

标量声波方程前向散射场的保相位理论 及其线性化近似*

冯波^{1)†} 徐文君²⁾ 蔡杰雄³⁾ 吴如山⁴⁾ 王华忠¹⁾

1) (同济大学海洋与地球科学学院, 波现象与智能反演成像研究组, 上海 200092)

2) (中国科学院上海技术物理研究所, 中科院智能红外感知重点实验室, 上海 200083)

3) (中石化石油物探技术研究院有限公司, 南京 211103)

4) (Modeling and Imaging Laboratory, University of California, Santa Cruz 95060, CA, USA)

(2023年2月13日收到; 2023年3月31日收到修改稿)

传统的波动方程线性化近似理论, 如一阶 Born 近似或 Rytov 近似等, 均隐含“弱散射”假设, 因此仅适用于弱扰动模型. 为克服“弱散射”假设的制约并将波动方程线性化近似理论推广至强扰动模型中, 提出了适用于预测前向散射波相位扰动的保相位理论. 通过将标量声波方程 Rytov 变换得到的非线性 Riccati 方程中关于未知解 (即散射场复相位) 的积分, 在 Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys (WKBJ) 近似下转化为对散射角和模型扰动的积分, 给出了前向散射场相位扰动的显式积分表达. 理论推导表明: 对于一维波传播问题, 保相位理论可以精确预测任意速度扰动模型中前向散射波的相位扰动. 对于小角度前向散射, 保相位理论可以进行线性化近似, 得到广义 Rytov 近似. 数值实验表明, 对于高维问题, 相比于一阶 Rytov 近似, 广义 Rytov 近似可以更好地预测前向小角度散射场的相位扰动, 且适用于强速度扰动模型. 广义 Rytov 近似拓展了 Rytov 近似的成立条件和适用范围, 可以直接应用于地震层析成像及医学超声透射成像中, 从而降低层析反问题对初始模型的依赖性并加速反演收敛.

关键词: 波动方程线性化, 保相位近似, 前向散射, 强扰动模型

PACS: 91.30.Cd, 46.15.-x, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.72.20230194

1 引言

一阶 Born 近似理论广泛应用于计算薛定谔方程和弹性波/声波方程的散射场^[1-5]. 然而, 一阶 Born 近似理论隐含了弱散射假设. 若介质的扰动强度较大或异常体的尺度大于入射波长, 一阶 Born 近似不再成立. 此时, 散射场可以用 Born 级数逼近, 但 Born 级数仍然是条件收敛的 (收敛性取决于散射体的尺度和散射强度大小). 为解决弹性波/声波方程 Born 级数的收敛性问题, Wu 和 Zheng^[6]

指出, Born 级数不收敛性的根源在于其无法正确处理多次前向散射场的同相叠加, 导致出现“前向散射灾难”. 借助量子力学中的重整化理论 (renormalization theory), Wu 和 Zheng^[6] 将 Born 级数中的无穷阶散射场求和用 De Wolf 近似代替 (即考虑多次前向散射一次背向散射), 得到了具有 Volterra 积分方程性质的收敛级数, 为波动方程非线性反问题的求解提供了新的求解思路^[7]. 然而, 将 T-matrix 方法应用于强扰动模型中的速度反演仍然存在困难^[8].

此外, 在一些领域中更加关注散射波的相位预

* 国家自然科学基金 (批准号: 42074143) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

† 通信作者. E-mail: and111@163.com

测精度. Rytov^[9] 发展了用于描述散射波相位扰动的一阶 Rytov 近似理论. 相比于一阶 Born 近似, 一阶 Rytov 近似可以更好地描述速度扰动引起的前向散射波的相位扰动, 因此广泛应用于光波或电波的视距传播^[10–12]、绕射层析^[13–15]、全球/区域速度结构重建^[16–18]以及高精度近地表速度建模等^[19–21].

同一阶 Born 近似, 一阶 Rytov 近似也隐含了弱散射假设 (即假定速度异常体的扰动强度非常小, 但异常体的尺度可远大于入射波长^[22]). 对于强速度扰动, 一阶 Rytov 近似的精度难以满足相位精确预测和反演的需求. 为提高 Rytov 近似的精度, Tartarski^[11] 利用函数展开法构造了 Rytov 序列. 在此基础上, Tsihrintzis 和 Devaney^[23] 提出了高阶 Rytov 反演方法, 其反演结果优于一阶 Rytov 近似. 对于湍流介质中的波束传播, Manning^[24] 给出了二阶 Rytov 近似. Kim 和 Tinin^[25] 采用二阶 Rytov 近似计算双频卫星导航系统在电离层的剩余误差. 汪焱林和董良国^[26] 采用 Adomian 分解方法实现了 Rytov 序列的高效求解, 提高了散射场的预测精度. 上述研究表明, 二阶甚至高阶 Rytov 近似对于提高反演精度至关重要. 虽然在一定假设条件下数值求解 Rytov 序列可以得到更高精度的散射场, 但 Rytov 序列的收敛性仍然缺乏严格的数学证明.

本文旨在研究强扰动模型中的散射场的相位预测问题, 在理论部分, 首先回顾经典的 Rytov 变换及一阶 Rytov 近似的推导过程; 随后引入对入射场和散射场的 Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys (WKBJ) 近似^[27], 导出一次前向散射场的显式积分解 (即散射场的保相位近似解); 接着通过考虑前向小角度散射情形, 将散射场的积分解进行线性化近似, 得到一种新的波动方程相位线性化近似 (即广义 Rytov 近似). 在数值试验部分, 采用层状模型定量分析散射角对前向散射场相位扰动的影响, 并验证保相位近似相对于一阶 Rytov 近似在强扰动模型中的优势. 最后, 讨论本文方法的成立条件以及理论贡献, 并给出简要结论和应用前景展望.

