

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

非宇称时间对称耦合器中的非局域孤子*

蒋宏帆 林机 胡贝贝 张肖†

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

(2023年1月17日收到; 2023年2月12日收到修改稿)

研究了非宇称时间对称复数势下非线性耦合器中多类型非局域孤子的存在性和稳定性, 发现基态孤子、偶极孤子、多极孤子分别从线性谱中不同的离散特征值分叉出来形成孤子族, 其功率受非局域程度和传播常数的影响. 在相变以下, 各个类型孤子均在相对较低功率区间是稳定的. 随着非局域程度的增加, 基态孤子族的稳定区域变小, 其他孤子族的稳定区域则变大. 在相变以上, 基态孤子则在相对中功率区是稳定的, 并且从第二大离散特征值分叉出的偶极孤子不存在稳定区域. 孤子线性稳定性分析结果中的特征值总是以共轭对的形式出现. 此外, 还研究了耦合系数对孤子态的影响.

关键词: 非宇称时间对称, 非局域, 非线性耦合器, 稳定性**PACS:** 42.79.Gn, 42.65.Tg, 42.82.Et**DOI:** 10.7498/aps.72.20230082

1 引言

光学耦合器的主要工作原理是光波的分布式耦合导致了波导本征模之间的能量转移和重新分配, 其在全光开关、光波路由和光波复用等方面具有重要的应用价值. 大家熟知的代表性光学系统有双芯光纤^[1-4]和布拉格光栅^[5]以及可以产生二次谐波的非线性双芯平板波导^[6]. 光学耦合器的应用主要集中在非线性光学系统中, 对于非线性光学耦合器中存在的孤子态, 其稳定性和传输特性对于光学器件的性能和信息的有效传递起关键性作用, 因此研究耦合器中不同类型孤子态的存在性和稳定性具有重要的意义.

空间非局域非线性表征了光学在介质中的非线性响应, 此时由非线性诱导的介质折射率的局部变化依赖于光强在给定点附近的分布^[7,8]. 非局域非线性不同于局域非线性的特点是引入了一个新的空间尺度, 即非局域作用半径 ($r = \sqrt{d}$). 非局域

作用半径与其他作用的自然作用尺度彼此发生竞争将彻底改变光学系统中的非线性激发^[9], 导致新现象的产生, 例如抑制光束的自陷和横向不稳定性^[10,11]以及新型孤子态的形成^[12-15]等. 目前, 典型的具有非局域响应的材料分别有向列相液晶^[16,17]、热致光学材料^[18]、光折变晶体^[19,20]等, 这些介质分别由于液晶分子再取向、热扩散、载流子的漂移等原因引起空间非局域性. 在纳米光子学和表面等离子学领域, 介质中光与物质的相互作用在深度亚波长尺度, 也可以诱导产生有效的非局域^[21]. 非局域非线性介质中存在的空间光孤子一般称为非局域孤子. 迄今为止, 存在于非线性耦合器中不同类型的非局域孤子已经被相继报道. 如双峰孤子、多极亮暗孤子、多极灰孤子、周期孤子、准周期孤子和类 Airy 孤子等丰富的孤子结构^[22-24].

另一方面, 在非线性薛定谔方程中引入外势为孤子新现象的研究提供了更多的可能性^[25]. 特别的是, 势阱函数 $V(x)$ 满足条件 $V(x) = V^*(-x)$ 的宇称时间 (PT) 对称耗散系统出现了保守系统才存在

* 国家自然科学基金 (批准号: 12004338, 11835011) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2022M712833) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangxiao@zjnu.cn

的现象,如具有完全实谱^[26]且支持连续稳定的孤子模式^[27].因此,PT对称系统打破了传统保守系统和耗散系统之间的界限,成为令人感兴趣的新研究方向.尽管PT对称的概念在量子力学中提出,但是由于描述量子力学和光场的薛定谔方程相同,PT对称系统可以通过引入具有增益损耗的复数型折射率分布在光学结构上实现^[28,29].然而,光学PT对称要求折射率实部偶对称,代表增益损耗的虚部奇对称,这是极为严苛的条件.为了突破这一限制,研究者们将目光转向了能实现实谱的非PT对称系统^[30,31],这类系统的增益损耗分布可以是非平衡的,更具有灵活性.当非PT对称复数势实部的参数超过一个阈值时,系统会发生相变,此时离散复特征值从连续谱内部的实特征值分叉出来.2014年,Tosy等^[32]首次研究发现非PT对称复势中存在稳定的连续孤子族.随后,Konotop等^[33]对这一现象进行了解释.此外,形如 $W(x) = g(x)^2 + ig_x(x)$ 的这类复数势(其中 $g(x)$ 为任意实函数)被证明是唯一支持连续孤子族存在的一维非PT对称复数势^[34].进一步研究发现,类似于保守系统和PT对称系统,非PT对称系统中孤子线性稳定性谱的特征值显示出四重对称性 $(\lambda, \lambda^*, -\lambda, -\lambda^*)$ ^[35].相对于PT对称系统中孤子的研究,非PT对称系统中孤子的研究较少.然而,近期已有的研究表明了与非PT对称复数势相关的空间孤子具有独特的性质^[36-40].

虽然前人对于非线性耦合器和非局域孤子的研究已经做了大量的工作,但是非PT对称非线性耦合器中非局域孤子的存在性和稳定性还未见报道.选取文献^[35]中提到的非PT对称复数势形式,得到了该复数势下非线性耦合器中能够稳定传输的非局域孤子,孤子类型包含基态孤子、偶极孤子、三极孤子以及四极孤子,并且发现这些孤子族分别从线性谱中不同的离散特征值分叉出来.相变以下,孤子的稳定传输区间均在相对功率较低处;相变以上,孤子稳定传输区间发生了改变.本工作还探讨了非局域程度对孤子功率以及稳定性的影响,并分析了耦合系数对孤子态的影响.

2 理论模型

光束在有外势作用下的克尔非线性平面双芯波导中传播可用含外势的耦合非线性薛定谔方程

描述^[22,37]:

$$i\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + W(x)U + MU + a_1V = 0, \quad (1a)$$

$$i\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + W(x)V + NV + a_2U = 0, \quad (1b)$$

$$d\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - M + b_1|U|^2 = 0, \quad (1c)$$

$$d\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - N + b_2|V|^2 = 0. \quad (1d)$$

式中, U 和 V 为光束振幅; z 为光束的传播方向; M 和 N 分别对应 U 和 V 的诱导折射率; d 是非局域作用半径的平方,表征非局域程度; a_1 和 a_2 是耦合系数,可以反映两束光之间的相互作用大小; b_1 和 b_2 分别是两个分量的克尔非线性项系数. $W(x)$ 为非PT对称复数势,具体形式为

$$W(x) = g^2(x) + 2\gamma g(x) + ig'(x), \quad (2)$$

其中 $g(x)$ 是实函数, γ 为实数,在数值模拟中,选择:

$$g(x) = \tanh[2(x + 2.7)] - \tanh(x - 2.7). \quad (3)$$

其为不对称的单驼峰函数.将其代入方程(2)中,可以得到不同 γ 对应的复数势 $W(x)$,如图1(a),(c)所示,可以看出图中的复数势都是非PT对称.对于 $g(x)$ 的选取,系统的相变发生在 $\gamma = \gamma_0 = -0.260$.可以发现,当 $\gamma > \gamma_0$ 时,线性谱中的特征值全是实数(图1(b), $\gamma = 0.3$),而当 $\gamma < \gamma_0$ 时,线性谱中的特征值出现了复数(图1(d), $\gamma = -0.3$).

