$$\varphi=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^jt_j\right)C^+,$$

$$\psi=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^jt_j\right)C^-,\tag{21}$$

式中, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}_{(N+M)\times(N+M)}$ 是任意的$(N+M)$阶常矩阵, $C^\pm$是列向量, 形如:

$$C^\pm=(c_1^\pm,c_2^\pm,\cdots,c_{N+M}^\pm)^{\mathrm{T}},\quad c_i^\pm\in\mathbb{C}.$$

上述定理的证明可以参考文献 [31]. (21) 式中的向量 $\varphi$ 和 $\psi$ 满足微分方程 ($x=t_1$):

$$\varphi_x=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\varphi,\quad \psi_x=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\psi,\tag{22a}$$

$$\varphi_{t_j}=2^{j-1}\partial_x^j\varphi,\quad \psi_{t_j}=(-2)^{j-1}\partial_x^j\psi,\quad j=1,2,\cdots.\tag{22b}$$

因此, 通常 $\boldsymbol{A}$ 也称为系数矩阵. 可以证明, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的任意相似矩阵引出相同的解 $q$ 和 $r$.

需要说明的是, 对于 AKNS 方程族 (16) 中的某一具体方程

$$u_{t_n}=K_n,\tag{23}$$

由 (16) 式定义的所有等谱流 $\{K_j\}$都是方程 (23) 的对称. 在此结论之下, 当考虑具体的方程 (23) 时, (21) 式中的 $\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{2}\sum_{j\neq1,n}A^jt_j}$都可以视为常数, 被吸收到任意列向量$\boldsymbol{C}^\pm$之中. 特别对于约化前的 NLS 方程族 (13), 其解可以描述如下.

**定理 2** 约化前的 NLS 方程族 (13) 有形如 (17) 式的解, 其中 $f$, $g$, $h$ 由双 Wronskian (20) 式表示, $\varphi$ 和 $\psi$ 取为 ($t_1=x$)

$$\varphi=\exp\left(\frac{1}{2}Ax+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{\infty}A^{2j}t_{2j}\right)C^+,\tag{24a}$$

$$\psi=\exp\left(-\frac{1}{2}Ax-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{\infty}A^{2j}t_{2j}\right)C^-.\tag{24b}$$

### 3.2 解的约化

以定理 2 中未约化的 NLS 方程族 (13) 为例, 下面将详述如何将其解约化成为 NLS 方程族 (15) 的解.

**定理 3** [1,2,22] 考虑 (20) 式中的双 Wroskian $f$, $g$ 和 $h$, 其中的生成列向量 $\varphi$ 和 $\psi$ 定义为 (24) 式. 此时, 未约化的 NLS 方程族 (13) 有解 (17) 式. 对于列向量 $\varphi$ 和 $\psi$ 施以如下约束: $M=N$,

$$C^{-}=\boldsymbol{T}C^{+*}, \tag{25}$$

以及

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}+\sigma\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{0}, \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{*}=\delta\sigma\,\boldsymbol{I}_{2N}, \tag{26b}$$

其中, $\boldsymbol{T}$ 为 $2N\times 2N$ 矩阵, $\boldsymbol{I}_{2N}$ 是 $2N$ 阶单位矩阵. 在上述约束下, NLS 方程族 (15) 有解:

$$q(x,t)=2\frac{|\widehat{N-2};\widehat{N}|}{|\widehat{N-1};\widehat{N-1}|}, \tag{27}$$

其中 $\varphi$ 取自 (24a) 式:

$$\psi(x,t)=\boldsymbol{T}\varphi^{*}(\sigma x,t). \tag{28}$$

**证明**. 为了证明方便, 引入符号:

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}^{(N)}(ax)_{[bx]}=\big(&\varphi(ax),\partial_{bx}\varphi(ax),\partial_{bx}^{2}\varphi(ax),\\&\cdots,\partial_{bx}^{N}\varphi(ax)\big),\quad a,b=\pm1.\end{aligned} \tag{29}$$

首先, 考察在约束条件 (25) 式和 (26a) 式下, 列向量 $\varphi$ 和 $\psi$ 的关系. 可得

$$\begin{aligned}&\psi(\sigma x,t)\\&=\exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma\boldsymbol{A}x-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^{2j}t_{2j}\Big)C^{-}\\&=\exp\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{T}^{-1}x-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{T}^{-1})^{2j}t_{2j}\Big)\boldsymbol{T}C^{+*}\\&=\boldsymbol{T}\exp\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{*}x-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{A}^{*2j}t_{2j}\Big)\boldsymbol{C}^{+*}\\&=\boldsymbol{T}\varphi^{*}(x,t),\end{aligned}$$

此即为 (28) 式. 这样, (20) 式中的双 Wroskian $f$, $g$ 和 $h$ 可以写为 (已取 $M=N$)

$$f=|\widehat{\varphi}^{(N-1)}(x)_{[x]};\boldsymbol{T}\widehat{\varphi}^{*(N-1)}(\sigma x)_{[x]}|, \tag{30a}$$

$$g=2|\widehat{\varphi}^{(N)}(x)_{[x]};\boldsymbol{T}\widehat{\varphi}^{*(N-2)}(\sigma x)_{[x]}|, \tag{30b}$$

$$h=2|\widehat{\varphi}^{(N-2)}(x)_{[x]};\boldsymbol{T}\widehat{\varphi}^{*(N)}(\sigma x)_{[x]}|. \tag{30c}$$

对于上述 $f$, 利用 (26b) 式, 并随后提出在前 $N$ 列中出现的因子 $\sigma\delta$, 可得

$$\begin{aligned}&f^{*}(\sigma x,t)=|\widehat{\varphi}^{*(N-1)}(\sigma x)_{[\sigma x]};\boldsymbol{T}^{*}\widehat{\varphi}^{(N-1)}(\sigma^{2}x)_{[\sigma x]}|\\&=|\boldsymbol{T}^{*}|(\sigma\delta)^{N}|\boldsymbol{T}\widehat{\varphi}^{*(N-1)}(\sigma x)_{[\sigma x]};\widehat{\varphi}^{(N-1)}(x)_{[\sigma x]}|.\end{aligned}$$

将上式中的后 $N$ 列逐列移到前 $N$ 列, 再将各列的导数 $\partial_{\sigma x}$ 改写为 $\sigma\partial_{x}$, 进一步得到

$$\begin{aligned}f^{*}(\sigma x,t)=&|\boldsymbol{T}^{*}|(\sigma\delta)^{N}(-1)^{N}|\widehat{\varphi}^{(N-1)}(x)_{[x]};\\&\boldsymbol{T}\widehat{\varphi}^{*(N-1)}(\sigma x)_{[x]}|\\=&|\boldsymbol{T}^{*}|(\sigma\delta)^{N}(-1)^{N}f(x,t).\end{aligned}$$

类似可有

$$g^{*}(\sigma x,t)=|\boldsymbol{T}^{*}|\delta^{N+1}\sigma^{N}(-1)^{N-1}h(x,t).$$

这样, 对于形如 (17) 式的 $q$ 和 $r$, 可得

$$r^{*}(\sigma x,t)=-\frac{g^{*}(\sigma x,t)}{f^{*}(\sigma x,t)}=\frac{\delta h(x,t)}{f(x,t)}=\delta q(x,t),$$

此即为约化关系 (14) 式. 这样, 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 满足方程 (26) 时, (27) 式给出 NLS 方程族 (15) 的解.