2 理 论

2.1 标量声波方程的一阶 Rytov 近似

频率域的标量声波方程 (即 Helmholtz 方程)

可以表示为

$$(\nabla^2 + k^2) u_0 = 0, \quad (1)$$

其中, $k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{v_0(\mathbf{x})}$ 为背景速度场 $v_0(\mathbf{x})$ 中的波数, ω 为角频率, $u_0 = u_0(\mathbf{x}; \omega)$ 为背景波场 (也称为入射波场), ∇^2 为 Laplace 算子.

记扰动后的速度场为 $v(\mathbf{x})$, 扰动模型中的波场 (即总场) 为 $u(\mathbf{x}; \omega)$, 总场与背景场的关系可以表示为

$$u(\mathbf{x}; \omega)/u_0(\mathbf{x}; \omega) = e^{\psi(\mathbf{x})}, \quad (2)$$

其中, $\psi(\mathbf{x})$ 称为复相位函数, 简记为复相位.

通过 Rytov 变换, 复相位可以表示为如下非线性积分方程 (Ricatti 方程) 的解^[11]:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}; \omega) = & \frac{1}{u_0(\mathbf{x})} \int_V (k^2 \varepsilon(\mathbf{x}') + \nabla \psi(\mathbf{x}') \\ & \times \nabla \psi(\mathbf{x}')) G_0(\mathbf{x}; \mathbf{x}') u_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $G_0(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ 为背景速度场 $v_0(\mathbf{x})$ 中从 \mathbf{x}' 到 \mathbf{x} 的格林函数, $\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{v_0^2(\mathbf{x})}{v^2(\mathbf{x})} - 1$ 称为扰动函数 (无量纲).

若假设 $|\nabla \psi \cdot \nabla \psi| \ll |k^2 \varepsilon|$, (3) 式可以近似为

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{u_0(\mathbf{x})} \int_V k^2 \varepsilon(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}; \mathbf{x}') u_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (4)$$

(4) 式即为传统的一阶 Rytov 近似^[11,22,28], 描述了复相位与扰动函数的线性关系.

2.2 保相位近似 (Rytov 变换+WKBJ 近似)

Wu^[22] 指出, 一阶 Rytov 近似仅适用于前向散射及弱速度扰动 (即弱散射近似). 对于强速度扰动 (即相对于 $k^2 \varepsilon$, $\nabla \psi \cdot \nabla \psi$ 不可忽略), 一阶 Rytov 近似不再成立. 本文考虑如下情形: 速度异常体光滑且尺度 (相对于入射波长) 较大, 而不对速度扰动强度进行任何假设 (速度异常体主要产生前向散射, 且可以用前向散射场代替总场). 背景模型和扰动后的模型中的 (一次入射) 波场的 WKBJ 近似表示为: $u_0 = A_0 e^{i\phi_0}$ 及 $u = A e^{i\phi}$. 相应的复相位可以表示为

$$\psi = \ln(u/u_0) = \ln(A/A_0) + i(\phi - \phi_0). \quad (5)$$

显然, 复相位的实部和虚部分别描述扰动后波场的振幅和相位变化. 此时, 复相位的梯度表示为

$$\nabla \psi = (\nabla A/A - \nabla A_0/A_0) + i\nabla(\phi - \phi_0). \quad (6)$$

通常而言, 地震波振幅的空间变化远慢于相位的空间变化. 因此, 忽略振幅的空间变化后 (6) 式

可近似为

$$\nabla\psi \approx i\nabla(\phi - \phi_0). \quad (7)$$

记背景模型和扰动后的模型中的走时场为 T_0 和 T , (7) 式可表示为

$$\nabla\psi \approx i\nabla(\phi - \phi_0) = i\omega\nabla(T - T_0). \quad (8)$$

相应地有

$$\begin{aligned} \nabla\psi \cdot \nabla\psi &\approx -\omega^2\nabla(T - T_0) \cdot \nabla(T - T_0) \\ &= -\omega^2\left((\nabla T)^2 + (\nabla T_0)^2 - 2\nabla T \cdot \nabla T_0\right). \end{aligned} \quad (9)$$

考虑到走时场 T_0 和 T 分别满足如下程函方程:

$$(\nabla T_0(\mathbf{x}))^2 = s_0^2(\mathbf{x}), (\nabla T(\mathbf{x}))^2 = s^2(\mathbf{x}), \quad (10)$$

其中, $s_0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x})^{-1}$, $s(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})^{-1}$ 分别为背景慢度模型和扰动后的慢度模型.

将 (9) 式和 (10) 式代入 $k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi$ 并用慢度表达模型参数, 有

$$\begin{aligned} k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi &= \left(\frac{\omega}{v_0(\mathbf{x})}\right)^2 \left(\frac{v_0(\mathbf{x})^2}{v(\mathbf{x})^2} - 1\right) \\ &\quad - \omega^2\left((\nabla T)^2 + (\nabla T_0)^2 - 2\nabla T \cdot \nabla T_0\right) \\ &= 2\omega^2 s_0(\mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\Omega(\mathbf{x}) = \delta s(\mathbf{x}) \cos \alpha(\mathbf{x}) + s_0(\mathbf{x}) (\cos \alpha(\mathbf{x}) - 1)$ 可解释为散射模式, $\delta s(\mathbf{x})$ 为慢度模型的扰动, 即 $\delta s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) - s_0(\mathbf{x})$, $\cos \alpha(\mathbf{x}) = \frac{\nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla T_0(\mathbf{x})}{|\nabla T(\mathbf{x})| |\nabla T_0(\mathbf{x})|}$, $\alpha(\mathbf{x})$ 为入射场 u_0 与散射场 u 之间的夹角 (本文定义为前向散射角, 如图 1 所示).