假设方程的稳定孤子解形式为

$$U(x, z) = u(x)e^{i\mu z}, \quad V(x, z) = v(x)e^{i\mu z};$$

$$M(x, z) = m(x), \quad N(x, z) = n(x)$$

代入方程(1)中,可得到如下常微分方程:

$$-\mu u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W(x)u + mu + a_1v = 0, \quad (4a)$$

$$-\mu v + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + W(x)v + nv + a_2u = 0, \quad (4b)$$

$$d\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - m + b_1|u|^2 = 0, \quad (4c)$$

$$d\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - n + b_2|v|^2 = 0. \quad (4d)$$

对于上述常微分方程,就可以利用多种数值方法来求孤子解,通过平方算符法对方程(4)进行数值求解,可以得到多种类型的孤子解.

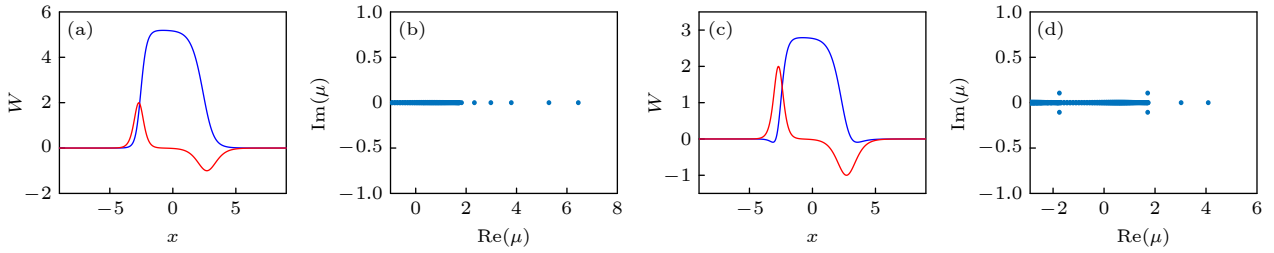


图 1 (a) $\gamma = 0.3$ 对应的非 PT 对称复数势, 蓝色为实部, 红色为虚部; (b) $\gamma = 0.3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 对应的线性谱; (c) $\gamma = -0.3$ 对应的非 PT 对称复数势; (d) $\gamma = -0.3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 对应的线性谱

Fig. 1. (a) Non-PT-symmetric complex potentials for $\gamma = 0.3$ (blue is the real part, and red is the imaginary part); (b) the linear spectrum at $\gamma = 0.3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$; (c) the non-PT-symmetric complex potentials for $\gamma = -0.3$; (d) the linear spectrum at $\gamma = -0.3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

为了判断数值方法得到的孤子解是否稳定, 需要对解进行稳定性分析. 首先, 设方程 (1) 的扰动解为 $U(x, z) = [u(x) + \epsilon P(x)e^{\lambda z} + \epsilon Q^*(x)e^{\lambda^* z}]e^{i\mu z}$, $V(x, z) = [v(x) + \epsilon R(x)e^{\lambda z} + \epsilon S^*(x)e^{\lambda^* z}]e^{i\mu z}$; $M(x, z) = m(x) + \epsilon m_0(x, z)$, $N(x, z) = n(x) + \epsilon n_0(x, z)$. $P(x)$, $Q^*(x)$, $R(x)$, $S^*(x)$, $m_0(x, z)$, $n_0(x, z)$ 是扰动的本征模式, λ 为扰动的本征值, ϵ 为小参量. 代入方程 (1) 中化解后可得扰动的偏微分方程:

$$\left[i\lambda - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + m \right] P e^{\lambda z} + a_1 R e^{\lambda z} + \left[i\lambda^* - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + m \right] Q^* e^{\lambda^* z} + a_1 S^* e^{\lambda^* z} + m_0 u = 0, \quad (5a)$$

$$\left[i\lambda - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + n \right] R e^{\lambda z} + a_2 P e^{\lambda z} + \left[i\lambda^* - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + n \right] S^* e^{\lambda^* z} + a_2 Q^* e^{\lambda^* z} + n_0 v = 0, \quad (5b)$$

$$d \frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} - m_0 + b_1 (uQ + u^* P) e^{\lambda z} + b_1 (uP^* + u^* Q^*) e^{\lambda^* z} = 0, \quad (5c)$$

$$d \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} - n_0 + b_2 (vS + v^* R) e^{\lambda z} + b_2 (vR^* + v^* S^*) e^{\lambda^* z} = 0. \quad (5d)$$

令 $L_s = 1 - d \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 那么 $\frac{\partial^2 m_0}{\partial x^2} = \frac{(1 - L_s)m_0}{d}$, $\frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2} = \frac{(1 - L_s)n_0}{d}$, 代入方程 (5) 可化简得到方程:

$$\begin{aligned} & \left[i\lambda - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + m \right] P e^{\lambda z} + a_1 R e^{\lambda z} + \frac{b_1 (uQ + u^* P) e^{\lambda z}}{L_s} u \\ & + \left[i\lambda^* - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + m \right] Q^* e^{\lambda^* z} + a_1 S^* e^{\lambda^* z} + \frac{b_1 (uP^* + u^* Q^*) e^{\lambda^* z}}{L_s} u = 0, \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} & \left[i\lambda - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + n \right] R e^{\lambda z} + a_2 P e^{\lambda z} + \frac{b_2 (vS + v^* R) e^{\lambda z}}{L_s} v \\ & + \left[i\lambda^* - \mu + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + W(x) + n \right] S^* e^{\lambda^* z} + a_2 Q^* e^{\lambda^* z} + \frac{b_2 (vR^* + v^* S^*) e^{\lambda^* z}}{L_s} v = 0. \end{aligned} \quad (6b)$$

因此可以得到一个求解特征值问题:

$$L \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{pmatrix} = -i\lambda \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} L_1 + W + b_1 u L_s^{-1} u^* & b_1 u L_s^{-1} u & a_1 & 0 \\ -b_1 u^* L_s^{-1} u^* & -L_1 - W^* - b_1 u^* L_s^{-1} u & 0 & -a_1 \\ a_2 & 0 & L_2 + W + b_2 v L_s^{-1} v^* & b_2 v L_s^{-1} v \\ 0 & -a_2 & -b_2 v^* L_s^{-1} v^* & -L_2 - W^* - b_2 v^* L_s^{-1} v \end{pmatrix}, \quad (8)$$

式中 $L_1 = -\mu + \nabla^2 + m$, $L_2 = -\mu + \nabla^2 + n$.

通过进行上述线性稳定性分析, 就可以判断孤子解的稳定性. 如果 λ 的实部不存在大于零的值, 那么说明该孤子解是线性稳定的, 为了进一步验证孤子解的稳定性, 可以通过加微扰对孤子解进行数值传输.

