

基于原子核密度的核电荷半径新关系*

焦宝宝^{1)2)†}

1) (东华理工大学, 核技术应用教育部工程研究中心, 南昌 330013)

2) (东华理工大学核科学与工程学院, 南昌 330013)

(2023年2月1日收到; 2023年2月19日收到修改稿)

从核质量出发系统地研究核电荷半径, 进而得到核电荷半径的计算值和预言值. 运用 AME2020 数据库结合 CR2013 数据库得到已知质量且已知半径的原子核 ($Z, N \geq 8$) 884 个, 计算得到 884 个原子核密度. 研究原子核密度得到常参数经验公式, 利用此经验公式结合 AME2020 数据库得到核电荷半径的计算值与实验值之间的均方根误差 $\sigma = 0.093$ fm. 考虑到中子数对原子核密度的影响, 添加了中子因子 $1/N$ 进行修正, 均方根误差减少为 0.047 fm. 再添加中子壳层效应进行修正, 均方根误差减小至 0.034 fm. 基于修正后的经验公式结合 AME2020 数据库得到 $Z, N \geq 8$ 的 1573 个核电荷半径预言值, 其中一些预言值与近些年测得实验值的对比结果说明利用此关系得到的预言值具有一定的意义. 此外, 剔除一些特殊的壳层后, 剩余 791 个核电荷半径常参数经验公式计算值的均方根误差为 $\sigma = 0.063$ fm, 修正后降至 $\sigma = 0.032$ fm. 研究结果表明本文提出的核电荷半径关系具有一定的简便性和可靠性, 可以与 $A^{1/3}$ 律和 $Z^{1/3}$ 律修正后的全局核电荷半径关系相媲美. 最后, 本文又引入 Levenberg-Marquardt (L-M) 算法训练前馈神经网络分别对 884 和 791 个原子核密度进行建模计算, 均方根误差分别为 0.018 fm 和 0.014 fm, 比修正后经验公式的误差减小约 50%, 得到的预言值与近几年测得的实验值也较接近.

关键词: 核电荷半径, 中子壳层效应, 神经网络**PACS:** 21.10.-k, 21.10.Ft, 07.05.Mh**DOI:** 10.7498/aps.72.20230126

1 引言

电荷半径、结合能、半衰期、形变等是原子核性质基本的物理量, 对它们的描述和预言是原子核性质研究的基本方法. 其中核电荷半径 (CR) 的描述和预言受到较多的关注, 其对核力的性质、核物质密度以及原子核结构等的研究具有重要意义. 核电荷半径的系统性研究在原子核物理、天体物理等领域中都具有重要作用.

利用放射性离子束和超高灵敏度激光光谱技

术^[1-3]测得许多原子核的均方根电荷半径. 2013 年发表的核电荷半径数据库 CR2013^[4,5]中已知的核电荷半径约 909 个, 比 CR2004^[6]数据库多大约 110 个实验值, 比 CR1999^[7]数据库多大约 514 个实验值. 近几年, 实验上也得到一些核电荷半径的测量值^[8-11]. 此外, 理论模型与关系式也是研究核电荷半径的重要方法, 这些模型和关系式主要有三方面: 一是从 $A^{1/3}$ 律和 $Z^{1/3}$ 律公式出发, 然后进行修正, 例如同位旋^[12,13]、Casten 因子项和奇偶摆动项^[14,15]等, 进而提高核电荷半径描述和预言的精确性; 二是通过微观模型^[16-18]、宏观-微观方法^[19,20]、

* 核技术应用教育部工程研究中心开放基金 (批准号: HJSJYB2022-9)、江西省教育厅科学技术研究项目 (批准号: GJJ2200782)、东华理工大学实验技术开发项目 (批准号: DHSY-202251) 和东华理工大学博士科研启动基金 (批准号: DHBK2019151) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: baobaojiao91@126.com

唯象理论^[21,22]、Hartree-Fock-Bogoliubov^[23,24]等模型来研究核电荷半径;三是利用相邻核电荷半径之间的局部关系描述和预言核电荷半径^[25-30]。

核质量的描述和预言也是人们关注的重点,一般的质量关系大概分为两类.一类是经典的全局质量关系,如 Weizsäcker 公式^[31]、Finite Range Droplet 模型^[32],还有近年来相继出现的理论,如相对论平均场下的 BCS 理论^[33]、Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov 理论^[34]、Duflo-Zuker 模型^[35,36]、Macroscopic-Microscopic 质量公式^[37]等.二是较精确的局域质量关系,如 Garvey-Kelson^[38] (G-K) 的区域质量关系和质子-中子剩余相互作用的区域质量关系^[39-43].近些年,机器学习广泛运用于核物理的研究中^[42,44-50],尤其是核质量与电荷半径的研究.文献^[44]使用贝叶斯神经网络基于全局质量关系 (Duflo-Zuker 质量公式) 研究核质量,计算值与实验值的均方根偏差由 503 keV 减小到 286 keV;文献^[45]利用贝叶斯神经网络方法结合 Duflo-Zuker 模型得到的预言值和实验值的均方根误差是 400 keV 左右;文献^[46]利用相当于鲁棒的 Levenberg-Marquardt (L-M) 算法训练神经网络研究 AME2012 数据库,对于一个简单的液滴公式,预测值与 2353 个实验已知质量的均方根偏差从 2.455 MeV 减小到 0.235 MeV;文献^[47]提出的 BML (Bayesian machine learning) 核质量模型得到的计算值与 AME2016^[51] 的实验值之间的均方根偏差仅为 84 keV,进一步提高了原子核质量模型的精确性.由此可见,机器学习的使用很大程度上降低了拟合模型的误差.