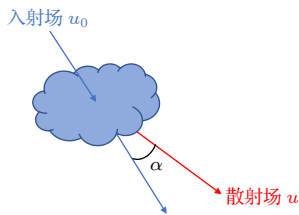


图 1 前向散射角的定义

Fig. 1. Definition of the forward-scattering angle.

将 (11) 式代入 (3) 式, 可得复相位的 WKB 近似解:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{u_0(\mathbf{x})} \int_V 2\omega^2 s_0(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}; \mathbf{x}') u_0(\mathbf{x}') \Omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (12)$$

(12) 式中积分核中的 $\Omega(\mathbf{x})$ 为慢度扰动和散射角的函数.

由于在推导过程中没有忽略 $\nabla\psi \cdot \nabla\psi$, 且没有

对速度扰动强度做任何假设, 若已知散射角, 利用 (12) 式可以从理论上精确预测散射波的相位扰动, 故称 (12) 式为保相位近似.

2.3 一维非均匀 Helmholtz 波动方程中的保相位近似解

为从理论上验证保相位近似理论的正确性, 考虑一维非均匀模型中的散射场的相位预测问题. Snieder 和 Lomax^[29] 对比了一维 Helmholtz 波动方程的 WKB 解与一阶 Rytov 近似解 (Rytov 近似解), 并指出 Rytov 近似无法描述由于速度 (或波阻抗) 扰动造成的振幅变化, 且 Rytov 近似预测的相位扰动仅为真实相位扰动的一阶近似. 本文同样采用 Snieder 和 Lomax^[29] 的一维非均匀介质中的 Helmholtz 波动方程:

$$u_{zz} + k_0^2 [1 + \varepsilon(z)] u = 0, \quad (13)$$

其中, $k_0 = \omega/v_0$ 为匀速背景 v_0 中的波数, 并假定扰动函数 $\varepsilon(z) = v_0^2/v(z)^2 - 1$ 在波长尺度内平滑.

Snieder 和 Lomax^[29] 给出 (13) 式的 WKB 近似解:

$$\begin{aligned} u_{\text{WKB}}(z_0) &= \frac{1}{[1 + \varepsilon(z_0)]^{1/4}} \exp\left(ik_0 \int_0^{z_0} \sqrt{1 + \varepsilon(z)} dz\right). \end{aligned} \quad (14)$$

在一维情况下, 散射波的传播方向与入射波只有同向 (前向散射) 或反向 (背向散射) 两种情况. 对于前向散射, 散射角为零. 根据保相位近似公式 (12), 复相位形式的前向散射场可以表示为

$$\begin{aligned} \psi_{\text{PP}}(z_0) &= \frac{1}{G_0(z_0, 0)} \int_0^{z_0} 2\omega^2 s_0(z) \delta s(z) G_0(z_0, z) G_0(z, 0) dz \\ &\equiv i\omega \int_0^{z_0} \delta s(z) dz, \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 下标 PP 表示保相位 (phase preserving).

一维匀速模型中常密度声波方程的格林函数为^[30]

$$G(r, s) = \frac{i}{2k_0} e^{ik_0|r-s|}. \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式, 有

$$\begin{aligned} \psi_{\text{PP}}(z_0) &= \frac{1}{\frac{i}{2k_0} e^{ik_0 z_0}} \int_0^{z_0} 2\omega^2 s_0(z) \delta s(z) \\ &\quad \times \frac{i}{2k_0} e^{ik_0(z_0-z)} \frac{i}{2k_0} e^{ik_0 z} dz \\ &\equiv i\omega \int_0^{z_0} \delta s(z) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

此时, 非均匀介质中前向散射场 $u(z_0)$ 的保相位近似解可以表示为

$$\begin{aligned} u_{\text{PP}}(z_0) &= u_0(z_0) e^{\psi_{\text{PP}}(z_0)} = u_0(z_0) e^{i\omega \int_0^{z_0} \delta s(z) dz} \\ &= \exp \left[ik_0 \int_0^{z_0} (1 + \delta s(z)/s_0) dz \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

考虑到 (14) 式中的 $\sqrt{1 + \varepsilon(z)}$ 可以用慢度模型参数化重新表示为

$$\sqrt{1 + \varepsilon(z)} = \frac{v_0}{v(z)} = \frac{s(z)}{s_0} \equiv 1 + \frac{\delta s(z)}{s_0}, \quad (19)$$

将 (19) 式代入 (14) 式, 有

$$\begin{aligned} u_{\text{WKBj}}(z_0) &= \frac{1}{[1 + \varepsilon(z_0)]^{1/4}} \\ &\quad \times \exp \left[ik_0 \int_0^{z_0} (1 + \delta s(z)/s_0) dz \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

对比一维 Helmholtz 波动方程的 WKBj 近似解 (20) 式及保相位近似解 (18) 式可以看出, 二者相位完全一致. 但保相位近似解缺少在观测点 z_0 处的振幅变化项 $[1 + \varepsilon(z_0)]^{-1/4}$, 因此不能预测散射波的振幅变化 (原因在于 (7) 式中忽略振幅的空间变化).