3 数值结果

3.1 相变以下的孤子及其稳定性

以 $\gamma = 0.3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 为例, 由图 1(b) 可知线性谱中的特征值全都是实数, 存在一些离散的特征值, 这些特征值从大到小分别为 $\mu_1 = 6.445$,

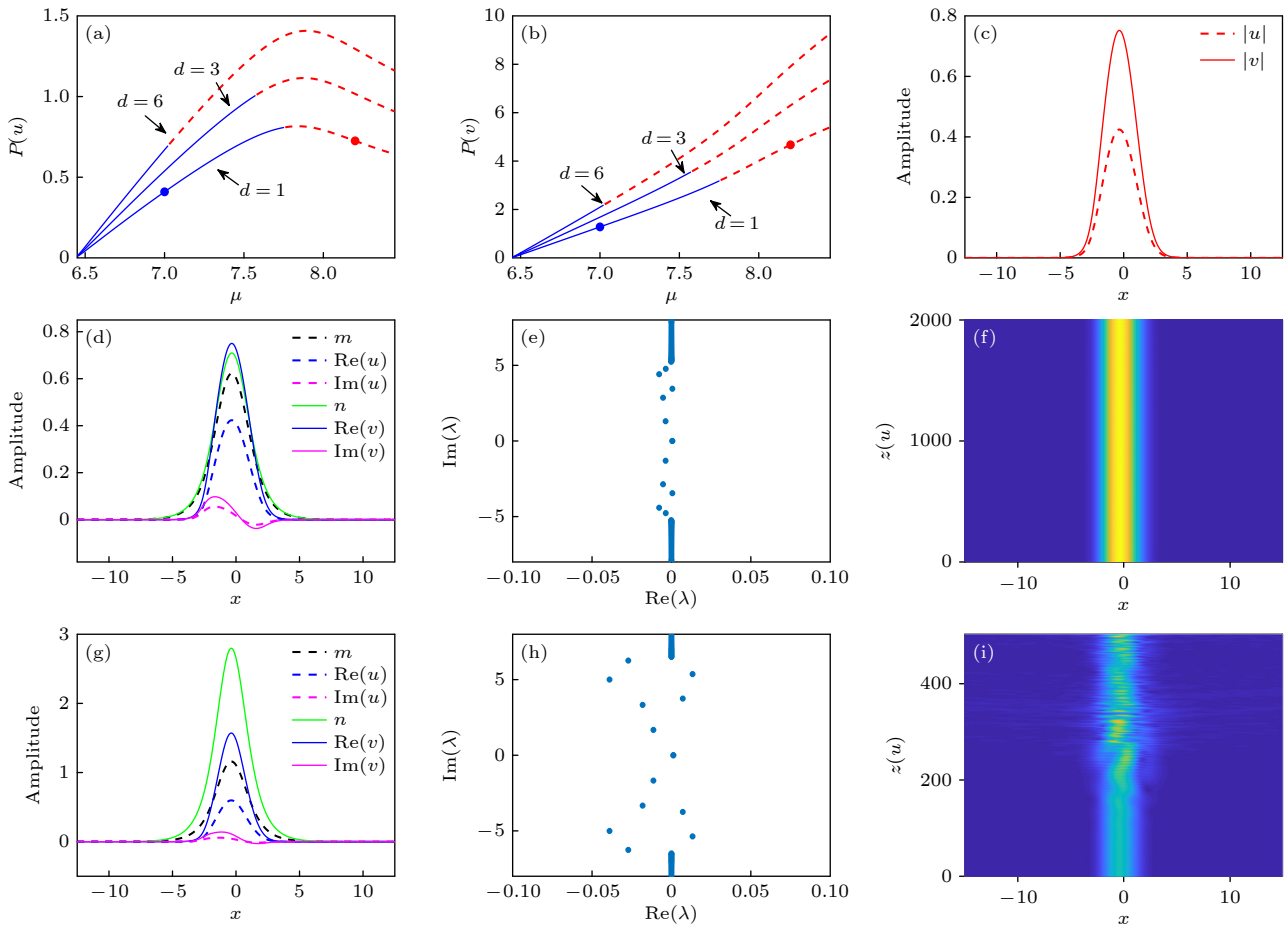


图 2 (a), (b) 分别为 u 和 v 分量在 $\mu > \mu_1$ 这一区间对应的功率曲线图, 蓝色实线是稳定区域, 红色虚线为不稳定区域; (c) 蓝色加粗点 $\mu = 7$ 时两分量的模; (d) 蓝色加粗点 $\mu = 7$ 时 u, v, m, n 的轮廓图; (e) $\mu = 7$ 时的稳定性分析; (f) $\mu = 7$ 时加了 1% 白噪声后 u 分量的传输; (g)–(i) 分别为红色加粗点处 $\mu = 8.2$ 时对应的图. 其他参数的选取为 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = 0.3$

Fig. 2. (a), (b) Power diagrams corresponding to the u and v components in the interval of $\mu > \mu_1$, respectively (solid blue is the stable region, and dashed red line is the unstable region); (c) the modulus of u and v when $\mu = 7$ (blue bold dot); (d) the contours of the soliton and refractive index at $\mu = 7$; (e) stability analysis when $\mu = 7$; (f) the stable propagation of the u component after adding 1% random noise when $\mu = 7$; (g)–(i) the corresponding diagrams when $\mu = 8.2$ (red bold dot), respectively. The other parameters are $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = 0.3$.

$\mu_2 = 5.281$, $\mu_3 = 3.788$, $\mu_4 = 2.981$. 研究发现从这些离散点处分叉出去形成了各孤子族.

图 2 为传播常数 $\mu > \mu_1$ 区间内的孤子类型及其稳定孤子存在的范围. 从 μ_1 可以分叉出连续的基态孤子族. 图 2(d) 和图 2(g) 分别描述了 $\mu = 7.0$, $d = 1$ 和 $\mu = 8.2$, $d = 1$ 时基态孤子解以及折射率的轮廓, 可以看到折射率为高斯波包形. 将孤子的功率定义为 $P(u) = \int |u|^2 dx$, $P(v) = \int |v|^2 dx$, 从图 2(a) 可以看出, $P(u)$ 随着 μ 值的增大先增大后减小, 并且功率一直都处在相对较低的水平; $P(v)$ 则随着 μ 值的增大一直增大, 并且功率可以一直增长到较高的水平 (见图 2(b)). 当非局域程度 d 增大, 相同 μ 值下两个分量的功率都会增大.

此外, 稳定孤子的存在区域也值得讨论. 从图 2(a) 和图 2(b) 中可以看出, 这一区间下稳定孤子存在的范围为 $\mu > \mu_1$ 后较大的一段区间, 孤子在功率相对较低的一段范围内可以稳定传输. 当 $d = 1$ 时, 稳定区域为 $6.45 \leq \mu \leq 7.80$; 当 $d = 3$ 时, 稳定区域为 $6.45 \leq \mu \leq 7.57$; 当 $d = 6$ 时, 稳定区域为 $6.45 \leq \mu \leq 7.02$, 这表明非局域程度会对稳定范围有所影响, 这一区间内 d 值越大, 稳定范围越小. 选取两个具体的参数来进一步表明了这一区间内孤子的稳定性. 稳定的例子选取 $\mu = 7$, 可以发现该参数下孤子解的线性稳定性分析结果中特征值不存在正的实部部分 (见图 2(e)), 说明它是稳定孤子解, 为了更好地说明其稳定性, 对孤子解添加微扰后进行数