2021 年发布的核质量数据库 AME2020^[52] 已测得的核质量约 2550 个,而最新的核电荷半径数据库 CR2013 中测得的值仅有 909 个,由此可知,还有约 63% 的原子核已知核质量但核电荷半径却未知.尽管原子核质量和电荷半径的研究一直以来都备受关注,但是很少有研究利用核质量来描述和预言核电荷半径.本文从核质量出发系统地研究核电荷半径.首先,利用 AME2020 数据库结合 CR2013 数据库得到 884 个原子核密度,对这些原子核密度进行拟合得到常参数经验公式,通过此经验公式结合 AME2020 数据库得到核电荷半径的计算值.然后,添加中子因子和中子壳层效应^[30]对常参数经验公式进行修正,进而提高核电荷半径计算值和预言值的精确性;同时剔除一些特殊的壳层进行研

究,进一步提高核电荷半径的精确度;此外又利用 L-M 算法训练前馈神经网络结合原子核密度来描述和预言核电荷半径;把上述得到的预言值与近些年得到的测量值^[8-11]进行对比.最后,对本文进行分析和总结.

2 原子核密度

近些年发布的核质量数据库 AME2020 和核电荷半径数据库 CR2013 表明,核质量测量的进度快于核电荷半径,且对原子核质量研究已有很多精确模型.本文从核质量数据库出发进行研究,结合原子核密度经验公式得到核电荷半径的计算值和预言值.由文献^[15]的计算可知,大部分的原子核形变参数都很小,这说明大多数原子核是偏离不大的非球形核.假设原子核近似为球形核,电荷半径为 R 且核质量 M 近似等于原子质量,则可得原子核密度 ρ_m :

$$\rho_m = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (1)$$

因核电荷有限分布引起的 1s 能级移动很小,测量其得到的误差较大^[14],故将中子数 $N < 8$ 和质子数 $Z < 8$ 的核素去除.在数据库 CR2013^[4,5] 中 $Z, N \geq 8$ 的原子核电荷半径一共有 884 个,这 884 个原子核在 AME2020^[52] 质量数据库中全部有其对应的核质量.图 1 中的点代表 884 个原子核密度 ρ_m ,横坐标表示中子数与质子数的比值 N/Z (中质比),纵坐标表示原子核密度.对这 884 个原子核密度 ρ_m 利用最小二乘法进行拟合,得到原子核密度常参数经验公式:

$$\rho_m^{\text{emp}} = C, \quad (2)$$

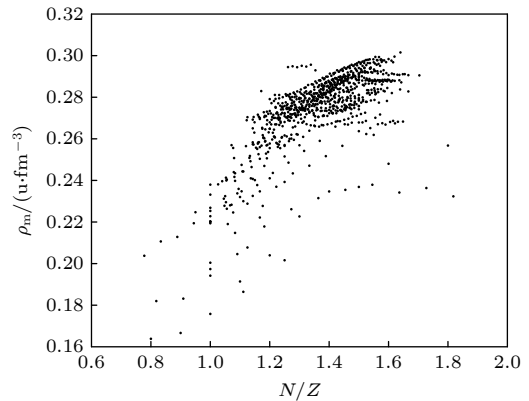


图 1 884 个原子核密度 ρ_m

Fig. 1. The ρ_m of 884 nuclei.

其中 ρ_m^{emp} 为原子核密度, C 是常数, 数值为 $0.278 (\pm 0.020) \text{ u/fm}^3$. 文献 [53] 利用原子核质量与物质半径得到原子核质量密度, 研究发现核物质密度近似是一个常数. 本文基于原子核质量与电荷半径得到一系列的原子核密度, 最后得到原子核密度也为常数. 虽然在计算时使用的半径不同, 但是得到的密度都近似为一个常数, 这也说明本文提出的常数经验公式具有一定的可靠性.

由 (1) 式和 (2) 式得到原子核电荷半径计算的公式:

$$R^{\text{cal}} = \left[\frac{M}{(4/3)\pi\rho_m^{\text{emp}}} \right]^{1/3}, \quad (3)$$

利用 (3) 式结合 AME2020 数据库得到核电荷半径的理论计算值, 然后得到计算值与 CR2013 中的实验值之间的均方根误差 $\sigma = 0.093 \text{ fm}$. 由文献 [14, 15] 可知, 本文得到的均方根误差比 $A^{1/3}$ 律得到的 $\sigma = 0.1224 \text{ fm}$ 小, 与 $Z^{1/3}$ 律描述核电荷半径结果 $\sigma = 0.094 \text{ fm}$ 的精确度相当. 以上结果表明本文提出的公式可与 $A^{1/3}$ 律、 $Z^{1/3}$ 律公式相媲美.

此外, 本文也通过 $A^{1/3}$ 律公式 ($R = \sqrt{\frac{3}{5}}r_0A^{1/3}$, $r_0 = 1.2269 \text{ fm}$) 分析这种常参数现象:

$$\rho_m^{\text{th1}} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}r_0\right)^3 A}, \quad (4)$$

利用 (4) 式得到 884 个 ρ_m^{th1} 进行最小二乘法拟合, 得到的常参数也是 $0.278 (\pm 0.001) \text{ u/fm}^3$, 这与式 (1) 得到的常参数相吻合. 最后, 基于 $Z^{1/3}$ 律公式 ($R = \sqrt{\frac{3}{5}}r_0Z^{1/3}$, $r_0 = 1.639 \text{ fm}$) 也对这种常参数现象进行研究:

$$\rho_m^{\text{th2}} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}r_0\right)^3 Z}, \quad (5)$$

由 (5) 式得 884 个原子核密度 ρ_m^{th2} , 利用最小二乘法进行拟合得到的常数约等于 $0.276 (\pm 0.018) \text{ u/fm}^3$, 与 (1) 式得到的常数 0.278 u/fm^3 接近, 这些结果都表明本文提出的常数经验公式具有一定的可行性.