定理 3 将解的约化转化为求解 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 满足的矩阵方程族 (26). 考虑分块矩阵形式的特解. 假设:

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}K_1 & (\boldsymbol{0})_N\\ (\boldsymbol{0})_N & K_4\end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中, $T_i$ 和 $K_i$ 都是 $N\times N$ 矩阵, $(\boldsymbol{0})_N$ 表示 $N$ 阶零矩阵. 不难证明, 方程组 (26) 有如表 1 所列的特解.

对于未约化的 NLS 方程族 (13), 由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其任意相似矩阵引出的解是一致的, 所以只需考虑与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的标准型相对应的列向量 $\varphi$ 和 $\psi$.

表 1 矩阵方程 (26) 的解

Table 1. Solutions to matrix equation (26).

| No. | $(\sigma,\delta)$ | $\boldsymbol{T}$ | $\boldsymbol{A}$ |
|---|---|---|---|
| 1) | $(1,-1)$ | $T_1=T_4=(\boldsymbol{0})_N,\ T_3=-T_2=\boldsymbol{I}_N$ | $K_1=-K_4^{*}=\boldsymbol{K}_N\in\mathbb{C}_{N\times N}$ |
| 2) | $(1,1)$ | $T_1=T_4=(\boldsymbol{0})_N,\ T_3=T_2=\boldsymbol{I}_N$ | $K_1=-K_4^{*}=\boldsymbol{K}_N\in\mathbb{C}_{N\times N}$ |
| 3) | $(-1,-1)$ | $T_1=T_4=(\boldsymbol{0})_N,\ T_3=T_2=\boldsymbol{I}_N$ | $K_1=K_4^{*}=\boldsymbol{K}_N\in\mathbb{C}_{N\times N}$ |
| 4) | $(-1,1)$ | $T_1=T_4=(\boldsymbol{0})_N,\ T_3=-T_2=\boldsymbol{I}_N$ | $K_1=K_4^{*}=\boldsymbol{K}_N\in\mathbb{C}_{N\times N}$ |
| 5) | $(-1,-1)$ | $T_1=-T_4=\boldsymbol{I}_N,\ T_2=T_3=(\boldsymbol{0})_N$ | $K_1=\boldsymbol{K}_N\in\mathbb{R}_{N\times N},\ K_4=-\boldsymbol{H}_N\in\mathbb{R}_{N\times N}$ |

对于表 1 中的情况 1)—4), 当 $\boldsymbol{K}_N$ 为对角阵时, 形如:

$$\boldsymbol{K}_N = \mathrm{Diag}(k_1, k_2, \cdots, k_N), \quad k_i \in \mathbb{C},$$

可得

$$\begin{aligned}\varphi =& \big(c_1 \mathrm{e}^{\theta(k_1)}, c_2 \mathrm{e}^{\theta(k_2)}, \cdots, c_N \mathrm{e}^{\theta(k_N)}, d_1 \mathrm{e}^{\theta(-\sigma k_1^*)},\\ & d_2 \mathrm{e}^{\theta(-\sigma k_2^*)}, \cdots, d_N e^{\theta(-\sigma k_N^*)}\big)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中, $c_i \in \mathbb{C}$,

$$\theta(k_l) = \frac{1}{2} k_l x + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_l^{2j} t_{2j}. \tag{32}$$

当 $\boldsymbol{K}_N$ 为 Jordan 矩阵, 即

$$\boldsymbol{K}_N = J_N[k] \doteq \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k \end{pmatrix}_N, \tag{33}$$

其中 $k \in \mathbb{C}$, 可得

$$\begin{aligned}\varphi =& \bigg( c\mathrm{e}^{\theta(k)}, \frac{\partial_k}{1!}(c\mathrm{e}^{\theta(k)}), \cdots, \frac{\partial_k^{N-1}}{(N-1)!}(c\mathrm{e}^{\theta(k)}),\\ & d\mathrm{e}^{\theta(-\sigma k^*)}, \frac{\partial_{k^*}}{1!}(d\mathrm{e}^{\theta(-\sigma k^*)}), \cdots,\\ & \frac{\partial_{k^*}^{N-1}}{(N-1)!}(d\mathrm{e}^{\theta(-\sigma k^*)}) \bigg)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中 $c, d \in \mathbb{C}$.

对于表 1 中的情形 5), $\boldsymbol{K}_N, \boldsymbol{H}_N \in \mathbb{R}_{N\times N}$, 当

$$\boldsymbol{K}_N = \mathrm{Diag}(k_1, k_2, \cdots, k_N),$$
$$\boldsymbol{H}_N = \mathrm{Diag}(h_1, h_2, \cdots, h_N), \quad k_i, h_i \in \mathbb{R},$$

可得

$$\begin{aligned}\varphi =& \Big( c_1 e^{\theta(k_1)}, c_2 \mathrm{e}^{\theta(k_2)}, \cdots, c_N \mathrm{e}^{\theta(k_N)},\\ & d_1 \mathrm{e}^{\theta(-h_1)}, d_2 \mathrm{e}^{\theta(-h_2)}, \cdots, d_N \mathrm{e}^{\theta(-h_N)} \Big)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中$c_i, d_i \in \mathbb{C}$, $\theta(k)$ 定义如 (32) 式; 当 $\boldsymbol{K}_N = J_N[k]$, $\boldsymbol{H}_N = J_N[h]$ 时, 可得

$$\begin{aligned}\varphi =& \bigg( c e^{\theta(k)}, \frac{\partial_k}{1!}(c\mathrm{e}^{\theta(k)}), \cdots, \frac{\partial_k^{N-1}}{(N-1)!}(c\mathrm{e}^{\theta(k)}),\\ & d\mathrm{e}^{\theta(-h)}, \frac{\partial_h}{1!}(d\mathrm{e}^{\theta(-h)}), \cdots, \frac{\partial_h^{N-1}}{(N-1)!}(d\mathrm{e}^{\theta(-h)}) \bigg)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中, $c, d \in \mathbb{C}$, $h, k \in \mathbb{R}$, $\theta(k)$定义如 (32) 式. 当然, 当$\boldsymbol{K}_N$ 与$\boldsymbol{H}_N$之中一个为对角阵另一个为 Jordan 矩阵时, 对应的列向量 $\varphi$ 和 $\psi$ 也可以相应给出.

本节已经展示了双线性约化方法在求解经典和逆空间 NLS 方程族中的应用. 这一方法还可以应用于逆时间、逆时空、具有时空平移的非局部 NLS 方程族和修正 KdV(mKdV) 方程族的求解. 这些都是与 AKNS 方程族相关的应用. 更多的结果, 包括解的动力学特点等, 可以参考文献 [1, 18].

## 4 半离散 NLS 方程

本节介绍以半离散 NLS 方程为例展示双线性约化方法在求解微分-差分方程中的应用.