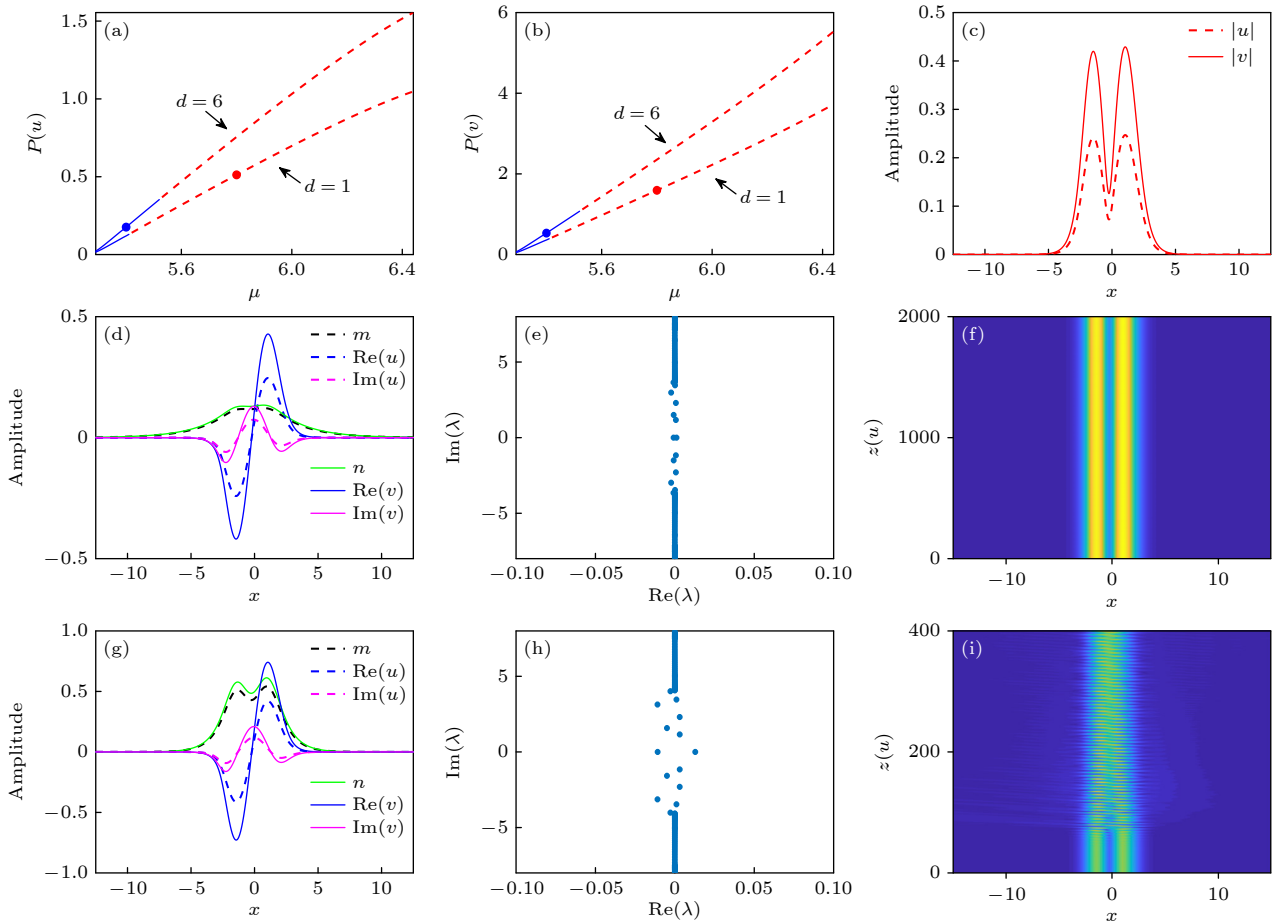


图 3 (a), (b) 分别为 u 和 v 分量在 $\mu_2 < \mu < \mu_1$ 这一区间对应的功率曲线图; (c) 蓝色加粗点 $\mu = 5.4$, $d = 6$ 时两分量的模; (d) 蓝色加粗点 $\mu = 5.4$, $d = 6$ 时 u, v, m, n 的轮廓图; (e) $\mu = 5.4$, $d = 6$ 时的稳定性分析; (f) $\mu = 5.4$, $d = 6$ 时加了 1% 白噪声后 u 分量的传输; (g)–(i) 分别为红色加粗点处 $\mu = 5.8$, $d = 1$ 时对应的图. 其他参数的选取为 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = 0.3$

Fig. 3. (a), (b) Power diagrams corresponding to the u and v components in the interval of $\mu_2 < \mu < \mu_1$; (c) the modulus of u and v when $\mu = 5.4$ and $d = 6$ (blue bold dot); (d) the contours of the soliton and refractive index at $\mu = 5.4$ and $d = 6$; (e) stability analysis when $\mu = 5.4$ and $d = 6$; (f) the stable propagation of the u component after adding 1% random noise when $\mu = 5.4$ and $d = 6$; (g)–(i) the corresponding diagrams when $\mu = 5.8$ and $d = 1$ (red bold dot), respectively. The other parameters are $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = 0.3$.

值演化, 图 2(f) 即为 $\mu = 7$ 时 u 分量的演化图, 可以看到孤子能在较长范围内稳定演化, 演化过程进一步证明了这一参数下的基态孤子是稳定的. 同样也选取 $\mu = 8.2$ 下的孤子解, 线性稳定性分析结果显示特征值存在正的实部部分, 数值演化也可以发现仅演化到 200 附近就开始变得不稳定 (见图 2(h) 和图 2(i)).

在 $\mu_2 < \mu < \mu_1$ 这一区间内, 孤子类型有所不同, 从 μ_2 处分叉出了偶极孤子族. 图 3 展示了这一区间内的孤子类型及其稳定孤子存在的范围. 从图 3(a) 和图 3(b) 可知, 两个分量的功率都随着 μ 值的增大而增大, 但 u 分量的功率相对较低, 而 v 分量的功率相对较高, 非局域程度的增加也会使

功率增大. 当 $d = 1$ 时, 稳定区域为 $5.29 \leq \mu \leq 5.41$; 当 $d = 6$ 时, 稳定区域为 $5.29 \leq \mu \leq 5.52$, 发现仍在功率较低处稳定, 且存在范围较小. 不同于上一区间的是, 这一区间内非局域程度越大, 稳定范围反而更大. 选取了 $\mu = 5.4, d = 6$; $\mu = 5.8, d = 1$ 这两个点来说明这一区间孤子的波形和折射率轮廓, 可以发现折射率不再是高斯波包, 而是中间下凹的两峰形状, 与孤子的峰数相同 (见图 3(d) 和图 3(g)).

图 3(e) 中稳定性分析结果显示实部没有正值以及图 3(f) 中的稳定传输结果都表明 $\mu = 5.4, d = 6$ 参数下的孤子是稳定的. 图 3(h) 和图 3(i) 则表明 $\mu = 5.8, d = 1$ 参数下的孤子是不稳定的.