另一方面, 根据一阶 Rytov 近似, 复相位可以近似写为

$$\begin{aligned} \psi_{\text{RA}}(z_0) &= \frac{1}{G_0(z_0, 0)} \int_0^{z_0} k_0^2 \varepsilon(z) G_0(z_0, z) G_0(z, 0) dz \\ &= \frac{ik_0}{2} \int_0^{z_0} \varepsilon(z) dz. \end{aligned} \quad (21)$$

相应地, $u(z_0)$ 的一阶 Rytov 近似解可以表示为

$$\begin{aligned} u_{\text{RA}}(z_0) &= u_0(z_0) e^{\psi_{\text{RA}}(z_0)} = u_0(z_0) e^{\frac{ik_0}{2} \int_0^{z_0} \varepsilon(z) dz} \\ &= \exp \left[ik_0 \int_0^{z_0} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon(z) \right) dz \right], \end{aligned} \quad (22)$$

其中, 下标 RA 表示 Rytov 近似 (Rytov approximation).

事实上, 散射场的一阶 Rytov 近似解 ((22) 式) 中的积分项 $1 + \frac{1}{2} \varepsilon(z)$ 恰为 WKBj 近似解中积分

项 $\sqrt{1 + \varepsilon(z)}$ 的一阶泰勒展开, 即 $\sqrt{1 + \varepsilon(z)} \approx 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(z)$, $|\varepsilon(z)| \ll 1$. 考虑到一维情况下保相位解的相位预测是精确的, 可以得出: 散射场的一阶 Rytov 近似解是保相位解在弱散射假设下的一阶近似解, 也是散射场 WKBj 近似解的相位一阶近似 (与 Snieder 和 Lomax^[29] 的研究结论相符).

根据上述理论分析可知, 对于一维非均匀 Helmholtz 波动方程, 若背景速度为匀速模型且模型扰动在波长尺度内平滑, 保相位理论可以精确预测前向散射场的相位扰动. 相比之下, 一阶 Rytov 近似解仅能估计前向散射场相位扰动的一阶近似, 故受限于模型参数小扰动假设 ($|\varepsilon(z)| \ll 1$).

2.4 广义 Rytov 近似 (Rytov 变换+WKBj 近似+小角度前向散射)

对于非一维问题 (二维或三维) 中的波传播, 若假定前向散射角较小 ($\cos \alpha(\mathbf{x}) \approx 1$), (11) 式可以进一步近似为

$$k^2 \varepsilon + \nabla \psi \cdot \nabla \psi = 2\omega^2 s_0(\mathbf{x}) \delta s(\mathbf{x}), \quad (23)$$

其中, $\delta s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) - s_0(\mathbf{x})$ 为慢度扰动.

将 (23) 式代入 (3) 式, 复相位与慢度模型扰动可以表示为如下线性关系:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{u_0(\mathbf{x})} \int_V \delta s(\mathbf{x}') 2\omega^2 s_0(\mathbf{x}') G_0(\mathbf{x}; \mathbf{x}') u_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (24)$$

从推导过程可知, (24) 式没有对速度扰动强度做任何假设, 故不受传统 Rytov 近似中弱散射假设的制约. 因此, (24) 式可以更好地预测前向散射波的相位扰动. 由于 (24) 式拓展了传统一阶 Rytov 近似的成立条件和适用范围, 故称之为广义 Rytov 近似 (generalized Rytov approximation).

3 数值试验

为定量分析散射角对前向散射场相位扰动的影响, 设计如图 2 所示的模型. 速度模型包含两个水平地层, 反射界面深度 $z = 2.0$ km. 第 1 层速度 $v_1 = 2.0$ km/s, 第 2 层速度与第 1 层速度的关系为: $v_2 = v_1 (1 + \varepsilon)$, 其中 ε 为速度扰动百分比. 令背景速度模型为第 1 层速度, 通过改变 ε 来控制第 2 层的速度. 设定 4 组不同的 ε : 5%, 20%, 50%, 100%, 代表速度扰动从弱扰动逐渐过渡到强扰动.

同时, 考虑平面波以入射角 θ_1 入射到反射界面, 出射平面波的出射角为 θ_2 , 满足 Snell 定律: $p = \sin \theta_1/v_1 = \sin \theta_2/v_2$ (θ_2 小于等于临界角). 令平面波的入射角从垂直入射逐渐增大, 分别用计算如下 5 种波场 (得到振幅归一化地震记录如图 3 所示).

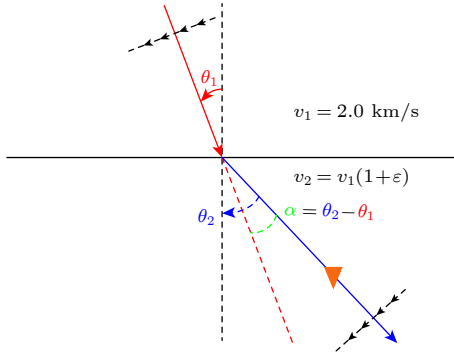


图 2 二维层状模型中平面波入射与出射示意图 (红色和蓝色实线分别表示入射和透射线)
 Fig. 2. Sketch of planewave incidence and emergence in a two-layered model (the red and blue lines stand for the incident and emergent rays, respectively).

1) 总场. 有限差分求解标量声波方程获得, 速度模型为双层速度模型, 记为 u_{total} , 地震记录如图 3 黑色曲线所示.

2) 入射场. 有限差分求解标量声波方程获得, 速度模型为背景速度模型, 记为 u_0 , 地震记录如图 3 中灰色曲线所示.

3) 总场的一阶 Rytov 近似 (RA 解). $u_{\text{RA}} = u_0 \exp \psi_{\text{RA}}$, 其中 ψ_{RA} 通过 (4) 式计算, 地震记录如图 3 中红色曲线所示.