### 4.1 经典和非局部半离散 NLS 方程

经典的半离散 NLS 方程

$$\mathrm{i}Q_{n,t} = (Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n) + Q_n Q_n^*(Q_{n+1} + Q_{n-1}), \tag{34}$$

联系于 Ablowitz-Ladik (AL) 谱问题[32]:

$$\varTheta_{n+1} = M_n \varTheta_n, \ M_n = \begin{pmatrix} \lambda & Q_n \\ R_n & 1/\lambda \end{pmatrix}, \ \varTheta_n = \begin{pmatrix} \theta_{1,n} \\ \theta_{2,n} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

其中, $Q_n = Q(n,t)$以及 $R_n = R(n,t)$是定义在 $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$上的函数, $\lambda$ 是谱参数, $(\theta_{1,n}, \theta_{2,n})$ 是波函数. 联系于半离散 NLS 方程 (34) 的 (未约化) 耦合系统为

$$\mathrm{i}Q_{n,t} = Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n - Q_n R_n (Q_{n+1} + Q_{n-1}), \tag{36a}$$

$$\mathrm{i}R_{n,t} = -(R_{n+1} + R_{n-1} - 2R_n) + Q_n R_n (R_{n+1} + R_{n-1}). \tag{36b}$$

除了方程 (34) 以外, 上述耦合系统还允许有如下约化[4]:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}Q_{n,t} =& (Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n)\\ & - \delta Q_n Q_n^*(Q_{n+1} + Q_{n-1}),\\ R_n =& \delta Q_n^*,\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}Q_{n,t} =& (Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n)\\ & - \delta Q_n Q_{-n}^*(Q_{n+1} + Q_{n-1}),\\ R_n =& \delta Q_{-n}^*,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}Q_{n,t} =& (Q_{n+1} + Q_{n-1} - 2Q_n)\\ & - \delta Q_n Q_n(-t)(Q_{n+1} + Q_{n-1}),\\ R_n =& \delta Q_n(-t),\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}Q_{n,t} &= (Q_{n+1}+Q_{n-1}-2Q_n)\\ &\quad -\delta Q_n Q_{-n}(-t)(Q_{n+1}+Q_{n-1}),\\ R_n &= \delta Q_{-n}(-t).\end{aligned} \tag{40}$$

在这些方程中, $\delta=\pm1$, $Q_{-n}=Q(-n,t)$, $Q_n(-t)=Q(n,-t)$, $Q_{-n}(-t)=Q(-n,-t)$, 后 3 个方程分别称为逆空间、逆时间、逆时空的半离散 NLS 方程.

## 4.2 双线性约化方法

将先求解未约化的耦合系统 (36), 给出双线性形式和双 Casoratian 解, 然后再考虑约化.

### 4.2.1 耦合系统 (36) 的解

在变换

$$Q_n=\frac{g_n}{f_n},\quad R_n=\frac{h_n}{f_n} \tag{41}$$

之下, 可以将 (36) 式双线性化为

$$\mathrm{i}D_t g_n\cdot f_n = g_{n+1}f_{n-1}+g_{n-1}f_{n+1}-2g_nf_n, \tag{42a}$$

$$\mathrm{i}D_t f_n\cdot h_n = f_{n+1}h_{n-1}+f_{n-1}h_{n+1}-2f_nh_n, \tag{42b}$$

$$f_n^2-f_{n-1}f_{n+1}=g_nh_n, \tag{42c}$$

其中, $D_t$ 是 Hirota 双线性算子, 定义如 (4) 式.

引入“双跳步” 的双 Casoratian

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cas}^{(m+1,p+1)}(\varPhi_n,\varPsi_n)\\ &=|\varPhi_n,E^2\varPhi_n,\cdots,E^{2m}\varPhi_n;\varPsi_n,E^2\varPsi_n,\cdots,E^{2p}\varPsi_n|\\ &=|\widehat{\varPhi_n^{(m)}};\widehat{\varPsi_n^{(p)}}|\\ &=|0,1,2,\cdots,m;0,1,2,\cdots,p|=|\widehat{m};\widehat{p}|,\end{aligned} \tag{43}$$

式中, $\varPhi_n$ 和 $\varPsi_n$ 是 $(m+p+2)$ 维列向量:

$$\varPhi_n=(\phi_{1,n},\phi_{2,n},\cdots,\phi_{m+p+2,n})^{\mathrm{T}},$$

$$\varPsi_n=(\psi_{1,n},\psi_{2,n},\cdots,\psi_{m+p+2,n})^{\mathrm{T}},$$

其元素 $\phi_{j,n}=\phi_j(n,t)$ 和 $\psi_{j,n}=\psi_j(n,t)$ 是定义在 $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ 上的函数, 算子 $\boldsymbol{E}$ 是关于 $n$ 的平移算子, 定义如 $E^jf_n=f_{n+j}$. 但上述双 Casoratian是“双跳步” 的, 不同于 (10) 式中定义的标准形式.

接下来将给出 (42) 式的解.

**定理 4** 双线性方程组 (42) 有定义如 (43) 式的双 Casoratian 解:

$$f_n=|\widehat{m};\widehat{p}|,\quad g_n=|\widehat{m+1};\widehat{p-1}|,$$

$$h_n=-|\widehat{m-1};\widehat{p+1}|. \tag{44}$$

其中列向量 $\varPhi_n$ 和 $\varPsi_n$ 满足:

$$\boldsymbol{E}\varPhi_n=\boldsymbol{A}\varPhi_n,\quad \mathrm{i}\varPhi_{n,t}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2-2+\boldsymbol{E}^{-2})\varPhi_n, \tag{45a}$$

$$\boldsymbol{E}^{-1}\varPsi_n=\boldsymbol{A}\varPsi_n,\quad \mathrm{i}\varPsi_{n,t}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2-2+\boldsymbol{E}^{-2})\varPsi_n, \tag{45b}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 是 $(m+p+2)\times(m+p+2)$可逆复矩阵, 与 $n$ 和 $t$ 无关. $\boldsymbol{A}$ 及其任意相似矩阵引出相同的形如 (41) 式的$Q_n$和$R_n$.

该定理的证明可以参考文献 [6]. 满足条件 (45) 式的列向量$\varPhi_n$ 和$\varPsi_n$可以取为

$$\varPhi_n=\boldsymbol{A}^n\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{I}_{m+p+2}+\boldsymbol{A}^{-2})t}C,$$

$$\varPsi_n=\boldsymbol{A}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{I}_{m+p+2}+\boldsymbol{A}^{-2})t}D, \tag{46}$$

其中, $C,D\in\mathbb{C}_{m+p+2}$.

### 4.2.2 约化到经典半离散 NLS 方程 (37)

首先对列向量 $\varPhi_n$ 和 $\varPsi_n$施以约束 $p=m$, 即考虑:

$$\varPhi_n=\boldsymbol{A}^n\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}+A^{-2})t}C, \tag{47a}$$

$$\varPsi_n=\boldsymbol{A}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}+\boldsymbol{A}^{-2})t}D, \tag{47b}$$

其中, $C,D\in\mathbb{C}_{2m+2}$. 关于经典半离散 NLS 方程 (37) 的解, 首先给出结论, 再进行详细证明.