3 核电荷半径的描述和预言

3.1 核电荷半径的描述

由图 1 可知, 大多数的原子核密度 ρ_m 具有一

定的聚集性, 但是有些特殊的原子核, 因其核电荷半径偏大或偏小, 导致有些原子核密度 ρ_m 也会偏大或偏小. 此外, 常数经验公式对一些原子核密度拟合的效果不好甚至偏差还比较大, 因此本节增加了修正以提高 ρ_m 关系的精确度. 图 2 中的红色空心圈代表 884 个原子核密度 ρ_m , 绿色折线表示基于中子数 N 相同的原子核密度的平均值得到原子核密度曲线, 由此曲线的特点研究分析得到原子核密度 ρ_m^{emp} 的经验公式, 即黑色光滑曲线:

$$\rho_m^{\text{emp}} = C + a/N, \quad (6)$$

其中 C 是常数 $0.293 (\pm 0.008) \text{ u/fm}^3$, a 是常数 $-1.029 (\pm 0.636) \text{ u/fm}^3$. 利用经验公式 (6) 结合 (3) 式得到核电荷半径的计算值与 CR2013 中的实验值进行对比, 均方根误差 $\sigma = 0.047 \text{ fm}$, 比经验公式 (2) 的精确度提高约 50%. 由此可知, 中子因子 $1/N$ 对原子核密度 ρ_m 经验公式精确度的提高具有重要意义.

基于中子壳层效应的影响, 由图 2 中的原子核密度平均值折线 (绿色折线) 和平滑拟合曲线 (黑色平滑曲线) 可知, 当 $N \geq 29$ 时, 原子核密度平均值折线在新中子壳层开始以及半填充中子壳层中子数附近时变化剧烈 (绿色折线). 在新中子壳层开始时达到最大值, 接着开始减小, 在中间某点降到最小值, 然后逐渐增大, 直至到达下一个中子壳层开始时达到新的最大值, 这种规律导致 ρ_m^{emp} 的明显偏差. 为了进一步改善 ρ_m^{emp} 关系, 对不同的壳层进

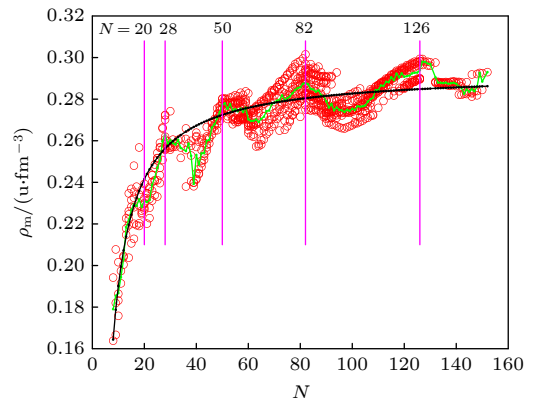


图 2 884 个原子核密度 (绿色折线表示的是原子核密度平均值线, 黑色光滑曲线是基于 (6) 式得到的拟合线, 粉色竖线分别表示中子数 $N = 20, 28, 50, 82$ 和 126 的位置)

Fig. 2. The green zigzag line is plotted by using the average values of ρ_m for nuclei with the same mass number N . The black curve is plotted in terms of empirical formula Eq. (6). The vertical lines are plotted at the major neutron closure $N = 20, 28, 50, 82, 126$.

行经验修正, 进而来描述 ρ_m^{emp} 对 N 和壳层的依赖性:

$$\rho_m^{\text{emp}} = C_n + a_n/N, \quad (7)$$

根据中子主壳层分为 6 个大区域, 再结合半填充中子壳层 (即中子数为 39, 66, 104), 一共分为 9 个研究区域. 这 9 个区域都符合 (6) 式模型, 表 1 即为基于原子核密度实验值得到各壳层区域优化后的参数值 C_n 和 a_n , 其中 δ_1 和 δ_2 分别为参数 C_n 和 a_n 的不确定度. 利用各壳层优化参数得到核电荷半径的计算值与实验值之间的均方根误差由 $\sigma = 0.047$ fm 降低为 $\sigma = 0.034$ fm. 由此可知, 中子壳层效应对原子核密度具有一定的影响.

表 1 不同壳层范围的拟合参数 (单位: u/fm³)

Table 1. The parameter of different shell regions (in units of u/fm³).

Region	C_n	δ_1	a_n	δ_2
$8 \leq N \leq 20$	0.276	0.010	-0.828	0.153
$21 \leq N \leq 28$	0.363	0.007	-2.86	0.171
$29 \leq N \leq 39$	0.206	0.007	1.649	0.256
$40 \leq N \leq 50$	0.383	0.005	-5.387	0.217
$51 \leq N \leq 66$	0.242	0.005	1.812	0.316
$67 \leq N \leq 82$	0.345	0.007	-4.754	0.557
$83 \leq N \leq 104$	0.227	0.006	4.774	0.573
$105 \leq N \leq 126$	0.371	0.003	-9.614	0.433
$127 \leq N$	0.230	0.003	8.088	0.516

为了更全面地诠释核电荷半径计算值与实验值之间的差值, 如图 3 所示, 分别得到实验值与 (2) 式、(6) 式和 (7) 式计算值的差值 ΔR . 图 3(a) 代表实验值与 (2) 式理论值的差值 ΔR , 由图可知, 大部分 ΔR 落在 -0.093 fm 到 0.093 fm 之间, 在 $N \leq 46$ 时, 计算值与实验值的差值较大, 尤其是当 $N \leq 28$ 时差值更大; 由图也知, 当 N 在幻数附近或一些特殊点时, 误差会出现区域偏大的情况. 由图 3(b) 可知, 中子因子 $1/N$ 修正添加后整体误差的降低比较明显, 尤其是在 $N \leq 28$ 的区域; 大部分 ΔR 落在 -0.047 fm 到 0.047 fm 的区域, 但是在特殊点附近出现误差偏大的情况还是没有改善. 为了改善这种情况, 又添加了中子壳层效应修正, 由图 3(c) 可知, 修正后整体的误差值有所减小, 大部分 ΔR 落在 $[-0.034, 0.034]$ fm 的范围. 值得一提的是, 在中子幻数附近或特殊点出现误差偏大的情况明显改善, 差值均匀分散在零点两边. 以上对比结果说明中子因子 $1/N$ 修正和中子壳层效应修正的添加使得经验公式能够很好地描述核电荷半径.