4) 总场的保相位近似解 (PP 解). $u_{\text{PP}} = u_0 \exp \psi_{\text{PP}}$, 其中 ψ_{PP} 通过 (12) 式计算, 散射角由 Snell 公式解析计算, 地震记录如图 3 中绿色点线所示.

5) 总场的广义 Rytov 近似解 (GRA 解). $u_{\text{GRA}} = u_0 \exp \psi_{\text{GRA}}$, 其中 ψ_{GRA} 通过 (24) 式计算, 地震记录如图 3 中蓝色曲线所示.

根据理论分析可知, 上述 3 种近似解的关系为: 保相位近似解在小角散射的假设下可以退化为广义 Rytov 近似解; 而当模型扰动强度较小时, 广义 Rytov 近似解可以进一步退化为一阶 Rytov 近似解. 为了验证上述理论分析结果, 对比不同速度扰动强度时的地震记录. 图 3(a) 为 $\epsilon = 5\%$ 时地震记录的波形对比. 由于 $\epsilon = 5\%$ 满足速度弱扰动假设, 根据理论分析, 上述 3 种近似解都可以较好地逼近总场. 从图 3(a) 可以看出, 3 种相位近似方法得到的近似解都和总场基本吻合, 与理论预测相符.

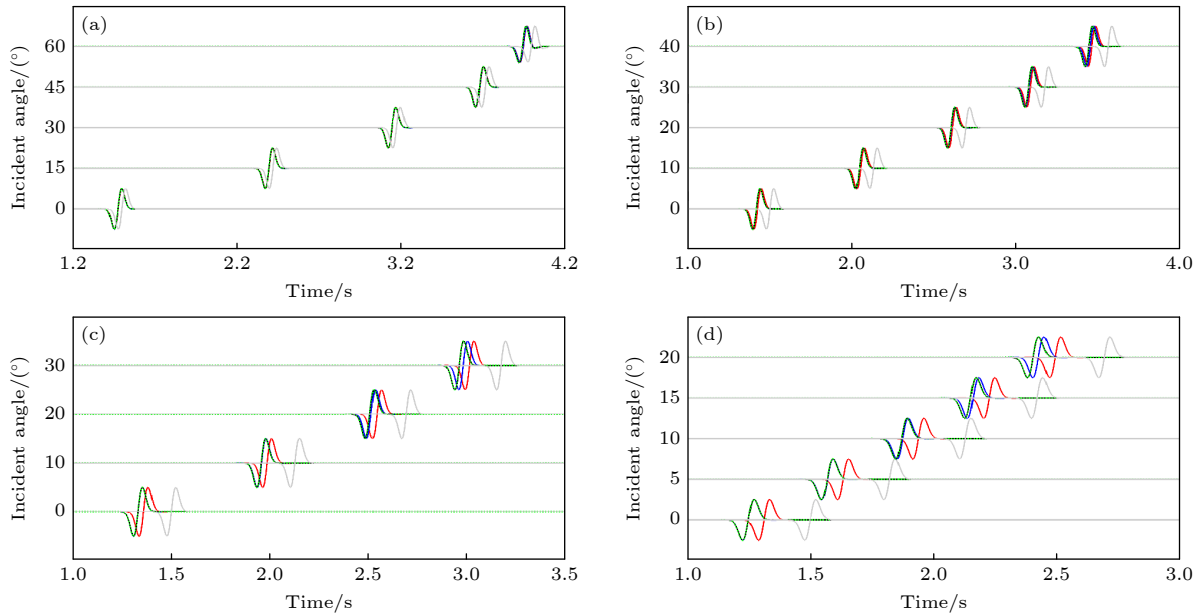


图 3 双层速度模型中地震记录的 (振幅归一化) 波形对比. (a)—(d) 分别代表速度扰动百分比为 5%, 20%, 50% 和 100%. 黑色和灰色曲线分别为真实模型及背景模型 (第 1 层速度) 中正演的地震记录, 红色和蓝色曲线分别为一阶 Rytov 近似和广义 Rytov 近似得到的地震记录, 绿色虚线为保相位近似解 (保留散射角)

Fig. 3. Seismic waveforms calculated using the two-layered model. Panel (a)–(d) stand for velocity models with the velocity percentages of 5%, 20%, 50% and 100%, respectively. The black- and gray-curve are the waveforms in true and background model, respectively; the red- and blue-curve are the first-order and the GRA results, respectively, the green-dotted curve is the phase-preserving solution (keeping the scattering-angle).

对于图 3(b), 速度扰动百分比 $\varepsilon = 20\%$ 代表中等扰动强度, 此时一阶 Rytov 近似不再成立. 相应地, 图 3(b) 中的红色曲线 (一阶 Rytov 近似解) 与总场略有偏差, 而广义 Rytov 近似解仍满足小角散射假设 ($\theta_1 = 40^\circ$ 时, $\theta_2 = 50.5^\circ$, $\cos \alpha = 0.983$), 因此和保相位近似解及总场吻合较好.

当速度扰动百分比增加到 $\varepsilon = 50\%$ 时, 图 3(c) 一阶 Rytov 近似解与总场存在明显的时差 (即相位差), 而对于入射角在 20° 之内的平面波, 广义 Rytov 近似解仍与总场匹配较好. 当 $\theta_1 = 30^\circ$ 时 (对应出射角 $\theta_2 = 48.6^\circ$), 散射角的余弦 $\cos \alpha = \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0.948$, 此时广义 Rytov 近似解与总场之间存在一定的相位差, 表明小角散射假设不再成立. 相比之下, 由于保相位近似解中采用了解析计算的散射角, 因此始终与总场重合.