**定理 5** 经典半离散 NLS 方程 (37) 有解:

$$Q_n=\frac{g_n}{f_n},\quad f_n=|\widehat{m};\widehat{m}|,\quad g_n=|\widehat{m+1};\widehat{m-1}|, \tag{48}$$

其中$\varPhi_n$定义见 (47a):

$$\varPsi_n=\boldsymbol{T}\varPhi_n^*, \tag{49}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 满足方程:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*=0, \tag{50a}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*=\delta\boldsymbol{I}_{2(m+1)},\quad \delta=\pm1. \tag{50b}$$

$\varPhi_n$ 可以等价表示为 ($\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}_{(2m+2)\times(2m+2)}$)

$$\varPhi_n=\mathrm{e}^{n\boldsymbol{B}-\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{2B}-2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}+\mathrm{e}^{-2B})t}C, \tag{51}$$

相应于 (50) 式的约束条件是

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}^*=0,\quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*=\delta\boldsymbol{I}_{2(m+1)}. \tag{52}$$

**证明** 在条件 (50a) 以及 $D=\boldsymbol{T}C^*$之下, 可见

$$\begin{aligned}\varPsi_n&=\boldsymbol{A}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}+\boldsymbol{A}^{-2})t}D\\ &=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}^{-1})^n\\ &\quad\times\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}((\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}^{-1})^2-2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}+(\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}^{-1})^{-2})t}\boldsymbol{T}C^*\\ &=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^{*2}-2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}+\boldsymbol{A}^{*-2})t}C^*\\ &=\boldsymbol{T}\varPhi_n^*,\end{aligned}$$

即 (49) 式. 由此可以将 (44) 式中的双 Casoratian 写为 (参考 (43) 式)

$$f_n = |\widehat{\Phi_n^{(m)}};\widehat{\Psi_n^{(m)}}| = |\widehat{\Phi_n^{(m)}};\widehat{\boldsymbol{T}\Phi_n^{*(m)}}|, \tag{53a}$$

$$g_n = |\widehat{\Phi_n^{(m+1)}};\widehat{\Psi_n^{(m-1)}}| = |\widehat{\Phi_n^{(m+1)}};\widehat{\boldsymbol{T}\Phi_n^{*(m-1)}}|, \tag{53b}$$

$$h_n = -|\widehat{\Phi_n^{(m-1)}};\widehat{\Psi_n^{(m+1)}}| = -|\widehat{\Phi_n^{(m-1)}};\widehat{\boldsymbol{T}\Phi_n^{*(m+1)}}|. \tag{53c}$$

在另一约束条件 (50b) 式之下, 可得

$$\begin{aligned} f_n &= |\widehat{\Phi_n^{(m)}};\widehat{\boldsymbol{T}\Phi_n^{*(m)}}| = |\boldsymbol{T}||\widehat{\delta\boldsymbol{T}^*\Phi_n^{(m)}};\widehat{\Phi_n^{*(m)}}| \\ &= (-\delta)^{m+1}|\boldsymbol{T}||\widehat{\Phi_n^{*(m)}};\widehat{\boldsymbol{T}^*\Phi_n^{(m)}}| \\ &= (-\delta)^{m+1}|\boldsymbol{T}||\widehat{\Phi_n^{(m)}};\widehat{\boldsymbol{T}\Phi_n^{*(m)}}|^* \\ &= (-\delta)^{m+1}|\boldsymbol{T}|f_n^*. \end{aligned}$$

在上式中, 先后经历了提出矩阵 $\boldsymbol{T}$, 利用条件 (50b) 式, 以及将后 $(m+1)$列逐列移到前 $(m+1)$ 列的过程.

类似可得 $h_n = -(-\delta)^m|T|g_n^*$. 于是有

$$\frac{R_n}{Q_n^*} = \frac{h_n/f_n}{g_n^*/f_n^*} = \frac{h_n}{g_n^*}\cdot\frac{f_n^*}{f_n} = \delta, \tag{54}$$

即 $R_n = \delta Q_n^*$.

需要说明的是, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 满足的矩阵方程 (52) 与方程 (26) (取 $\sigma=1$) 一致, 因此它的解可以参照表 1 的情形 1) 和 2), 进一步不难给出 (51) 式的显式形式. 此处不再赘述.

### 4.2.3 约化到逆空间半离散 NLS 方程 (38)

对于空间离散下的逆空间非局部 NLS 方程, 实现解的约化需要特殊处理. 仍然先列出结论, 然后给出详细证明.

**定理 6** 逆空间半离散 NLS 方程 (38) 有解:

$$Q_n = \frac{g_n}{f_n},\quad f_n = |\widehat{\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n^{(m)}};\ \widehat{\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^{*(-m)}}|,$$

$$g_n = |\widehat{\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n^{(m+1)}};\ \widehat{\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^{*(-m+1)}}|, \tag{55}$$

其中, $\boldsymbol{\Phi}_n$ 定义如 (47a) 式或等价形式 (51) 式, 符号 $\widehat{\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^{*(-m)}}$ 为矩阵 $(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^*, \boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^*, \cdots, \boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^*)$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^* = 0, \tag{56a}$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^* = -\delta|\boldsymbol{A}^*|^2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}, \tag{56b}$$

对于 $\boldsymbol{B}$, 有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}^* = 0,\quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^* = -\delta|\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}^*}|^2\boldsymbol{I}_{2(m+1)}. \tag{57}$$

**证明**. 对于非局部逆空间半离散 NLS 方程 (38), 由于 Casoratian 向量 (47) 式中 $C$ 和 $D$ 都是任意的, 分别以 $\boldsymbol{A}^{-m}C$ 和 $\boldsymbol{A}^mD$ 替换 $C$ 和 $D$, 则下述双 Casoratian:

$$\begin{aligned} f_n &= |\widehat{\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n^{(m)}};\ \widehat{\boldsymbol{A}^m\Phi_n^{(m)}}|, \\ g_n &= |\widehat{\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n^{(m+1)}};\ \widehat{\boldsymbol{A}^m\Phi_n^{(m-1)}}|, \\ h_n &= -|\widehat{\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n^{(m-1)}};\ \widehat{\boldsymbol{A}^m\Phi_n^{(m+1)}}|, \end{aligned} \tag{58}$$

仍然是双线性方程 (42) 的解. 注意在上式中两个列向量 $\Phi_n$ 和 $\Psi_n$ 仍然定义为 (47) 式中的形式. 现在对这两个列向量施以约束:

$$D = \boldsymbol{T}C^*$$

以及 (56a) 式, 可见

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \boldsymbol{A}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{I}_{2(m+1)} + \boldsymbol{A}^{-2})t}D \\ &= (\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}^{-1})^{-n} \\ &\quad\times \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}((\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}^{-1})^2 - 2\boldsymbol{I}_{2(m+1)} + (\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}^{-1})^{-2})t}\boldsymbol{T}C^* \\ &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*-n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{A}^{*2} - 2\mathbf{I}_{2(m+1)} + \boldsymbol{A}^{*-2})t}C^* \\ &= \boldsymbol{A}\Phi_{-n}^*. \end{aligned}$$

利用这一结果, 可以将 (58) 式中的 $f_n$ 改写为

$$\begin{aligned} f_n = |&\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n, \boldsymbol{A}^{-m+2}\Phi_n, \cdots, \boldsymbol{A}^m\Phi_n; \\ &\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^*, \boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^*, \cdots, \boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{T}\Phi_{-n}^*|. \end{aligned} \tag{59}$$

利用 (56a) 式有 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*m}$, 于是进一步有

$$\begin{aligned} f_n &= |\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n, \boldsymbol{A}^{-m+2}\Phi_n, \cdots, \boldsymbol{A}^m\Phi_n; \\ &\qquad \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*m}\Phi_{-n}^*, \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*m-2}\Phi_{-n}^*, \cdots, \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*-m}\Phi_{-n}^*| \\ &= (-\delta|\boldsymbol{A}^*|^{-2})^{m+1}|\boldsymbol{T}||\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{A}^{-m}\Phi_n, \\ &\qquad \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{A}^{-m+2}\Phi_n, \cdots, \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{A}^m\Phi_n; \\ &\qquad \boldsymbol{A}^{*m}\Phi_{-n}^*, \boldsymbol{A}^{*m-2}\Phi_{-n}^*, \cdots, \boldsymbol{A}^{*-m}\Phi_{-n}^*|. \end{aligned}$$