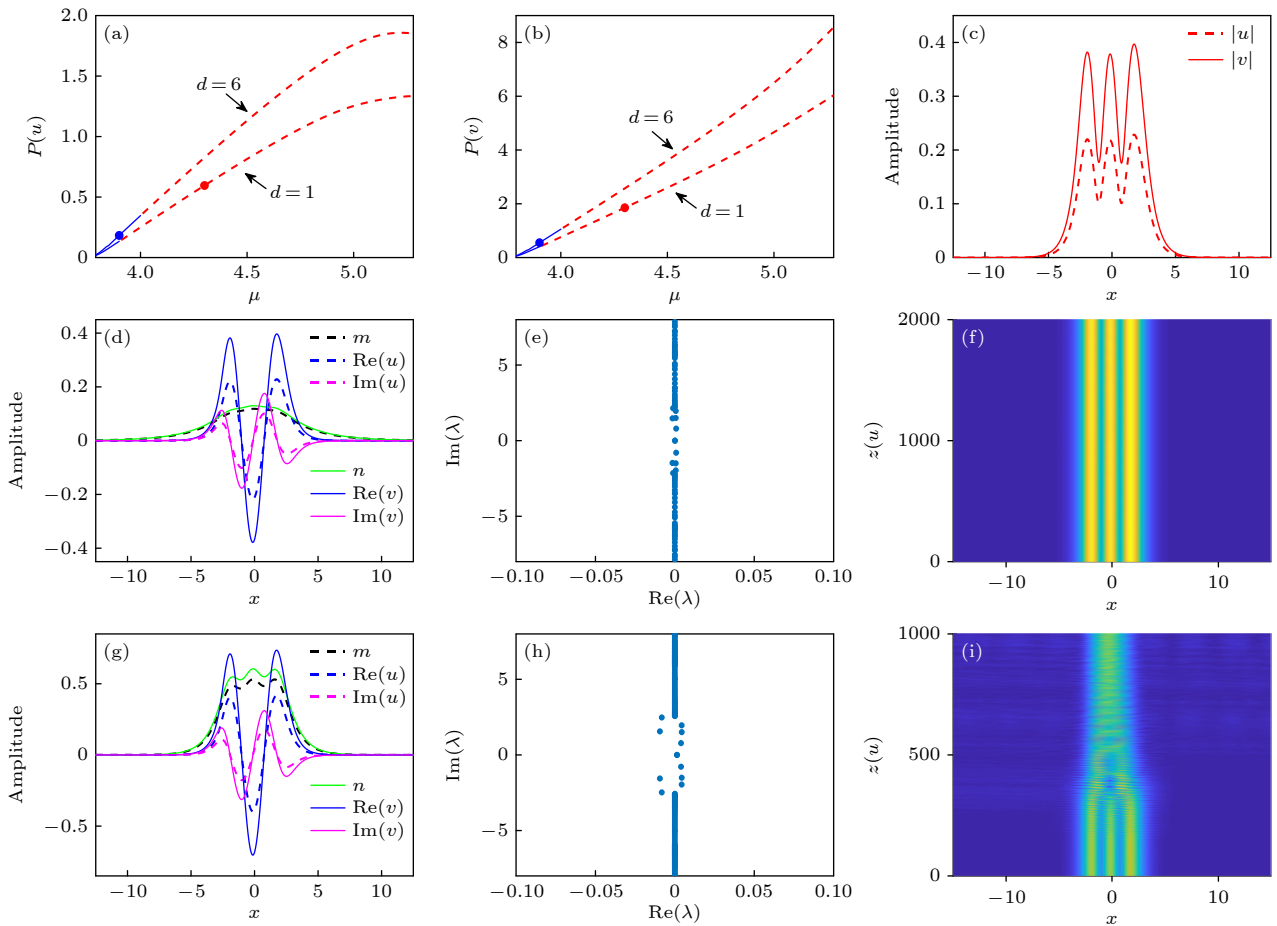


图 4 (a), (b) 分别为 u 和 v 分量在 $\mu_3 < \mu < \mu_2$ 这一区间对应的功率曲线图; (c) 蓝色加粗点 $\mu = 3.9, d = 6$ 时两分量的模; (d) 蓝色加粗点 $\mu = 3.9, d = 6$ 时 u, v, m, n 的轮廓图; (e) $\mu = 3.9, d = 6$ 时的稳定性分析; (f) $\mu = 3.9, d = 6$ 时加了 1% 白噪声后 u 分量的传输; (g)–(i) 分别为红色加粗点处 $\mu = 4.3, d = 1$ 时对应的图. 其他参数的选取为 $a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 5.5, b_2 = 2, \gamma = 0.3$

Fig. 4. (a), (b) Power diagrams corresponding to the u and v components in the interval of $\mu_3 < \mu < \mu_2$; (c) the modulus of u and v when $\mu = 3.9$ and $d = 6$ (blue bold dot); (d) the contours of the soliton and refractive index at $\mu = 3.9$ and $d = 6$; (e) stability analysis when $\mu = 3.9$ and $d = 6$; (f) the stable propagation of the u component after adding 1% random noise when $\mu = 3.9$ and $d = 6$; (g)–(i) the corresponding diagrams when $\mu = 4.3$ and $d = 1$ (red bold dot), respectively. The other parameters are $a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 5.5, b_2 = 2, \gamma = 0.3$.

$\mu_3 < \mu < \mu_2$ 这一区间内的情况如图 4 所示, 三极孤子族从 μ_3 处分叉出来. 折射率的形状与孤子形状相对应, 也有 3 个小峰. 观察图 4(a) 和图 4(b) 可知两个分量功率也都随着 μ 值的增大而增大, $P(u)$ 较小, $P(v)$ 相对较大, 非局域程度的增大也会使功率逐渐增大. 当 $d = 1$ 时, 稳定区域为 $3.79 \leq \mu \leq 3.90$; 当 $d = 6$ 时, 稳定区域为 $3.79 \leq \mu \leq 4.00$, 可以发现稳定范围也在功率相对较小处, 并且存在范围也较窄. 同样 d 值也会影响这一区间内孤子的稳定范围, d 值越大, 稳定范围越大. 这一区间选取了 $\mu = 3.9, d = 6$; $\mu = 4.3, d = 1$ 这两个点来进一步分析, 稳定的部分可以演化到 2000, 而不稳定的部分在演化到 400 附近开始混乱 (图 4(f) 和图 4(i)).

当 $\mu_4 < \mu < \mu_3$ 时, 如图 5 所示, 研究发现在这一区间又可以重新得到单峰孤子. 由图 5(a) 和图 5(b) 可知, 功率也随着 μ 的增大而增大, $P(u)$ 稍小于 $P(v)$. d 越大, 功率越大. 当 $d = 1$ 时, 稳定区域为 $2.99 \leq \mu \leq 3.07$; 当 $d = 6$ 时, 稳定区域为 $2.99 \leq \mu \leq 3.55$, 这个区间内非局域程度对稳定区域的影响较显著, d 越大, 稳定范围越大.

通过上述的研究发现, 在相变以下从每个线性谱离散特征值处能分叉出连续的孤子族, 有基态孤

子族、偶极孤子族以及三极孤子族. 非局域程度的大小会对各个孤子族的功率以及稳定范围产生不同程度的影响. 并且各类型孤子族的稳定性分析结果显示特征值均以共轭对 (λ, λ^*) 的形式出现.