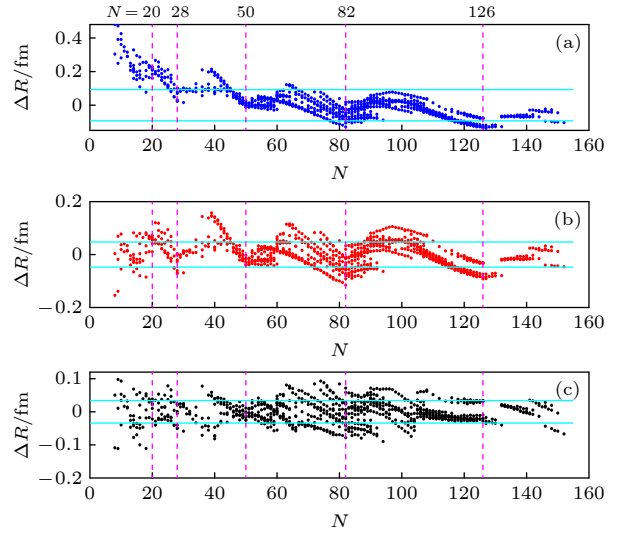


图 3 从上到下依次为 884 个核电荷半径的实验值与 (2) 式、(6) 式、(7) 式理论计算值的差值. 粉色垂直虚线分别表示中子数 $N = 20, 28, 50, 82$ 和 126 的位置

Fig. 3. The difference between the experimental value of 884 nuclear charge radii and the theoretical value calculated by Eq.(2), Eq.(6) and Eq.(7), respectively. A dash vertical line is plotted at the major neutron closure $N = 20, 28, 50, 82$ and 126 .

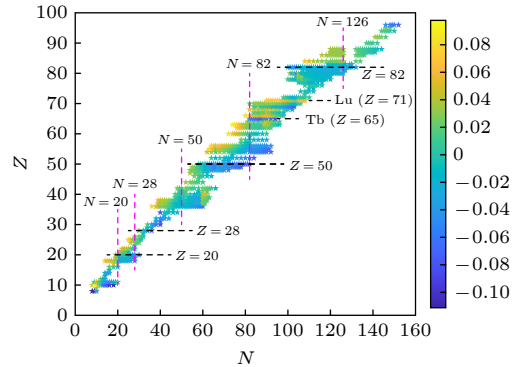


图 4 核电荷半径的计算值与 CR2013 数据库中实验值之间的误差. 粉色垂直虚线分别表示中子数 $N = 20, 28, 50, 82$ 和 126 的位置, 黑色横虚线分别表示质子数 $Z = 20, 28, 50$ 和 82 的位置 (单位: fm)

Fig. 4. The difference between the calculated values of nuclear charge radius and experimental values in the CR2013 database. A dash vertical line is plotted at the major neutron closure $N = 20, 28, 50, 82$ and 126 . The dash horizontal line is plotted at the major proton closure $Z = 20, 28, 50$ and 82 (in units of fm).

图 4 是基于各壳层参数优化后得到的核电荷半径计算值与实验值的差值图. 可以看出同位素链两端的计算值误差更大, 即当中质比 N/Z 太小或太大时, 计算值与实验值的误差较大. 由图 3 和图 4 可知, 修正后的经验公式误差有所降低, 但是仍然存在一些误差较大的区域, 尤其是在 $Z = 30$,

$N = 40$ 和 $Z = 52$, $N = 82$ 附近的丰中子区域. 此外, 本文是利用原子核质量和电荷半径进行计算的, 所以本文的经验公式在计算和预言那些形变比较大或受到壳层影响的核电荷半径时误差较大. 由图 4 可以看出 Tb ($Z = 65$) 和 Lu ($Z = 71$) 这两个同位素链核电荷半径的计算值与实验值之间的误差都偏大, 研究发现这两个同位素链核电荷半径的实验值比较特殊, 导致这些核素的 ρ_m 偏大或偏小远离经验公式, 得到的核电荷半径误差也会偏大, 图 5 列出了这两个同位素链对应的核质量和核电荷半径.

图 5(a),(b) 中的矩形方框分别代表 Tb ($Z = 65$) 同位素链的核电荷半径与核质量. 由图可知, Tb ($Z = 65$) 同位素链的核电荷半径要比相邻 Gd ($Z = 64$) 和 Dy ($Z = 66$) 同位素链的核电荷半径小很多, 甚至比 Eu ($Z = 63$) 小, 而同位素链的核质量没有相应变化, 导致 Tb 同位素链的原子核密度偏大且远离经验统计公式, 进而使得 Tb 同位素链核电荷半径计算值要比实验值要偏大很多.

图 5(c), (d) 中的空心圈代表 Lu ($Z = 71$) 同位素链的核电荷半径与核质量, 这与 Tb ($Z = 65$) 同位素链核电荷半径的特点正好相反, 比相邻 Yb ($Z = 70$) 和 Hf ($Z = 72$) 同位素链的核电荷半径要大很多, 这导致 Lu ($Z = 71$) 同位素链核电荷半径的计算值要比实验值偏小很多. 这也就解释了 Tb ($Z = 65$) 和 Lu ($Z = 71$) 两个同位素链核电荷半径计算值与实验值之间差值偏大的原因. 导致这种偏差较大的物理原因可能是由核电荷半径的形变引起的, 除此之外, 还有文献 [25, 54] 中描述的可能是由大型实验的不确定性 (约 0.15 fm) 与亚壳引起的.