这里从第 1 行中提出了矩阵 $\boldsymbol{T}$, 并且利用了 (56b) 式. 进一步, 将上式中后 $(m+1)$列逐列移至前 $(m+1)$列, 得到

$$\begin{aligned} f_n = (\delta|\boldsymbol{A}^*|^{-2})^{m+1}|\boldsymbol{T}||&\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\Phi}_{-n}, \\ &\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{\Phi}_{-n}, \cdots, \boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{\Phi}_{-n}; \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*-m}\boldsymbol{\Phi}_n^*, \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*-m+2}\boldsymbol{\Phi}_n^*, \cdots, \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*m}\boldsymbol{\Phi}_n^*|^*. \end{aligned}$$

再利用由 (56a) 式得到的 $\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{*-m}$, 可得

$$
\begin{aligned}
f_n = {} & (\delta|\boldsymbol{A}^*|^{-2})^{m+1}|\boldsymbol{T}||\boldsymbol{A}^m\varPhi_{-n},\\
& \boldsymbol{A}^{m-2}\varPhi_{-n},\cdots,\boldsymbol{A}^{-m}\varPhi_{-n};\\
& \boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{T}\varPhi_n^*,\boldsymbol{A}^{-m+2}\boldsymbol{T}\varPhi_n^*,\cdots,\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\varPhi_n^*|^*.
\end{aligned}
$$

最后, 对于前$m+1$列, 做逆序置换, 即将$(1,\ 2,\cdots,\ m,\ m+1)$列置换到$(m+1,\ m,\ \cdots,\ 2,\ 1)$列的位置; 同样对后$m+1$列也做逆序置换, 可得

$$
\begin{aligned}
f_n = {} & (\delta|\boldsymbol{A}^*|^{-2})^{m+1}|\boldsymbol{T}||\boldsymbol{A}^{-m}\varPhi_{-n},\boldsymbol{A}^{-m+2}\varPhi_{-n},\cdots,\\
& \boldsymbol{A}^m\varPhi_{-n};\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}\varPhi_n^*,\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{T}\varPhi_n^*,\cdots,\boldsymbol{A}^{-m}\boldsymbol{T}\varPhi i_n^*|^*\\
= {} & (\delta|\boldsymbol{A}^*|^{-2})^{m+1}|\boldsymbol{T}|f_{-n}^*.
\end{aligned}
$$

上述过程可见, 在处理双 Casoratian 的非局部约化时, 与经典的约化情况在细节上有许多不同. 类似操作可以得到

$$h_n = \delta^m|\boldsymbol{A}^*|^{-2(m+1)}|\boldsymbol{T}|g_{-n}^*.$$

由此有 $R_n/Q_{-n}^* = \delta$, 从而得到半离散非局部 NLS 方程 (38) 的解 (55) 式.

矩阵方程 (57) 的解, 可取形如:

$$
\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{m+1} & (\boldsymbol{0})_{m+1} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{m}+1} & \boldsymbol{K}_{m+1}^* \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{T} = |\mathrm{e}^B|\begin{pmatrix} (\boldsymbol{0})_{m+1} & \boldsymbol{I}_{m+1} \\ -\delta\boldsymbol{I}_{m+1} & (\boldsymbol{0})_{m+1} \end{pmatrix},
$$

其中 $\boldsymbol{K}_{m+1}\in\mathbb{C}_{(m+1)\times(m+1)}$ 为常数矩阵. 具体的 $\varPhi_n$ 的形式可以根据 $\boldsymbol{K}_{m+1}$的标准型给出. 此外, 类似的约化处理可以得到逆时间和逆时空的半离散 NLS 方程 (39) 和方程 (40) 的解. 具体细节可以参考文献 [6, 18].

## 5 Fokas-Lenells 方程

### 5.1 Mikhailov 方程

Fokas-Lenells (FL) 方程

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i}u_t - \nu u_{tx} + \gamma u_{xx} + \sigma|u|^2(u+\mathrm{i}\nu u_x) = 0,\\
& \sigma = \pm1, \quad \gamma,\nu\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

由 Fokas[33] 在 1995 年利用 NLS 方程的双 Hamilton 结构构造而得; 2009 年 Fokas 和 Lenells[34] 给出这一方程的可积性 (Lax 对), 建立了此方程与 Kaup-Newell(KN) 谱问题之间的联系; 同年, Lenells[35] 给出该方程的光学背景, 并通过一系列变换将其改写成

$$u_{xt} + u - 2\mathrm{i}\delta|u|^2u_x = 0,\ \ \delta=\pm1, \tag{61}$$

并且给出 Lax 对. 该 Lax 对表明方程 (61) 为 KN 方程族的负一阶方程的势形式. 所指的 FL 方程即为方程 (61). 此方程可以从耦合系统

$$u_{xt} + u - 2\mathrm{i}uvu_x = 0, \tag{62a}$$

$$v_{xt} + v + 2\mathrm{i}uvv_x = 0, \tag{62b}$$

通过约化

$$v = \delta u^* \tag{63}$$

得到. 上述耦合系统也称为 Mikhailov 方程[36], 由 Mikhailov 在 20 世纪 70 年代研究有质量的 Thirring 模型时得到. 关于 FL 方程、Mikhailov方程、有质量的 Thirring 模型和 KN 谱问题之间的联系可以参考文献 [16] 的附录 1 以及其引用的文献. 如果采用非局部约化

$$v(x,t) = \delta u(-x,-t), \tag{64}$$

从耦合系统 (62) 可得非局部的 FL 方程

$$u_{xt} + u - 2\mathrm{i}\delta uu(-x,-t)u_x = 0,\ \ \delta=\pm1. \tag{65}$$

应用双线性约化方法, 将首先求解约化前的耦合系统 (62), 然后通过约化得到方程 (61) 和方程 (65) 的解. 通过变换

$$u = \frac{g}{f},\quad v = \frac{h}{s}. \tag{66}$$

Mikhailov 方程 (62) 可以化为双线性形式[16]:

$$D_xD_t\, g\cdot f + gf = 0, \tag{67a}$$

$$D_xD_t\, h\cdot s + hs = 0, \tag{67b}$$

$$D_xD_t\, f\cdot s + \mathrm{i}D_x\, g\cdot h = 0, \tag{67c}$$

$$D_t\, f\cdot s + \mathrm{i}gh = 0, \tag{67d}$$

其中 $D$ 为 Hirota 双线性算子, 定义如 (4) 式. 在此节中, 生成双 Wronskian 的列向量为

$$\phi = (\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{N+M})^{\mathrm{T}},\quad \psi = (\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{N+M})^{\mathrm{T}},$$

标准形式的双 Wronskian 可以表示为

$$
\begin{aligned}
W(\phi;\psi) &= |0,1,\cdots,N-1;0,1,\cdots,M-1|\\
&= |\widehat{N-1};\widehat{M-1}|.
\end{aligned}
$$

求解方程 (67), 还需要如下形式的双 Wronskian:

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{N};\widehat{M-1}| = |1,2,\cdots,N;0,1,\cdots,M-1|,\\
&|\widehat{N};\widetilde{M-1}| = |0,1,\cdots,N;1,2,\cdots,M-1|,\\
&|\widetilde{N};\widehat{M}| = |2,3,\cdots,N;0,1,\cdots,M|,\\
&|\widetilde{N};\widetilde{M}| = |1,2,\cdots,N;1,2,\cdots,M|.
\end{aligned}
$$

双线性形式 (67) 具有如下形式的双 Wronskian 解.