最后, 对于强速度扰动 ($\varepsilon = 100\%$), 图 3(d) 中的一阶 Rytov 近似解与总场之间存在较大的相位差, 而广义 Rytov 近似解在入射角小于 15° 时精度较高. 随着散射角增大, 广义 Rytov 近似解的精度逐渐下降 ($\theta_1 = 20^\circ$ 时, $\theta_2 = 43.2^\circ$, $\cos \alpha = 0.919$), 但保相位近似解仍然与总场重合.

上述数值测试表明, 总场的保相位近似可以精确预测总场的相位扰动; 广义 Rytov 近似解作为保相位近似理论的小角近似, 在小散射角时精度较高; 一阶 Rytov 近似解作为广义 Rytov 近似解的弱扰动近似, 仅对于弱速度扰动和小散射角情形成立.

4 讨论

对于一个非耗散物理系统构成的保守体系, 无论其差分格式还是数学近似方法都应当保辛^[31]. 例如在有限元理论中单元刚度矩阵的对称性是保辛的, 隐含了变分方法中的最小势能原理. 除此之外, 保能量、保动量、保系统特征值等方法, 都属于保结构方法. 因此可以类比, 本文提出的保相位理论也属于保结构方法的范畴. 在应用层面, 研究散射波的相位保真预测方法, 对于系统参数估计问题 (计算反问题) 至关重要. 例如, 在全波形反演 (FWI) 理论中, 通过实测的地震信号以及控制方程 (如声波或弹性波方程), 在最小二乘意义下估计地下介质的弹性参数 (如纵横波速度、密度等). FWI

理论难点在于目标泛函的强非线性, 若初始模型精度不够高会导致预测数据和观测数据的相位差超过半个周期 (cycle skipping 问题), 使得反演陷入局部极值. 因此, 在反问题中, 首先关注的是场的相位特征 (即散射场出现的时刻), 其次关注场的振幅信息. 若散射波的相位信息无法精确预测, 基于局部最优化理论的波形反演注定会陷入局部极值.

本文所提出的保相位近似理论提高了前向散射场相位扰动的预测精度并推广了波动方程线性化近似理论的适用范围, 所考虑的物理图景为速度异常体的尺度远大于入射波长这一情形. 此时, 几何光学理论亦然成立. 文中所讨论的前向散射及小角传播, 在射线理论框架下可以解释为背景模型及扰动后模型中的射线路径基本一致. 在前向小角散射情形下, 本文给出的广义 Rytov 近似可以较为准确地预测总场的相位部分, 而无需对模型参数扰动的强度做弱扰动假设. 相比之下, 传统的 Rytov 近似仅能预测总场相位的一阶近似, 因此仅适用于弱扰动情形.

为进一步分析传统的 Rytov 近似与本文提出的保相位近似的差异, 附录 A 中用模型的慢度平方参数化形式对二者进行了对比. 根据附录 A 中公式推导可知, 若模型扰动远小于背景模型, 广义 Rytov 近似可以退化为 Rytov 近似. 同时, 广义 Rytov 近似和 Rytov 近似都隐含了小角传播假设, 这也与 Wu^[22] 对 Rytov 近似中隐含假设的分析一致. 同时, 层状模型的数值实验表明, 对于大角度的散射场, 广义 Rytov 近似解与 Rytov 近似解趋于一致, 但都与真实解相差较大, 这表明此时散射角的影响占相位扰动的主导地位; 另一方面, 若能够准确估计散射角, 则可更加精确地预测大角度的散射场 (即保结构先保角, 进而保相位, 最后保振幅).

必须指出的是, 本文在保相位的推导过程中, 对入射场和散射场引入的 WKB 近似, 本质上仅考虑了一次散射场的相位预测问题. 此时, 才能将非线性积分方程中对未知解 (即散射场) 的积分用散射角及模型扰动替换. 因此, 保相位近似无法预测多次散射问题. 同时, 由于推导过程中忽略了振幅的空变效应, 保相位近似无法精确预测速度扰动导致的地震波振幅变化 (散射波的振幅预测可以

由 Born 级数及其变种方法来描述).

在有限频理论层面, 广义 Rytov 近似理论构建了散射波相位扰动与慢度扰动之间的线性关系, 可视为从无限高频射线近似到有限频带地震波一阶散射的推广. 相比于传统 Born 或 Rytov 近似, 新的相位线性化正问题无需弱散射假设, 因此成立范围更广. 进一步层析反问题中的数据残差反投影路径 (或最小二乘误差泛函的梯度) 若用广义 Rytov 近似构造, 能显著降低反问题对初始模型的依赖性并加速收敛.

5 结论与展望

本文提出了标量声波方程的保相位近似理论, 克服了传统的 (一阶) Born 或 Rytov 近似中弱速度扰动假设的制约, 能更加精确地预测前向散射场的相位扰动. 针对前向小角度散射, 保相位近似理论可以做线性化近似, 从而得到用于描述散射场相位扰动与慢度模型扰动线性关系的广义 Rytov 近似理论.

广义 Rytov 近似的提出拓展了 Rytov 近似的成立条件和适用范围, 在应用领域可以代替传统的 Rytov 近似, 进而提高层析反问题的收敛速率与反演精度. 例如, 若将广义 Rytov 近似与传统的有限频层析理论相结合, 可以降低走时层析对初始模型的依赖性并加速反演收敛; 若将广义 Rytov 近似引入医学超声透射成像, 有望推广医学超声成像的适用范围 (骨骼相对于其他人体组织属于强散射体, 传统的直射近似与弱散射假设不再成立), 有望实现精确的脑成像与肌骨成像.