由图 2 可知, 中子数 $N \leq 28$ 原子核密度 ρ_m 的统计性较差, 因此, 这里只对 $N \geq 29$ 剩余的 791 个原子核密度 ρ_m 进行研究. 基于常参数经验公式 (2) 得到的核电荷半径计算值与实验值之间的均方根误差为 $\sigma = 0.063$ fm; 再添加 $1/N$ 修正时, 均方根误差减小为 $\sigma = 0.046$ fm; 最后添加中子壳层效应修正并结合表 1 的参数得到核电荷半径计

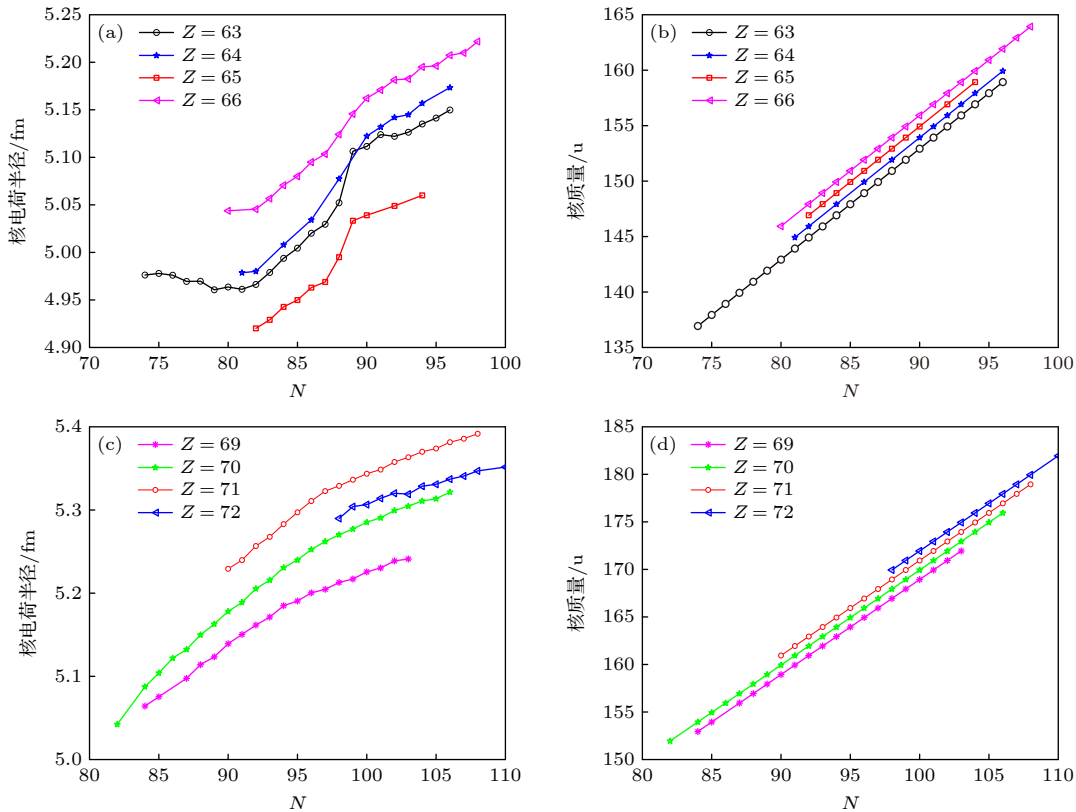


图 5 (a) 和 (b) 分别表示 Eu, Gd, Tb, Dy 同位素链核电荷半径与核质量的实验值; (c) 和 (d) 分别表示 Tm, Yb, Lu, Hf 同位素链核电荷半径与核质量的实验值

Fig. 5. (a) and (b) represent the nuclear charge radii and nuclear mass of Eu, Gd, Tb, Dy elements, respectively; (c) and (d) represent the nuclear charge radii and nuclear mass of Tm, Yb, Lu, Hf elements, respectively.

算值的均方根误差为 $\sigma = 0.032$ fm. 以上研究发现, (2) 式、(6) 式和 (7) 式在统计性较好的区域计算时误差均会减小, 尤其是利用 (2) 式计算时, 均方根误差 $\sigma = 0.063$ fm, 精确度比 0.093 fm 提高约 32%, 这进一步说明大多数原子核密度 (约等于 0.278 u/fm³) 具有一定的常数特点.

此外, 神经网络广泛运用于核物理 [42,44–50]、大数据分析、自动驾驶、医学诊断等领域, 本文也利用“Neural Net Fitting”函数研究原子核密度前馈神经网络模型. 基于网络函数 Tansig [$f(x) = 2/(1 + e^{-2x}) - 1$] 进行研究, 神经网络结构由输入值 2、隐藏层 20、输出层 1 及输出值 1 组成. 主要步骤如下: 1) 以 884 (791) 个原子核密度实验值及对应的质子数 Z 与中子数 N 作为输入样本; 2) 随机选取训练集、验证集和测试集, 比例分别为 70%, 15% 和 15%; 3) 设置网络参数, 最小全局误差 10^{-7} , 最大训练次数 1000 等; 4) 利用 L-M 算法进行训练, 得到 L-M 算法训练前馈神经网络模型 I (神经网络模型 II). 基于神经网络模型 I 和 II 得到 ρ_m^{emp} 的计算值和预言值, 计算得到核电荷半径的计算值和预言值.

利用神经网络模型 I 得到 884 个原子核密度的拟合值, 结合 AME2020 数据库和 (3) 式得到核电荷半径的计算值. 与 CR2013 数据库中的实验值对比得到 $\sigma = 0.018$ fm, 比修正后经验公式 (7) 计算得到的均方根误差 $\sigma = 0.034$ fm 减小了 47%. 对中子数 $N \geq 29$ 的原子核核电荷半径进行研究可得神经网络模型 II, 进而得到 791 个核电荷半径的计算值与 CR2013 数据库中的实验值之间的均方根误差 $\sigma = 0.014$ fm, 比修正后经验公式的均方根误差 $\sigma = 0.032$ fm 减小了 58%. 图 6(a),(b) 分别表示基于神经网络模型 I 和 II 得到的核电荷半径计算值与实验值之间的差值. 由图可知, 利用神经网络模型得到核电荷半径的误差比经验公式要小, 虽然存在一些误差偏大的区域 ($Z = 65$ 和 $Z = 39, N = 60$ 附近), 但是并不影响整体的计算和预言效果. 计算结果表明利用 L-M 算法训练前馈神经网络模型结合 AME2020 数据库研究核电荷半径的精度优于经验公式. 此外, 也利用 L-M 算法训练前馈神经网络直接对 $Z, N \geq 8$ 的核电荷半径进行研究, 得到的计算值与 CR2013 中实验值之间的均方根误差是 0.021 fm, 而本文中利用原子核密度建模得到的均方根误差为 0.018 fm, 研究结

果表明基于原子核密度建模得到核电荷半径的计算值更精确.