**定理 7** 双线性方程组 (67) 有解[16]:

$$f=|\widetilde{N};\widehat{M-1}|,\quad g=|\widehat{N};\widetilde{M-1}|,$$

$$h=-\frac{\mathrm{i}}{2}|\widetilde{N};\widehat{M}|,\quad s=|\widehat{N};\widetilde{M}|,\tag{68}$$

其中列向量 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 满足:

$$\phi_x=\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\phi},\quad \phi_t=-\frac{1}{4}\partial_x^{-1}\boldsymbol{\phi},\tag{69a}$$

$$\psi_x=-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\psi},\quad \psi_t=-\frac{1}{4}\partial_x^{-1}\boldsymbol{\psi},\tag{69b}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{C}_{(N+M)\times(N+M)}$ 中任意矩阵. $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 显式形式可以写为

$$\boldsymbol{\phi}=\exp\Big(\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{A}^2x+\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{A}^{-2}t\Big)C,\tag{70a}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{A}^2x-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{A}^{-2}t\Big)B,\tag{70b}$$

其中, $B$ 和 $C$ 是与 $(x,t)$ 无关的 $(N+M)$ 阶列向量. 在变换 (66) 式之下, 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其任意相似矩阵引出同样的 $u$ 和 $v$.

## 5.2 解的约化

### 5.2.1 约化到 FL 方程 (61)

从约化前的耦合系统 (62) 的解到 FL 方程 (61) 的解, 需取 $M=N$, $B=\boldsymbol{S}C^*$, 并且要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{S}$(都属于 $\mathbb{C}_{2N\times 2N}$) 满足:

$$\boldsymbol{A}^2=\delta\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^*,\quad \delta=\pm1.\tag{71}$$

类似于第 3 节中 NLS 方程的情况, 不难验证:

$$\psi=\boldsymbol{S}\phi^*$$

以及

$$f^*=(2\mathrm{i})^N\delta^N|S|^{-1}s,\quad g^*=(2\mathrm{i})^N\delta^{N-1}|S|^{-1}h,$$

从而在变换 (66) 式之下成立 $v(x,t)=\delta u^*(x,t)$, 即约化关系 (63) 式. 此时有

$$u(x,t)=\frac{|\widehat{N};\widetilde{N-1}|}{|\widetilde{N};\widehat{N-1}|},\tag{72}$$

其中, $\phi$ 定义如 (70a) 式, $\psi=\boldsymbol{S}\phi^*$. 具体细节可以参考文献 [16].

### 5.2.2 约化到非局部 FL 方程 (65)

对于非局部 FL 方程 (65), 需取 $M=N$, $B=\boldsymbol{S}C$, 并且要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^2=\delta\boldsymbol{S}\boldsymbol{S},\quad \delta=\pm1.\tag{73}$$

此时有

$$\psi(x,t)=\boldsymbol{S}\phi(-x,-t)$$

以及

$$f(-x,-t)=(-2\mathrm{i})^N\delta^N|\boldsymbol{S}|^{-1}s(x,t),$$

$$g(-x,-t)=(-2\mathrm{i})^N\delta^{N-1}|\boldsymbol{S}|^{-1}h(x,t),$$

从而成立 $v(x,t)=\delta u(-x,-t)$, 即约化关系 (64) 式. 此时方程 (65) 的解也可以表示为 (72) 式的形式, 其中, $\phi$ 定义如 (70a) 式, 但是 $\psi(x,t)=\boldsymbol{S}\phi(-x,-t)$. 具体细节可以参考文献 [16].

### 5.2.3 矩阵方程 (71) 和方程 (73) 的解

关于方程 (71) 的求解, 可取变换:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\tag{74}$$

其中 $\boldsymbol{T}\in\mathbb{C}_{2N\times 2N}$. 此时, 求解方程 (71) 可以转化为求解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^*=0,\quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*=\delta\boldsymbol{I}_{2N}.\tag{75}$$

此即为方程 (26) ($\sigma=-1$ 并替换 $\delta$ 为 $-\delta$), 其解可以参考表 1.

关于方程 (73) 的解, 也可以利用变换 (74) 式, 转化为求解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}=0,\quad \boldsymbol{T}^2=\delta\boldsymbol{I}_{2N}.\tag{76}$$

其解可设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 具有分块矩阵形式 (31) 式, 并取

$$\boldsymbol{T}_1=-\boldsymbol{T}_4=\sqrt{\delta}\,\boldsymbol{I}_N,\ \boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_3=(\boldsymbol{0})_N,$$

$$\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{K}_N\in\mathbb{C}_{N\times N},\ \boldsymbol{K}_4=\boldsymbol{H}_N\in\mathbb{C}_{N\times N}.\tag{77}$$

除了引入变换 (74) 式以外, 矩阵方程 (71) 和方程 (73) 还能直接求解. 引入实下三角 Toeplitz 矩阵[22,37,38]:

$$\mathcal{T}_N[a_{1,j}]=\begin{pmatrix}a_{1,1}&0&0&\cdots&0\\ a_{1,2}&a_{1,1}&0&\cdots&0\\ a_{1,3}&a_{1,2}&a_{1,1}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1,N}&a_{1,N-1}&a_{1,N-2}&\cdots&a_{1,1}\end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$a_{1,j}\in\mathbb{R}.\tag{78}$$

同阶此类矩阵按矩阵乘法构成封闭的可交换集合. 矩阵方程 (71) 和方程 (73) 有解:

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{Diag}(\mathcal{T}_{N_1}[a_{N_1,j}],\mathcal{T}_{N_2}[a_{N_2,j}],\cdots,\mathcal{T}_{N_k}[a_{N_k,j}]),\tag{79a}$$

$$\boldsymbol{S}=\sqrt{\delta}\mathrm{Diag}(\varepsilon_1\mathcal{T}_{N_1}[a_{N_1,j}],$$

$$\varepsilon_2\mathcal{T}_{N_2}[a_{N_2,j}],\cdots,\varepsilon_k\mathcal{T}_{N_k}[a_{N_k,j}]),\tag{79b}$$

其中 $\sum_{i=1}^{k}N_i=2N$, $\varepsilon_i=\pm1$. 除了 FL 方程以外,

导数 NLS 方程也有类似的解[14]. 这种解可以引出方程的代数孤子解[14,17].

## 6 非零背景的 NLS 方程

非零背景下的 NLS 方程 (1) 存在时间和空间方向的呼吸子解和怪波解等, 这些解也可以通过双线性约化方法得到.