附录A 一阶 Rytov 近似与广义 Rytov 近似的关系

在广义 Rytov 近似推导中 ((10) 式—(24) 式), 若用慢度平方参数化形式表达模型, 走时场 T_0 和 T 满足的程函方程表示为

$$(\nabla T(\mathbf{x}))^2 = m(\mathbf{x}), \quad (\nabla T_0(\mathbf{x}))^2 = m_0(\mathbf{x}), \quad (\text{A1})$$

其中, $m(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})^{-2}$, $m_0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x})^{-2}$.

相应地, $k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi$ 可以写为

$$\begin{aligned} k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi &= \left(\frac{\omega}{v_0(\mathbf{x})}\right)^2 \left(\frac{v_0^2(\mathbf{x})}{v^2(\mathbf{x})} - 1\right) \\ &\quad - \omega^2 [(\nabla T)^2 + (\nabla T_0)^2 - 2\nabla T \cdot \nabla T_0] \\ &= 2\omega^2 m_0(\mathbf{x}) \left(\sqrt{1 + \frac{\delta m(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x})} \cos \alpha(\mathbf{x})} - 1\right), \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

其中, $\delta m(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) - m_0(\mathbf{x})$ 为慢度平方扰动.

在小角传播的假设下 ($\cos \alpha(\mathbf{x}) \approx 1$), (A2) 式可以近似为

$$k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi = 2\omega^2 m_0(\mathbf{x}) \left(\sqrt{1 + \frac{\delta m(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x})}} - 1\right). \quad (\text{A3})$$

若对 (A3) 式中的平方根取一阶 Taylor 近似 ($\sqrt{1 + \frac{\delta m(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x})}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\delta m(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x})}$, $\left|\frac{\delta m(\mathbf{x})}{m_0(\mathbf{x})}\right| \ll 1$), (A3) 式可以简化为

$$k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi \approx \omega^2 \delta m(\mathbf{x}). \quad (\text{A4})$$

另一方面, 在一阶 Rytov 近似中假定了 $|\nabla\psi \cdot \nabla\psi| \ll |k^2\varepsilon|$, 有 $k^2\varepsilon + \nabla\psi \cdot \nabla\psi \approx k^2\varepsilon$. 用慢度平方表达 $k^2\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} k^2\varepsilon &= \left(\frac{\omega}{v_0(\mathbf{x})}\right)^2 \left(\frac{v_0^2(\mathbf{x})}{v^2(\mathbf{x})} - 1\right) \\ &= \omega^2 \left(\frac{1}{v(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{v_0(\mathbf{x})^2}\right) \equiv \omega^2 \delta m(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

显然, (A4) 式与 (A5) 式完全一致, 表明在广义 Rytov 近似中, 若用慢度平方表达模型参数并取一阶 Taylor 近似 (模型扰动远小于背景模型), 广义 Rytov 近似可以退化为传统的一阶 Rytov 近似. 因此, 一阶 Rytov 近似可视为广义 Rytov 近似在模型参数小扰动情形下的特例.

参考文献

- [1] Aki K 1973 *J. Geophys. Res.* **78** 1334
- [2] Born M 1926 *Z. Phys.* **38** 803
- [3] Newton R G 1961 *R. Oehme, Phys. Rev* **70** 121
- [4] Newton R G 1989 *Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions* (New York: Springer-Verlag) pp25, 26
- [5] Päivärinta L, Erkki S 1991 *SIAM J. Math. Anal.* **22** 480
- [6] Wu R S, Zheng Y 2014 *Geophys. J. Int.* **196** 1827
- [7] Wu R S, Wang B, Hu C 2015 *Inverse Probl.* **31** 115004
- [8] Wang B F, Wu R S, Chen X H, Lu W K 2016 *Chin. J. Geophys.* **59** 2257 (in Chinese) [王本锋, 吴如山, 陈小宏, 陆文凯 2016 *地球物理学报* **59** 2257]
- [9] Rytov S M 1937 *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser Fiz* **2** 223 (in Russia)
- [10] Chernov L A, Silverman R A, Morse P M 1960 *Phys. Today* **13** 50
- [11] Tartarski V L 1971 *Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations* (London: Oldbourne Press) pp218–220
- [12] Ishimaru A 1978 *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (Vol. II) (New York: Academic Press) pp376–378
- [13] Devaney A J 1984 *IEEE T. Geosci. Remote* **22** 3
- [14] Wu R S, Toksöz M N 1987 *Geophysics* **52** 11
- [15] Tsihrintzis G A, Devaney A J 2000 *IEEE T. Image Process.* **9** 1560