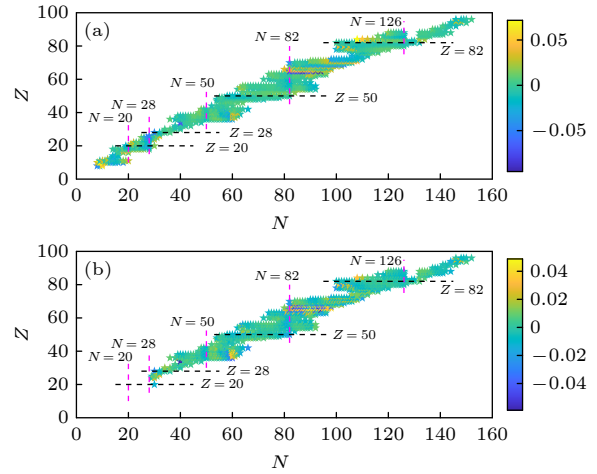


图 6 基于神经网络模型 I 和 II 得到的核电荷半径计算值与实验值之间的差值 (单位: fm)

Fig. 6. The difference between the calculated values of nuclear charge radius (obtained by neural network model I and II) and experimental values in CR2013 database (in units of fm).

3.2 核电荷半径的预言

由 (3) 式可知, 本文提出的关系式预言核电荷半径简单且方便, 基于原子核质量利用 (3) 式结合经验公式 (7) 或神经网络模型就可以预言核电荷半径. 利用 AME2020 [52] 数据库结合 (7) 式或神经网络模型 I 可以得到 $Z, N \geq 8$ 的 1573 个核电荷半径预言值. 图 7 列出一些预言值与近几年实验上新测得的实验值 [8–11] 进行对比, 图中的实心圆点 (Dev1) 和实心五角形 (Dev2) 分别表示基于经验公式 (7) 和神经网络模型 I 得到 ^{37}K , ^{48}K , ^{64}Cu , ^{65}Zn , ^{69}Zn 这 5 个核电荷半径的预言值 R^{cal1} ((3.373 ± 0.053) fm, (3.519 ± 0.052) fm, (3.921 ± 0.052) fm, (3.948 ± 0.052) fm, (4.047 ± 0.051) fm) 和 R^{cal2} ((3.437 ± 0.037) fm, (3.472 ± 0.036) fm, (3.899 ± 0.036) fm, (3.929 ± 0.036) fm, (3.953 ± 0.036) fm) 与近几年新测得的实验值 [8–11] 之间的差值. 对比结果表明, 利用本文提出的关系式结合数据库得到核电荷半径的预言值具有一定的精确性. 虽然有些预言值的误差较大, 如 ^{69}Zn 核素, 这是由于 $N = 40$ 正好处于半填充中子壳层 39 附近, 尽管利用中子壳层效应进行了修正, 但是对于某些原子核效果并不好, 这也说明在中子因子 $1/N$ 和中子壳层效应修正外还有一些待挖掘的物理内涵. 此外, 利用文献 [14] 中

的 (4) 式和 (7) 式 (即 $A^{1/3}$ 律和 $Z^{1/3}$ 律) 两参数经验公式计算得到预言值 ($R^{A^{1/3}}$ 和 $R^{Z^{1/3}}$). 实心矩形 (Dev3) 和实心三角形 (Dev4) 分别代表利用文献 [14] 的 (4) 式与 (7) 式得到的预言值 ($R^{A^{1/3}}$ 和 $R^{Z^{1/3}}$) 与实验值 R^{exp} 之间的误差. 由图 7 可知, 利用本文经验公式得到的预言值与文献 [14] 中 $A^{1/3}$ 律和 $Z^{1/3}$ 律两参数经验公式得到的预言值各有优劣, 但本文中基于神经网络模型得到的预言值则更精确, 这也说明神经网络算法具有较好的精确性.

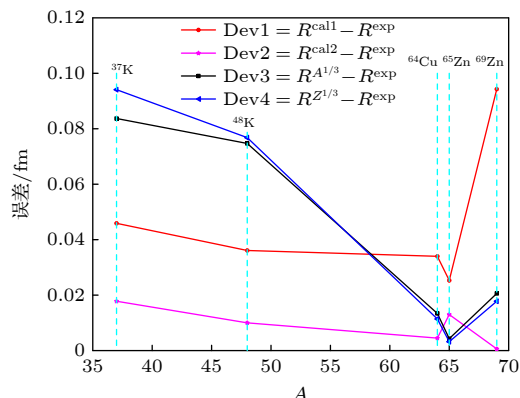


图 7 利用不同模型结合 CR2013 数据库预得到的预言值与近几年测得的实验值 ^{37}K [9], ^{48}K [9], ^{64}Cu [8,10], ^{65}Zn [11], ^{69}Zn [11] 之间的差值

Fig. 7. The difference between the predicted values of nuclear charge radius (obtained by the CR2013 database) and experimental values ^{37}K [9], ^{48}K [9], ^{64}Cu [8,10], ^{65}Zn [11], ^{69}Zn [11] in recent years.

综上所述, 利用本文提出的关系式可以较好地描述与预言核电荷半径. 常参数经验公式的计算结果表明原子核密度具有良好的统计性, 中子因子和中子壳层效应修正的添加提高了核电荷半径计算值和预言值的精确性, 这说明中子因子 $1/N$ 和中子壳层效应与原子核密度具有一定的关联性.

4 结 论

核质量数据库更新的速度非常快, 实验上每年都会新的核质量被测得, 核质量的理论模型和公式也越来越精确, 而且已有的数据库 AME2020 测得核质量的个数要比 CR2013 数据库测得的核电荷半径个数要多. 鉴于此, 本文从核质量出发研究核电荷半径, 探索核质量与核电荷半径之间的关系式, 进而来描述和预言核电荷半径.