考虑约化前的耦合方程组 (2), 并设 $(q_0, r_0)$ 是方程组 (2) 的一组解. 通过变换

$$q = q_0 + \frac{g}{f}, \quad r = r_0 + \frac{h}{f}, \tag{80}$$

耦合方程组 (2) 可以被双线性化为[21]

$$D_x^2 f \cdot f = -2gh - 2q_0 hf - 2r_0 gf, \tag{81a}$$

$$(D_x^2 - \mathrm{i}D_t - 2q_0 r_0)g \cdot f + q_0 D_x^2 f \cdot f = 0, \tag{81b}$$

$$(D_x^2 + \mathrm{i}D_t - 2q_0 r_0)h \cdot f + r_0 D_x^2 f \cdot f = 0, \tag{81c}$$

其中, $D$ 为 Hirota 双线性算子, 定义如 (4) 式. 注意, 当 $q_0 = r_0 = 0$ 时, 上述双线性方程组退化到零背景情形 (19) 式. 设 $\phi$ 和 $\psi$ 为 $2(m+1)$ 维列向量, 引入拟双 Wronskian:

$$\begin{aligned} f = &|\phi, \boldsymbol{A}\phi, \boldsymbol{A}^2\phi, \cdots, \boldsymbol{A}^m\phi;\ \psi, (-\boldsymbol{A})\psi, (-\boldsymbol{A})^2\psi, \\ &\cdots, (-\boldsymbol{A})^m\psi| = |\widehat{\phi}_m; \widehat{\psi}_m|, \end{aligned} \tag{82a}$$

$$\begin{aligned} g = 2&|\phi, \boldsymbol{A}\phi, \boldsymbol{A}^2\phi, \cdots, \boldsymbol{A}^{m+1}\phi;\ \psi, (-\boldsymbol{A})\psi, (-\boldsymbol{A})^2\psi, \\ &\cdots, (-\boldsymbol{A})^{m-1}\psi| = |\widehat{\phi}_{m+1}; \widehat{\psi}_{m-1}|, \end{aligned} \tag{82b}$$

$$\begin{aligned} h = &-2|\phi, \boldsymbol{A}\phi, \boldsymbol{A}^2\phi, \cdots, \boldsymbol{A}^{m-1}\phi; \\ &\psi, (-\boldsymbol{A})\psi, (-\boldsymbol{A})^2\psi, \cdots, (-\boldsymbol{A})^{m+1}\psi| = |\widehat{\phi}_{m-1}; \widehat{\psi}_{m+1}|, \end{aligned} \tag{82c}$$

其中, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_{2(m+1)\times 2(m+1)}$. 可以证明, 双线性方程组 (81) 有如下解.

**定理 8**[21] 双线性方程组 (81) 有形如 (82) 式的解, 其中 $\phi$ 和 $\psi$ 满足方程:

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}_x = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & q_0 I_{2m+2}\\ r_0 I_{2m+2} & -\boldsymbol{A}\end{pmatrix}, \tag{83}$$

$$\mathrm{i}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}_t = \boldsymbol{N}\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix}2\boldsymbol{A}^2 - q_0 r_0 I_{2m+2} & 2\boldsymbol{A}q_0 + q_{0,x} I_{2m+2}\\ 2\boldsymbol{A}r_0 - r_{0,x} I_{2m+2} & -2\boldsymbol{A}^2 + q_0 r_0 I_{2m+2}\end{pmatrix}, \tag{84}$$

式中 $(q_0, r_0)$ 为耦合系统 (2) 的一组解. 此外, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的任意相似矩阵在变换 (80) 式之下引出耦合系统 (2) 相同的解.

耦合系统 (2) 的上述拟双 Wronskian 解可以约化到经典和非局部的 NLS 方程的解. 可以证明 (参见文献 [21]).

**定理 9** 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是 $\mathbb{C}_{(2m+2)\times(2m+2)}$ 中的矩阵.

1) 经典 NLS 方程 (1) 有解:

$$q = q_0 + \frac{g}{f}, \tag{85a}$$

$$f = |\widehat{\phi}_m; \boldsymbol{T}\widehat{\phi}_m^*|, \quad g = 2|\widehat{\phi}_{m+1}; \boldsymbol{T}\widehat{\phi}_{m-1}^*|, \tag{85b}$$

其中 $(q_0, r_0)$ 满足方程组 (2) 且 $r_0^* = \delta q_0$, 向量 $\phi$ 满足矩阵方程:

$$\phi_x = \boldsymbol{A}\phi + q_0 \boldsymbol{T}\phi^*, \tag{86a}$$

$$\mathrm{i}\phi_t = (2\boldsymbol{A}^2 - \delta q_0 q_0^* I_{2m+2})\phi + (2\boldsymbol{A}q_0 + q_{0x} I_{2m+2})\boldsymbol{T}\phi^*, \tag{86b}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 满足条件:

$$\boldsymbol{AT} + \boldsymbol{TA}^* = 0, \quad \boldsymbol{TT}^* = \delta I_{2m+2}, \quad \delta = \pm 1. \tag{87}$$

2) 逆空间的非局部 NLS 方程 (3) 有解:

$$q = q_0 + \frac{g}{f}, \tag{88a}$$

$$\begin{aligned} f &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}|\widehat{\phi}_m; \boldsymbol{T}\widehat{\phi}_m^*(-x)|, \\ g &= 2(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}|\widehat{\phi}_{m+1}; \boldsymbol{T}\widehat{\phi}_{m-1}^*(-x)|, \end{aligned} \tag{88b}$$

其中 $(q_0, r_0)$ 满足方程组 (2) 且 $r_0^*(x,t) = \delta q_0(-x,t)$. 向量 $\phi$ 满足矩阵方程:

$$\phi_x(x) = \boldsymbol{A}\phi(x) + q_0(x)\boldsymbol{T}\phi^*(-x), \tag{89a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\phi_t(x) = &(2\boldsymbol{A}^2 - \delta q_0(x) q_0^*(-x) I_{2m+2})\phi(x) \\ &+ (2\boldsymbol{A}q_0 + q_{0,x}(x) I_{2m+2})\boldsymbol{T}\phi^*(-x), \end{aligned} \tag{89b}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 满足条件:

$$\boldsymbol{AT} - \boldsymbol{TA}^* = 0, \quad \boldsymbol{TT}^* = -\delta I_{2m+2}, \quad \delta = \pm 1. \tag{90}$$

矩阵方程 (87) 和方程 (90) 的解可依据表 1 给出. 此外, 上述约化也可以应用于逆时间和逆时空的 NLS 方程的求解 (参见文献 [21]). 在文献 [21] 中讨论了当 $q_0$ 和 $r_0$ 为平面波解时, 经典 NLS 方程和非局部 NLS 方程的解, 细节可以参考文献 [21].