接下来讨论耦合系数 a_1 和 a_2 对孤子的影响. 图 6(a) 为 $\gamma = 0.3, a_1 = 0.2, a_2 = 0.6$ 参数下的线性谱. 研究发现通过改变耦合系数的值, 会影响离散特征值的分布, 这一参数下离散特征值从大到小分别为 $\mu'_1 = 5.059, \mu'_2 = 4.366, \mu'_3 = 3.895, \mu'_4 = 3.202, \mu'_5 = 2.402, \mu'_6 = 1.710, \mu'_7 = 0.939$. 研究发现在 $\mu > \mu'_1$ 时存在稳定的基态孤子族, 存在两个分量实部均朝上的基态单峰孤子解; 在 $\mu'_2 < \mu < \mu'_1$ 时也存在稳定的单峰孤子族, 但两个分量有所区别, 是两个分量实部虚部均朝向相反的单峰孤子解, 这一孤子族在选取 $\gamma = 0.3, a_1 = 1, a_2 = 3$ 这组参数时存在于第 4 个离散特征值区间内. 由此可以说明耦合系数能够调控各个类型孤子的排布顺序, 研究还发现可以在 $\mu'_4 < \mu < \mu'_2$ 范围内迭代出偶极孤子解; 在 $\mu'_6 < \mu < \mu'_4$ 这一范围内迭代出三极孤子解; 在 $\mu'_7 < \mu < \mu'_6$ 范围内迭代出四极孤子解. 这些孤子族也在相对功率较低时是稳定的. 图 6(b) 给出了在 $\mu'_7 < \mu < \mu'_6$ 区间内一点处得到的四极孤子解, 并且可以稳定传输 (图 6(c)).

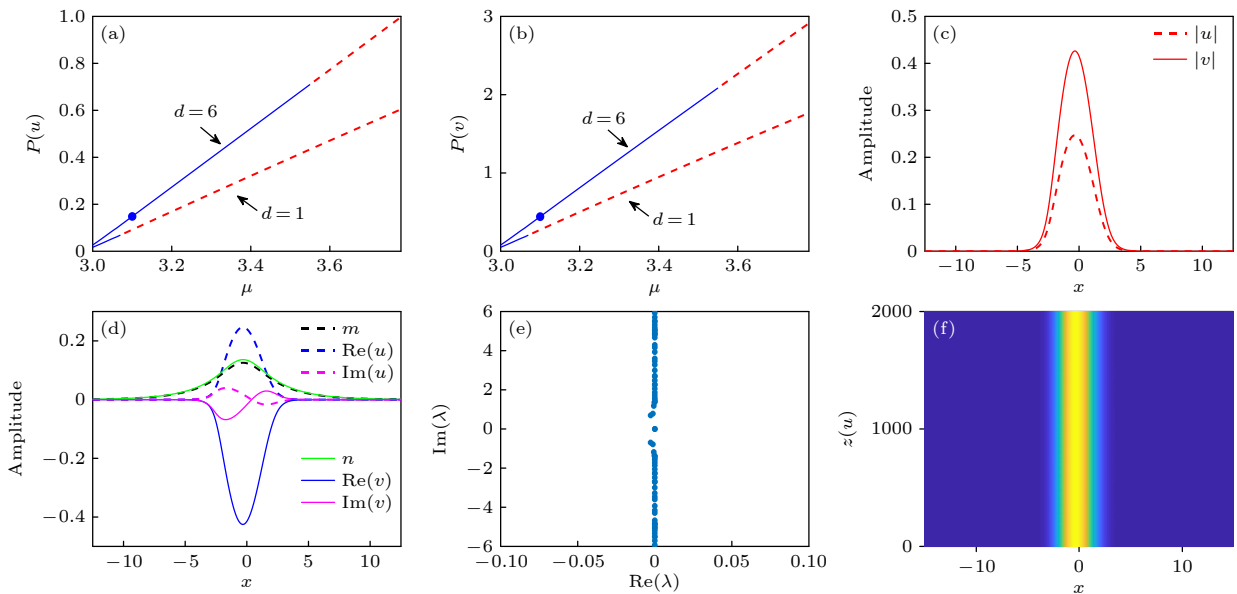


图 5 (a), (b) 分别为 u 和 v 分量在 $\mu_4 < \mu < \mu_3$ 这一区间对应的功率曲线图; (c) 蓝色加粗点 $\mu = 3.1, d = 6$ 时两分量的模; (d)–(f) 分别为在 $\mu = 3.1, d = 6$ 时孤子和折射率的轮廓图, 稳定性分析以及加了 1% 白噪声的传输情况. 其他参数的选取为 $a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 5.5, b_2 = 2, \gamma = 0.3$

Fig. 5. (a), (b) Power diagrams corresponding to the u and v components in the interval of $\mu_4 < \mu < \mu_3$; (c) the modulus of u and v when $\mu = 3.1$ and $d = 6$ (blue bold dot); (d)–(f) profile plots of soliton and refractive index, stability analysis, and transmission with 1% white noise for $\mu = 3.1$ and $d = 6$, respectively. The other parameters are $a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 5.5, b_2 = 2, \gamma = 0.3$.

3.2 相变以上的孤子及其稳定性

选取 $\gamma = -0.3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 进行讨论. 由图 1(d) 可以发现线性谱虚部不为零, 此时发生了

相变. 离散的几个特征值从大到小分别为 $\mu''_1 = 4.085$, $\mu''_2 = 3.021$. 由图 7 可以发现, 当 $\mu > \mu''_1$ 时, 从 μ''_1 处分叉出连续的基态孤子族. 折射率为高斯波包形. 如图 7(a) 和图 7(b) 所示, 功率随着 μ 值的

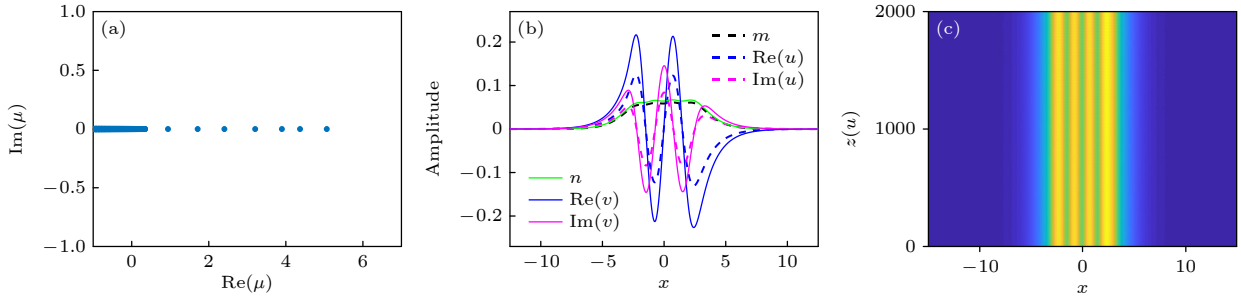


图 6 (a) $\gamma = 0.3$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.6$ 参数下的线性谱; (b), (c) 分别为 $\mu = 1.00$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.6$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = 0.3$, $d = 1$ 参数下的 u, v, m, n 的轮廓图和 u 分量的传输图

Fig. 6. (a) Linear spectrum of μ at the parameter $\gamma = 0.3$, $a_1 = 0.2$, and $a_2 = 0.6$; (b), (c) profile plots of soliton and refractive index and transmission with 1% white noise for $\mu = 1.00$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.6$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = 0.3$, $d = 1$, respectively.