- [16] Wu R S, Flatté S M 1990 *Pure Appl. Geophys.* **132** 175
- [17] Montelli R, Nolet G, Dahlen F A, Masters G, Engdahl E R, Hung S H 2004 *Science* **303** 338
- [18] Zhou Y, Nolet G, Dahlen F A, Laske G 2006 *Geophys. Res.* **111** B04304
- [19] Liu Y Z, Dong L G, Li P M, Wang Y W, Zhu J P, Ma Z T 2009 *Chin. J. Geophys.* **52** 2310 (in Chinese) [刘玉柱, 董良国, 李培明, 王毓伟, 朱金平, 马在田 2009 地球物理学报 **52** 2310]
- [20] Xu W, Xie X B, Geng J 2015 *Pure Appl. Geophys.* **172** 1409
- [21] Feng B, Luo F, Wang H Z 2019 *Chin. J. Geophys.* **62** 2217 (in Chinese) [冯波, 罗飞, 王华忠 2019 地球物理学报 **62** 2217]
- [22] Wu R S 2003 *Pure Appl. Geophys.* **160** 509
- [23] Tsihrintzis G A, Devaney A J 2000 *IEEE T. Inform. Theory* **46** 1748
- [24] Manning R M 1996 *Radiophys. Quant. El.* **39** 287
- [25] Kim B C, Tinin M V 2009 *Waves Random Complex* **19** 284
- [26] Wang Y L, Dong L G 2021 *Chin. J. Geophys.* **64** 3701 (in Chinese) [汪焱林, 董良国 2021 地球物理学报 **64** 3701]
- [27] Clayton R W, Stolt R H 1981 *Geophysics* **46** 1559
- [28] Flatté S M 1979 *Sound Transmission Through a Fluctuating Ocean* (London: Cambridge University Press) p165
- [29] Snieder R, Lomax A 1996 *Geophys. J. Int.* **125** 796
- [30] Guo D R 1991 *Methods of Mathematical Physics* (2nd Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p361 (in Chinese) [郭敦仁 1991 数学物理方法(第二版) (北京: 高等教育出版社) 第361页]
- [31] Zhong W X, Gao Q 2005 *Chin. J. Comput. Mech.* **22** 1 (in Chinese) [钟万勰, 高强 2005 计算力学学报 **22** 1]

Phase-preserving theory and its linearization approximation for forward scattering field of scalar acoustic wave equation*

Feng Bo^{1)†} Xu Wen-Jun²⁾ Cai Jie-Xiong³⁾

Wu Ru-Shan⁴⁾ Wang Hua-Zhong¹⁾

1) (*Wave Phenomena and Intelligent Inversion Imaging Group (WPI), School of Ocean and Earth Science, Tongji University, Shanghai 200092, China*)

2) (*Key Laboratory of Intelligent Infrared Perception of the Chinese Academy of Sciences, Shanghai Institute of Technical Physics of the Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200083, China*)

3) (*SINOPEC Geophysical Research Institute Co., Ltd., Nanjing 211103, China*)

4) (*Modeling and Imaging Laboratory, University of California, Santa Cruz 95060, CA, USA*)

(Received 13 February 2023; revised manuscript received 31 March 2023)

Abstract

The conventional wave-equation linearization methods, such as the first-order Born or Rytov approximation, always implicitly imply a weak-scattering assumption, making it valid only for weak perturbation models. To extend the wave-equation linearization theory to strong perturbation models, we consider a scenario that the reference model is smooth within the scale of the incident wave length, and propose a phase-preserving method which can predict the phase perturbation of forward scattering wave field. First, we introduce the WKBJ approximation to the scattered- and incident wave fields so that the integral of the unknown solution (i.e. the scattered field) in the nonlinear Ricatti integral equation can be replaced by the integral of scattering-angle and model perturbation, yielding an explicit expression of the scattered field. Theoretical derivation shows that the proposed phase-preserving method can accurately predict the phase-perturbation of forward scattered wave field regardless of the strength of velocity perturbations for one-dimensional wave propagation problem. To apply the phase-preserving approximation to the inverse problem, we further consider a scenario of small-angle forward propagation. In this case, the phase-preserving approximation can be linearized by neglecting the influence of scattering angles, leading to a linear relation between the scattered field and the model perturbation, which we refer to as the generalized Rytov approximation. Numerical experiments demonstrate that the generalized Rytov approximation can predict the phase perturbation of the scattered field with higher accuracy for small-angle forward propagation, and is suitable for strong model perturbations. The generalized Rytov approximation extends the validity and the scope of application of the traditional Rytov approximation. In specific application fields such as the seismic traveltime tomography or medical ultrasonic transmission imaging, a new traveltime/phase sensitivity kernel can be derived by replacing the conventional Rytov approximation with the proposed method, which can increase the inversion accuracy and speed up the convergence.

Keywords: wave-equation linearization, phase-preserving approximation, forward scattering, strong perturbation model

PACS: 91.30.Cd, 46.15.-x, 42.25.Bs

DOI: 10.7498/aps.72.20230194

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 42074143) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China.

† Corresponding author. E-mail: ancd111@163.com

标量声波方程前向散射场的保相位理论及其线性化近似

冯波 徐文君 蔡杰雄 吴如山 王华忠

Phase-preserving theory and its linearization approximation for forward scattering field of scalar acoustic wave equation

Feng Bo Xu Wen-Jun Cai Jie-Xiong Wu Ru-Shan Wang Hua-Zhong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 159101 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230194

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230194>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于迁移学习的水下目标定位方法仿真研究

Simulation study of underwater intruder localization based on transfer learning

物理学报. 2021, 70(22): 224302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210277>

非线性效应对前向受激布里渊散射分布式传感的影响

Influence of nonlinear effects on forward stimulated Brillouin scattering distributed sensing

物理学报. 2022, 71(15): 154206 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220313>

基于双向正交泵浦半导体光放大器结构的全光相位保持幅度再生技术

All-optical phase-preserving amplitude-regeneration technology based on bidirectional orthogonal-pumped semiconductor optical amplifier configuration

物理学报. 2022, 71(20): 204204 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220703>

非线性波动方程的新数值迭代方法

New numerical iterative method for nonlinear wave equations

物理学报. 2020, 69(3): 034301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191440>

强散射过程与双随机相位加密过程的等价性分析

Equivalence analysis of highly scattering process and double random phase encryption process

物理学报. 2021, 70(13): 134201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201903>

国债远期利率的量子场理论模型构建

The quantum field model for treasury forward interest rate

物理学报. 2018, 67(19): 191101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180424>