## 7 结 论

本文综述了“双线性约化方法”. 这一方法将求解某些可积方程转化为求解约化前的耦合系统, 利用双线性方法给出双 Wronskian 解, 再施以约化

技巧, 利用双 Wronskian 的规则结构, 得到目标方程的精确解. 早期对 NLS 方程 (1) 的求解 (利用双线性方法), 需借助变换[25]:

$$q=\frac{g}{f},\quad (f=f^*),$$

还需要讨论所谓的实条件 $f=f^*$. 在双线性约化方法中, 这些讨论自然的归结为求解形如 (26) 式的矩阵方程, 而且通过 $\boldsymbol{A}$ 的标准型可以实现对目标方程精确解的分类. 文中, 形如 (26) 式和 (76) 式的矩阵方程是双线性约化方法中的基本约束关系 (见文献 [1, 16, 20] 等), 列出了 $\boldsymbol{A}$ 的两种基本标准型对应的解, 即 $\boldsymbol{K}_1$为对角阵和 Jordan 矩阵时对应波函数 $\varphi$ 的解. 由于 $\boldsymbol{A}$ 所涉及的约束方程和决定波函数 $\varphi$ 的微分方程组都是线性的, 理论上 $\boldsymbol{A}$ 的任意标准型对应的波函数 $\varphi$ 的解可以通过上述两种基本情况组合得到. 在分块矩阵的结构 (31) 式之下, $\boldsymbol{K}_1$和$\boldsymbol{K}_4$的关系揭示了相应方程对应的特征值的分布. 双线性约化方法不仅可以应用于经典可积方程的求解, 也可以应用于求解非局部的可积系统. 对比文献 [39, 40, 41], 可见双线性约化方法的优势所在 (参考文献 [1, 20]). 此外, 这一方法还可以应用于非等谱方程的求解 (文献 [9, 15]) 和需要引入互反变换的系统的求解 (文献 [10, 19]). 此综述侧重于详细介绍双线性约化方法的基本思想与应用技巧, 对于所获精确解的动力学行为的分析, 可以参考相应的论文, 如文献 [1, 14, 16, 17, 19] 等.

## 参考文献


[1] Chen K, Deng X, Lou S Y, Zhang D J 2018 *Stud. Appl. Math.* **141** 113
[2] Chen K, Zhang D J 2018 *Appl. Math. Lett.* **75** 82
[3] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 064105
[4] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2014 *Phys. Rev. E* **90** 032912
[5] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2021 *Phys. Lett. A* **409** 127516
[6] Deng X, Lou S Y, Zhang D J 2018 *Appl. Math. Comput.* **332** 477
[7] Chen K, Na C N, Yang J X 2023 *Nonlinear Dyn.* **111** 1685
[8] Feng W, Zhao S L, Sun Y Y 2020 *Int. J. Mod. Phys. B* **34** 2050021
[9] Silem A, Wu H, Zhang D J 2021 *Appl. Math. Lett.* **116** 107049
[10] Chen K, Liu S M, Zhang D J 2019 *Appl. Math. Lett.* **88** 230
[11] Wang J, Wu H, Zhang D J 2020 *Commun. Theor. Phys.* **72** 045002
[12] Shi Y, Shen S F, Zhao S L 2019 *Nonlinear Dyn.* **95** 1257
[13] Liu S Z, Wu H 2021 *Mod. Phys. Lett. B* **35** 2150410
[14] Wang J, Wu H 2022 *Nonlinear Dyn.* **109** 3101
[15] Liu S M, Wu H, Zhang D J 2020 *Rep. Math. Phys.* **86** 271
[16] Liu S Z, Wang J, Zhang D J 2022 *Stud. Appl. Math.* **148** 651
[17] Wu H 2021 *Nonlinear Dyn.* **106** 2497
[18] Liu S M, Wang J, Zhang D J 2022 *Rep. Math. Phys.* **89** 199
[19] Wang J, Wu H, Zhang D J 2022 *Chin. Phys. B* **31** 120201
[20] Wang J, Wu H 2022 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **104** 106052
[21] Zhang D J, Liu S M, Deng D 2023 *Open Commun. Nonlinear Math. Phys.* **3** 23
[22] Zhang D J 2020 *Wronskian solutions of integrable systems, in Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures* (Vol. 2) (Eds. Euler N, Nucci M C) (Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis) pp415–444
[23] Hirota R 1974 *Prog. Theore. Phys.* **52** 1498
[24] Freeman N C, Nimmo J J C 1983 *Phys. Lett. A* **95** 1
[25] Nimmo J J C 1983 *Phys. Lett. A* **99** 279
[26] Hietarinta J, Zhang D J 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404006
[27] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H 1973 *Phys. Rev. Lett.* **31** 125
[28] Chen D Y 2006 *Introduction to Soliton Theory* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [陈登远 2006 孤子引论 (北京: 科学出版社)]
[29] Newell A C 1985 *Solitons in Mathematics and Physics* (Philadelphin: SIAM)
[30] Liu Q M 1990 *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 3520
[31] Yin F M, Sun Y P, Cai F Q, Chen D Y 2008 *Comm. Theore. Phys.* **49** 401
[32] Ablowitz M J, Ladik J F 1976 *J. Math. Phys.* **17** 1011
[33] Fokas A S 1995 *Physica D* **87** 145
[34] Lenells J, Fokas A S 2009 *Nonlinearity* **22** 11
[35] Lenells J 2009 *Stud. Appl. Math.* **123** 215
[36] Gerdjikov V S, Ivanov M I, Kulish P P 1980 *Theor. Math. Phys.* **44** 784
[37] Zhang D J 2006 arXiv: nlin/0603008v3 [nlin.SI]
[38] Zhang D J, Zhao S L, Sun Y Y, Zhou J 2014 *Rev. Math. Phys.* **26** 1430006
[39] Gürses M, Pekcan A 2018 *J. Math. Phys.* **59** 051501
[40] Gürses M, Pekcan A 2019 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **71** 161
[41] Gürses M, Pekcan A 2021 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **97** 105736

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

# Bilinearization-reduction approach to integrable systems*

Zhang Da-Jun †

(*Department of Mathematics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200444, *China*)

( Received 12 January 2023; revised manuscript received 27 January 2023 )

**Abstract**

The paper is a review of the bilinearization-reduction method which provides an approach to obtain solutions to integrable systems. Many integrable coupled systems can be bilinearized and their solutions are presented in terms of double Wronskians (or double Casoratians in discrete case). The bilinearization-reduction method is based on bilinear equations and solutions in double Wronskian/Casoratian form. For those integrable equations that are reduced from coupled systems, one can first solve the unreduced coupled system, obtaining their solutions in double Wronskian/Casoratian form, then, implement suitable reduction techniques, so that solutions of the reduced equation can be obtained as reductions of those of the unreduced coupled system. The method proves effective in solving not only classical integrable equations but also the nonlocal ones. The so-called nonlocal integrable equations were introduced by Ablowitz and Musslimani via reductions with reverse-space (or reverse-time, or reverse-space-time). Note that this method particularly provides a convenient bilinear approach to solve nonlocal integrable systems. In this review, the nonlinear Schrödinger hierarchy and the differential-difference nonlinear Schrödinger equation are employed as demonstrative examples to elaborate this method. These two examples will be pedagogically helpful in understanding the reduction technique. The reduction is implemented by imposing suitable constraints on the basic column vectors of the double Wronskian/Casoratian. Realizations of the constraints are converted to solve a set of matrix equations which varies with the constraints. Special solutions of the matrix equations are provided, which are also helpful in understanding the eigenvalue structure of the involved spectral problems corresponding to the considered equations. Other examples include the Fokas-Lenells equation and the nonlinear Schrödinger equation with nontrivial background. Since many nonlinear equations with physical significance are integrable as reductions of integrable coupled systems, the paper provides a review as well as an introduction about the bilinearization-reduction method that can be used to solve these nonlinear integrable models.

**Keywords:** bilinearization-reduction approach, double Wronskian, integrable system, exact solution

**PACS:** 02.30.Ik, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.72.20230063

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12271334, 12126352, 11875040).

† Corresponding author. E-mail: djzhang@staff.shu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

**可积系统的双线性约化方法**

张大军

**Bilinearization–reduction approach to integrable systems**

Zhang Da-Jun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 100203 (2023)    DOI: 10.7498/aps.72.20230063
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20230063
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

---