基于 AME2020 [52] 和 CR2013 [4,5] 数据库得到

884 个原子核密度, 对这些原子核密度研究得到常参数经验公式, 利用此经验公式结合 (3) 式得到核电荷半径的计算值与实验值之间的均方根误差为 $\sigma = 0.093$ fm. 由于添加了中子因子 $1/N$ 和中子壳层效应的修正, 使得均方根误差由 $\sigma = 0.093$ fm 降到 $\sigma = 0.047$ fm, 最后降为 $\sigma = 0.034$ fm. 运用修正后的经验公式结合 AME2020 核质量数据库得到的预言值具有一定的精确性. 此外, 删除了一些特殊的壳层, 对中子数 $N \geq 29$ 剩余的 791 个原子核进行研究. 基于 (2) 式、(6) 式和 (7) 式得到的均方根误差都有所减小, 最后均方根误差减小为 $\sigma = 0.032$ fm. 最后, 本文又引入 L-M 算法训练前馈神经网络模型分别研究 884 和 791 个原子核密度, 核电荷半径计算值的均方根误差比修正后的经验公式都大幅减小, 分别为 $\sigma = 0.018$ fm 和 $\sigma = 0.014$ fm, 且得到的预言值近几年测得的实验值 [8-11] 也较接近. 研究结果表明中子因子 $1/N$ 修正和中子壳层效应 [30] 修正的添加可以较好地描述核电荷半径, 而且本文提出的关系式具有一定的简便性和可操作性, 虽然有些核电荷半径的计算值和预言值误差较大, 这也是不可避免的, 毕竟复杂的核电荷半径问题不可能通过一个简单公式进行精确的全局性描述和预言.

作者非常感谢贾力源副教授的指导和帮助.

参考文献

- [1] Campbell P, Moore I D, Pearson M R 2016 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **86** 127
- [2] Cheal B, Flanagan K T 2010 *J. Phys. G: Nucl. Part.* **37** 113101
- [3] Blaum K, Dilling J, Nötershäser M 2013 *Phys. Scr.* **T152** 014017
- [4] Angeli I, Marinova K P 2013 *At. Data Nucl. Data Tables* **99** 69
- [5] Marinova K P, Angeli I <https://www-nds.iaea.org/radii/>.
- [6] Angeli I 2004 *At. Data Nucl. Data Tables* **87** 185
- [7] Angeli I 1999 *International Nuclear Data Committee* online: <http://iaeaand.iaea.or.at/indesel.html>.
- [8] De Groote R P, Billowes J, Binnersley C L, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 620
- [9] Koszorús Á, Yang X F, Jiang W G, et al. 2021 *Nat. Phys.* **17** 439
- [10] Bissell M L, Carette T, Flanagan K T, et al. 2016 *Phys. Rev. C* **93** 064318
- [11] Xie L, Yang X F, Wraith C, et al. 2019 *Phys. Lett. B* **797** 134805
- [12] Nerlo-Pomorska B, Pomorski K 1993 *Z. Phys. A* **344** 359
- [13] Nerlo-Pomorska B, Pomorski K 1994 *Z. Phys. A* **348** 169
- [14] Sheng Z Q, Fan G W, Qian J F 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 112101 (in Chinese) [圣宗强, 樊广伟, 钱建发 2015 物理学报

- 64 112101]
- [15] Cao Y Y, Guo J Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 162101 (in Chinese) [曹颖逾, 郭建友 2020 物理学报 **69** 162101]
- [16] Goriely S, Chamel N, Pearson J M 2016 *Phys. Rev. C* **93** 034337
- [17] Zhao P W, Li Z P, Yao J M, Meng J 2010 *Phys. Rev. C* **82** 054319
- [18] Xia X W, Lim Y, Zhao P W, Liang H Z, Qu X Y, Chen Y, Liu H, Zhang L F, Zhang S Q, Kim Y, Meng J 2018 *At. Data Nucl. Data Tables* **121-122** 1
- [19] Iimura H, Buchinger F 2008 *Phys. Rev. C* **78** 067301
- [20] Buchinger F, Pearson J M 2005 *Phys. Rev. C* **72** 057305
- [21] Dieperink A E L, Van Isacker P 2009 *Eur. Phys. J. A* **42** 269
- [22] Wang N, Li T 2013 *Phys. Rev. C* **88** 011301R
- [23] Stoitsov M V, Dobaczewski J, Nazarewicz W, et al. 2003 *Phys. Rev. C* **68** 054312
- [24] Goriely S, Chamel N, Pearson J M 2010 *Phys. Rev. C* **82** 035804
- [25] Bao M, Zong Y Y, Zhao Y M, Arima A 2020 *Phys. Rev. C* **102** 014306
- [26] Garvey G T, Gerace W J, Jaffe R L, Talmi I, Kelson I 1969 *Rev. Mod. Phys.* **41** S1
- [27] Sun B H, Lu Y, Peng J P, Liu C Y, Zhao Y M 2014 *Phys. Rev. C* **90** 054318
- [28] Bao M, Lu Y, Zhao Y M, Arima A 2016 *Phys. Rev. C* **94** 064315
- [29] Jiao B B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 152101 (in Chinese) [焦宝宝 2022 物理学报 **71** 152101]
- [30] Ma C, Zong Y Y, Zhao Y M, Arima A 2021 *Phys. Rev. C* **104** 014303
- [31] Von Weizsäcker C F 1935 *Z. Phys* **96** 431
- [32] Möller P, Myers W D, Sagawa H, Yoshida S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 052501
- [33] Geng L, Toki H, Meng J 2005 *Prog. Theor. Phys.* **113** 785
- [34] Goriely S, Chamel N, Pearson J M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 152503
- [35] Duflo J, Zuker A P 1995 *Phys. Rev. C* **52** R23
- [36] Qi C 2015 *J. Phys. G: Nucl. Par.* **42** 045104
- [37] Wang N, Liang Z, Liu M, et al. 2010 *Phys. Rev. C* **82** 044304
- [38] Garvey G T, Kelson I 1966 *Phys. Rev. Lett.* **16** 197
- [39] Fu G J, Lei Y, Jiang H, Zhao Y M, et al. 2011 *Phys. Rev. C* **84** 034311
- [40] Jiang H, Fu G J, Zhao Y M, et al. 2010 *Phys. Rev. C* **82** 054317
- [41] Jiao B B 2018 *Mod. Phys. Lett. A* **33** 1850156
- [42] Jiao B B 2020 *Int. J. Mod. Phys. E* **29** 2050024
- [43] Yang G L, Qi B, Wang X D, Qi C 2022 *Phys. Rev. C* **106** 024325
- [44] Utama R, Piekarewicz J 2017 *Phys. Rev. C* **96** 044308
- [45] Utama R, Piekarewicz J 2018 *Phys. Rev. C* **97** 014306
- [46] Zhang H F, Wang L H, Yin J P, Chen P H, Zhang H F 2017 *J. Phys. G: Nucl. Par.* **44** 045110
- [47] Niu Z M, Liang H Z 2022 *Phys. Rev. C* **106** L021303
- [48] Shang T S, Li J, Niu Z M 2022 *Nucl. Sci. Tech.* **33** 153
- [49] Z M Niu and H Z Liang 2018 *Phys. Lett. B* **778** 48
- [50] Ma Y F, Su C, Liu J, Ren Z Z, Xu C, Gao Y H 2020 *Phys. Rev. C* **101** 014304
- [51] Audi G, Kondev F G, Wang M, Huang W J, Naimi S 2017 *Chin. Phys. C* **41** 030001
- [52] Wang M, Huang W J, Kondev F G, Audi G, Naimi S 2021 *Chin. Phys. C* **45** 030003
- [53] Lu X T, Jiang D X, Ye Y L 2000 *Nuclear Physics* (Beijing: Atomic Energy Press) pp7–9 (in Chinese) [卢希庭, 江栋兴, 叶沿林 2000 原子核物理 (北京: 原子能出版社) 第7—9 页]
- [54] Fu G J, Bao M, He Z, Jiang H, Zhao Y M, Arima A 2012 *Phys. Rev. C* **86** 054303