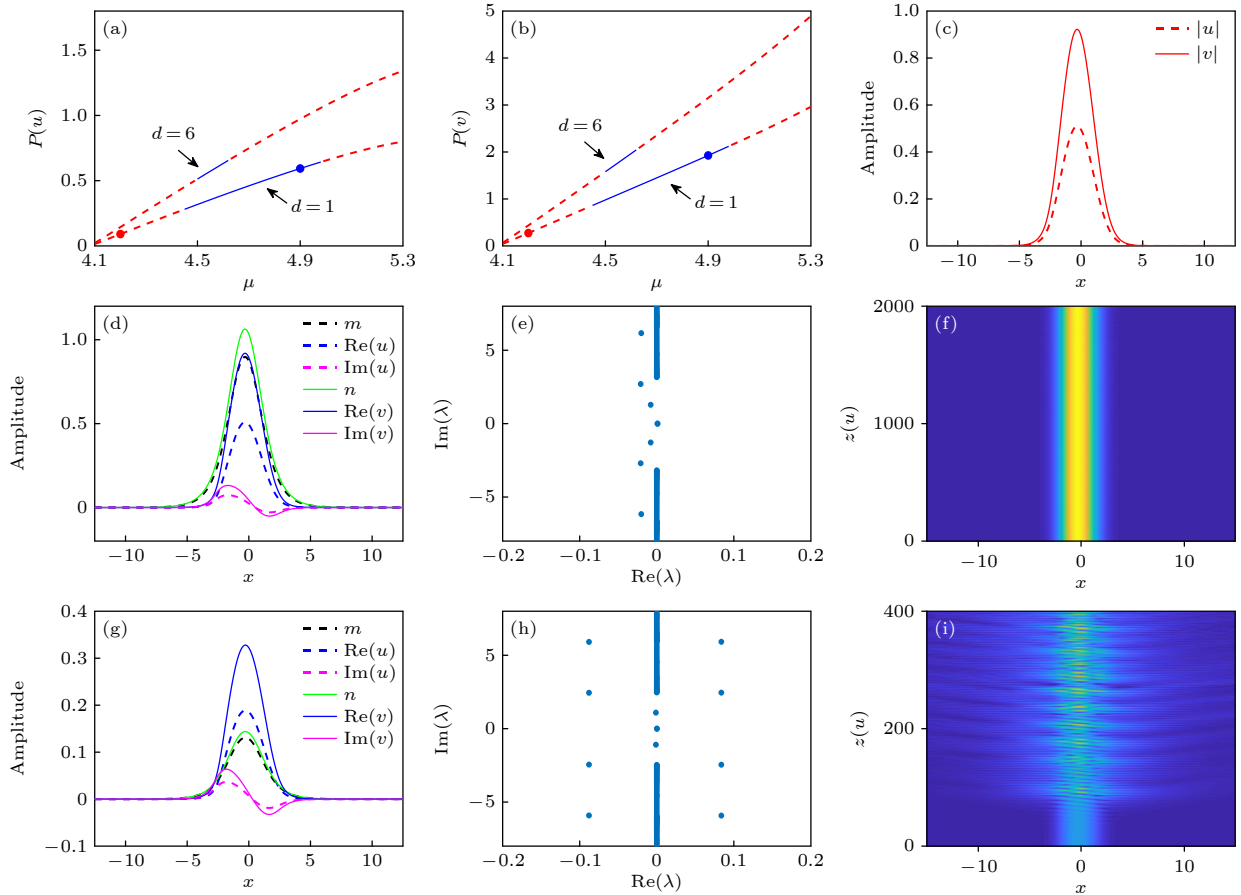


图 7 (a), (b) 分别为 u 和 v 分量在 $\mu > \mu''_1$ 这一区间对应的功率曲线图; (c) 蓝色加粗点 $\mu = 4.9$, $d = 1$ 时两分量的模; (d) 蓝色加粗点 $\mu = 4.9$, $d = 1$ 时的 u, v, m, n ; (e) $\mu = 4.9$, $d = 1$ 时的稳定性分析; (f) $\mu = 4.9$, $d = 1$ 时加了 1% 白噪声后 u 分量的传输; (g)–(i) 分别为红色加粗点处 $\mu = 4.2$, $d = 1$ 时对应的图; 其他参数的选取为 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = -0.3$

Fig. 7. (a), (b) The power diagrams corresponding to the u and v components in the interval of $\mu > \mu''_1$; (c) the modulus of u and v when $\mu = 4.9$ and $d = 1$ (blue bold dot); (d) the contours of the soliton and refractive index at $\mu = 4.9$ and $d = 1$; (e) stability analysis when $\mu = 4.9$ and $d = 1$; (f) the stable propagation of the u component after adding 1% random noise when $\mu = 4.9$ and $d = 1$; (g)–(i) the corresponding diagrams when $\mu = 4.2$ and $d = 1$ (red bold dot), respectively. The other parameters are $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 5.5$, $b_2 = 2$, $\gamma = -0.3$.

增大而增大, $P(u)$ 增幅较小处于较低功率水平, $P(v)$ 一直增大增幅较快. 非局域程度的增加也会使功率增大. 选取 $4.10 \leq \mu \leq 5.30$ 范围, 当 $d = 1$ 时, 稳定区域为 $4.45 \leq \mu \leq 4.98$; 当 $d = 6$ 时, 稳定区域为 $4.50 \leq \mu \leq 4.62$. 可以发现此时稳定范围与相变以下差异较大, 稳定区域在功率增大到一定值时才出现, 并且随着 d 的增大而减小. 选取了 $\mu = 4.9$, $d = 1$; $\mu = 4.2$, $d = 1$ 这两个点具体表明其稳定性. 发现前者线性稳定性分析结果不存在正实部, 数值演化结果也显示能稳定传输到 2000, 为稳定孤子解 (见图 7(e) 和图 7(f)); 后者线性稳定性分析结果显示为不稳定, 数值演化也证明了它为不稳定的孤子解 (见图 7(h) 和图 7(i)). 此外, 研究还发现从 μ_0' 处可以分叉出连续的偶极孤子族, 但不存在稳定的偶极孤子.

4 结 论

研究具有非 PT 对称复数势的非线性耦合器中的非局域孤子, 得到多种类型的孤子, 并对其稳定性展开讨论. 在相变以下, 基态孤子、偶极孤子、多极孤子均在相对功率较低处能稳定传输, 基态孤子的稳定范围相对较大. 这些孤子族从其对应线性谱的离散特征值处分叉出来, 每个区间对应同一类型的孤子族. 非局域程度会对孤子产生影响, 结果表明非局域程度越大, 各个类型孤子的功率都越大. 非局域程度还会影响稳定孤子存在的范围, 在传播常数大于最大离散特征值时, 非局域程度越大, 稳定区间越小; 当传播常数小于最大离散特征值时, d 越大, 稳定区间反而越大. 随着耦合系数的改变, 线性谱离散特征值也发生改变, 发现耦合系数会影响孤子族的排布顺序. 相变以上, 基态孤子在功率增大到一定值时才开始稳定, 并且稳定区域较小. 非局域程度也对相变以上孤子产生了影响. 基态孤子的功率随着非局域程度的增加而增大, 稳定区域随着非局域程度的增大而减小. 另外, 从第二大离散特征值处会分叉出偶极孤子族, 但不存在稳定区域. 我们还发现此模型下孤子稳定性分析结果中的特征值均以共轭对 (λ, λ^*) 的形式出现.