Nucleus density based new relationship of nuclear charge radius^{*}

Jiao Bao-Bao^{1)2)†}

1) (*Engineering Research Center of Nuclear Technology Application, East China University of Technology, Nanchang 330013, China*)

2) (*School of Nuclear Science and Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China*)

(Received 1 February 2023; revised manuscript received 19 February 2023)

Abstract

In this paper we predict and evaluate the value of the nuclear charge radius by analyzing the relationship between nuclear mass and nuclear charge radius. We obtain 884 nuclei ($Z, N \geq 8$) with known mass and known charge radii by combining AME2020 database with CR2013 database, and calculate the mass densities ρ_m of the 884 nuclei. We aim to obtain an empirical formula of one constant which is useful in describing and predicting nuclear charge radius. With the empirical formula and the AME2020 database, the root-mean-square deviation (RMSD) of the nuclear charge radius of $\sigma = 0.093$ fm is successfully obtained. Considering the influence of neutron numbers on ρ_m , we use the neutron factor $1/N$ to correct the empirical formula, and the RMSD is reduced to $\sigma = 0.047$ fm (the accuracy is increased by about 50%). The second correction is shell effect of neutrons. The results show that the RMSD of nuclear charge radius is reduced to 0.034 fm based on shell effect of neutrons. We use the empirical formula with corrections to predict the nuclear charge radius (1573 nuclear charge radius with $Z, N \geq 8$) which is difficult to measure experimentally. The difference between our predicted values based on AME2020 database and the experimental values measured in recent years is in the allowable range of deviation. The result shows that the new relation for nuclear charge radius is simple and reliable. In addition, the RMSD of the calculation value for 791 nuclei is reduced to $\sigma = 0.032$ fm after we have removed some nuclei with special shell effect and isotope chains. These results show that the new relation proposed in this paper can be comparable to $A^{1/3}$ and $Z^{1/3}$ formulas with corrections. Moreover, we study the 884 and 791 nuclear mass densities by using L-M neural network method to build description and prediction models. Comparing with CR2013, the RMSDs of nuclear charge radius are $\sigma = 0.018$ fm and $\sigma = 0.014$ fm, respectively. The RMSDs are reduced by about 50% compared with that from the empirical formula with corrections, and the predicted values are closer to the experimental values measured in recent years.

Keywords: nuclear charge radius, shell effect of neutrons, neural network

PACS: 21.10.-k, 21.10.Ft, 07.05.Mh

DOI: 10.7498/aps.72.20230126

^{*} Project supported by the Open Funds of Engineering Research Center of Nuclear Technology Application, Ministry of Education, China (Grant No. HJSJYB2022-9), the Science and Technology Research Program of the Education Department of Jiangxi Province, China (Grant No. GJJ2200782), the Experimental Technology Development Program of East China University of Technology (Grant No. DHSY-202251), and the Doctoral Scientific Research Foundation of East China University of Technology (Grant No. DHBK2019151).

[†] Corresponding author. E-mail: baobaojiao91@126.com



基于原子核密度的核电荷半径新关系

焦宝宝

Nucleus density based new relationship of nuclear charge radius

Jiao Bao-Bao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 112101 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230126

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230126>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

原子核电荷半径的研究

Study of nuclear charge radius

物理学报. 2020, 69(16): 162101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191643>

基于同位素链核电荷半径的新关系

New relation for nuclear charge radius based on isotope chain

物理学报. 2022, 71(15): 152101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212343>

基于物理信息神经网络的光斑质心计算

Calculation of spot centroid based on physical informed neural networks

物理学报. 2022, 71(20): 200601 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220670>

识别Z玻色子喷注的卷积神经网络方法

Tag Z boson jets via convolutional neural networks

物理学报. 2021, 70(6): 061301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201557>

基于深度残差网络的高精度自然转捩模拟方法

High-order natural transition simulation method based on deep residual network

物理学报. 2020, 69(20): 204701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200563>

基于深度学习的光学表面杂质检测

Deep-learning-assisted micro impurity detection on an optical surface

物理学报. 2021, 70(16): 168702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210403>