参考文献

- [1] Jensen S M 1982 *IEEE J. Quantum Electron.* **18** 1580
- [2] Trillo S, Wabnitz S, Wright E M, Stegeman G I 1988 *Opt. Lett.* **13** 672
- [3] Abdullaev F K, Abrarov R M, Darmanyan S A 1989 *Opt. Lett.* **14** 131
- [4] Paré C, Florjańczyk M 1990 *Phys. Rev. A* **41** 6287
- [5] Mak W C K, Malomed B A, Chu P L 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066610
- [6] Herring G, Kevrekidis P G, Malomed B A, Carretero-González R, Frantzeskakis D J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 066606
- [7] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [8] Królikowski W, Bang O, Nikolov N I, Neshev D, Wyller J, Rasmussen J J, Edmundson D 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** S288
- [9] Peccianti M, Brzdakiewicz K A, Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [10] Pérez-García V M, Konotop V V, García-Ripoll J J 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4300
- [11] Bang O, Królikowski W, Wyller J, Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046619
- [12] Ye F W, Dong L W, Hu B 2009 *Opt. Lett.* **34** 584
- [13] Chen W, Wang Q, Shi J L, Shen M 2017 *Opt. Commun.* **403** 22
- [14] Guo J L, Yang Z J, Song L M, Pang Z G 2020 *Nonlinear Dynam.* **101** 1147
- [15] Guo J L, Yang Z J, Li X L, Zhang S M 2022 *Chin. Phys. B* **31** 014203
- [16] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 073901
- [17] Peccianti M, Conti C, Assanto G 2005 *Opt. Lett.* **30** 415
- [18] Rotschild C, Cohen O, Manela O, Segev M, Carmon T 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904
- [19] Królikowski W, Saffinan M, Luther-Davies B, Denz C 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3240
- [20] Mamaev A V, Zozulya A A, Mezentsev V K, Anderson D Z, Saffinan M 1997 *Phys. Rev. A* **56** R1110
- [21] Wand M, Schindlmayr A, Meier T, Förstner J 2011 *Phys. Status Solidi B* **248** 887
- [22] Dang Y L, Li H J, Lin J 2017 *Nonlinear Dynam.* **88** 489
- [23] Gao Z J, Dang Y L, Lin J 2018 *Opt. Commun.* **426** 302
- [24] Li S Q, Zhang X, Lin J 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 234207 (in Chinese) [李森清, 张肖, 林机 2022 物理学报 **71** 234207]
- [25] Wang Q, Mihalache D, Belic M, Zeng L W, Lin J 2023 *Opt. Lett.* **48** 747
- [26] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [27] Wang H, Wang J D 2011 *Opt. Express* **19** 4030
- [28] Abdullaev F K, Kartashov Y K, Konotop V V, Zezyulin D A 2011 *Phys. Rev. A* **83** 041805
- [29] Nixon S, Ge L J, Yang J K 2012 *Phys. Rev. A* **85** 023822
- [30] Cannata F, Junker G, Trost J 1998 *Phys. Lett. A* **246** 219
- [31] Miri M A, Heinrich M, Christodoulides D N 2013 *Phys. Rev. A* **87** 043819
- [32] Tsoy E N, Allayarov I M, Abdullaev F K 2014 *Opt. Lett.* **39** 4215
- [33] Konotop V V, Zezyulin D A 2014 *Opt. Lett.* **39** 5535
- [34] Nixon S, Yang J K 2016 *Stud. Appl. Math.* **136** 459
- [35] Yang J K, Nixon S 2016 *Phys. Lett. A* **380** 3803
- [36] Zhu X, He Y J 2018 *Opt. Express* **26** 26511
- [37] Zhu X, Peng X, Qiu Y L, Wang H C, He Y J 2020 *New J. Phys.* **22** 033035
- [38] Yang J K 2021 *Stud. Appl. Math.* **147** 4
- [39] Zhu X, Liao S W, Cai Z, Qiu Y L, He Y J 2021 *Chaos Solitons Fract.* **146** 110837
- [40] Zhu X, Cai Z, Liu J L, Liao S W, He Y J 2022 *Nonlinear Dynam.* **108** 2563

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

Nonlocal soliton in non-parity-time-symmetric coupler*Jiang Hong-Fan Lin Ji Hu Bei-Bei Zhang Xiao[†]*(Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)*

(Received 17 January 2023; revised manuscript received 12 February 2023)

Abstract

Parity-time (PT) symmetric is not a necessary condition for achieving a real spectrum and some studies about realizing real spectra in non-PT-symmetric systems with arbitrary gain–loss profiles have been presented recently. By tuning the free parameters in non-PT-symmetric potentials, phase transition could also be induced. Above phase transition point, discrete complex eigenvalues bifurcate out from continuous real eigenvalues in the interior of the continuous spectrum. In this work, we investigate the existence and stability of solitons in nonlocal nonlinear couplers with non-PT-symmetric complex potentials both below and above phase transition. There are several discrete eigenvalues in the linear spectra of the non-PT-symmetric system used here. With the square-operator iteration method, we find that different continuous families of solitons can bifurcate from different discrete linear eigenvalues. Moreover, linear-stability analysis collaborated with direct numerical propagation simulations demonstrates that the nonlocal solitons can be stable in a range of parameter values. we first address the cases below the phase transition. To be specific, when we fix the coupling coefficient and vary the degree of nonlocality, it's found that fundamental solitons, dipole solitons, tripolar solitons, quadrupole solitons bifurcate from the largest, the second-largest, the third-largest and the fifth-largest discrete eigenvalue, respectively. These nonlocal solitons are all stable in the low power region. With an increase of the degree of nonlocality, the stability region shrinks for the fundamental solitons while it widens for the dipole and multipole solitons. At the same time, the power of all the stable solitons increases with the increase of the degree of nonlocality. By varying the coupling coefficient, the arrangement of soliton families emerging in the discrete interval of the linear spectrum can be changed. For example, the dipole solitons bifurcate from the third-or fourth-largest discrete eigenvalue while the tripolar solitons bifurcate from the fifth largest discrete eigenvalue. Above phase transition, the fundamental solitons are unstable in the low and high power region but are stable in the moderate power region. The stability region shrinks with the increasing degree of nonlocality. We also find the family of dipole solitons bifurcates from the second-largest discrete eigenvalue, but all the dipole solitons are unstable. In addition, we find that the eigenvalues in linear-stability spectra of solitons emerge as conjugation pairs.

Keywords: non-parity-time-symmetry, nonlocal, nonlinear coupler, stability**PACS:** 42.79.Gn, 42.65.Tg, 42.82.Et**DOI:** [10.7498/aps.72.20230082](https://doi.org/10.7498/aps.72.20230082)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12004338, 11835011) and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2022M712833).

† Corresponding author. E-mail: zhangxiao@zjnu.cn



非宇称时间对称耦合器中的非局域孤子

蒋宏帆 林机 胡贝贝 张肖

Nonlocal soliton in non-parity-time-symmetric coupler

Jiang Hong-Fan Lin Ji Hu Bei-Bei Zhang Xiao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 104205 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230082

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230082>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

熔融耦合器中耦合模式与新型孤子结构

Coupled mode and novel soliton structure in fused coupler

物理学报. 2022, 71(23): 234207 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221273>

非局域非线性耦合器中暗孤子的传输

Propagation of dark soliton in nonlocal nonlinear coupler

物理学报. 2021, 70(18): 184206 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210275>

周期驱动的二能级系统中的准宇称-时间对称动力学

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system

物理学报. 2022, 71(7): 074207 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220270>

宇称-时间对称与反对称研究进展

Research progress of parity-time symmetry and anti-symmetry

物理学报. 2022, 71(17): 171101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221323>

高维宇称-时间对称系统中的信息恢复与临界性

Information retrieval and criticality in high-dimensional parity-time-symmetric systems

物理学报. 2022, 71(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220511>

非局域高次非线性介质中的多极暗孤子

Multi-pole dark solitons in nonlocal and cubic-quintic nonlinear medium

物理学报. 2018, 67(21): 214207 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180786>