物理学报 *Acta Phys. Sin.* **Vol. 72, No. 10 (2023) 100201**

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

一类非线性 Schrödinger-KdV 微扰系统的初值问题*

裴一潼[1)2)] 王锦坤[2)] 郭柏灵[3)] 刘伍明[2)†]

1) (南京航空航天大学数学学院, 南京 211106)

2) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家研究中心, 北京 100190)

3) (北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2023 年 2 月 20 日收到; 2023 年 3 月 22 日收到修改稿)

Korteweg-de Vries (KdV) 方程是一种数学模型, 用于描述色散介质中长波的传播. 而非线性薛定谔 (NLS) 方程模拟了由短色散波组成的窄带宽波包的动态, 它是描述许多物理系统的有用模型, 包括玻色-爱因斯坦凝聚、光纤和水波等. 将 KdV 和 NLS 方程耦合起来的系统可以模拟长波和短波的相互作用. 这个系统在物理和数学上很有吸引力, 它结合了两个模型的优点. KdV 方程描述的长波可以影响 NLS 方程描述的短波的行为, 而短波反过来也可以影响长波的行为. 这样一个耦合系统在过去的几十年中得到了广泛的研究, 并为许多物理系统带来了重要的影响. 本文在 Bernard 等工作 (Bernard D, Nghiem V N, Benjamin L S 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 415501) 的基础上考虑了 KdV 非线性 Schrödinger 微扰系统柯西问题局部解的存在性, 并给出了解的存在空间.

关键词: 非线性 Schrödinger-KdV 系统, 柯西问题, 局部解

PACS: 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf

DOI: 10.7498/aps.72.20230241

1 引 言

非线性现象在数学和物理中受到了广泛的关注, 其中非常重要的立方非线性 Schrödinger-KdV (NLS-KdV) 系统[1–9] 形式如下:

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + a|u|^2 u = -buv, \tag{1}$$

$$v_t + cvv_x + v_{xxx} = -\frac{b}{2}(|u|^2)_x, \tag{2}$$

其中, $x, t \in R$; $v = v(x,t)$是一个实值函数; $u = u(x,t)$是一个复值函数; a, b, c是常数. 本文的目的是研究 (1) 式和 (2) 式微扰系统柯西问题局部解的存在性, 时间$t \geqslant 0$, 且初值为

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

$$v(x,0) = v_0(x). \tag{4}$$

在 (1) 式和 (2) 式组成的复合系统中耦合了数学和物理领域中研究最多也是最受关注的两个方程: 三次非线性 Schrödinger 方程 (1) 和描述了长的非线性色散波的单向传播的 KdV 方程 (2). 物理中这类非线性现象起源于电磁脉冲在光学极限传播时产生的干扰光, 计算数学物理中非线性方程的精确解和数值解, 特别是行波解, 在孤子理论中起着重要作用[10–12]. 从数学角度讲, 这两个方程都是完全可积的[1,2], 并且 Bernard 等[3] 在 2016 年给出了该系统作为物理模型的有效性. 特别地, 关于 KdV 系统的研究也取得了一系列成果, Bubnov[13,14]

* 国家重点研发计划 (批准号: 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100)、国家自然科学基金 (批准号: 61835013, 12234012) 和中国载人航天计划空间应用系统资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

研究了有限区间内 KdV 方程的边值问题; Zhang[15] 讨论了 KdV 系统的 Dirichlet 问题并给出了解的整体适定性分析; Pei 等[16] 基于 Kato 光滑效应以及 Laplace 变换, 给出了低正则边界条件下, KdV 系统解的整体适定性分析. 除此之外, 也有一些 KdV 相关系统的成果, Capistrano-Filho[17] 改进了 Bubnov 等[18] 的成果, Kumar 和 Alqahtani[19] 考虑了 KdV–Burgers 系统的初值问题和边值问题, 他们也研究了变系数的 KdV–Burgers 系统[20]. 因此, 无论是从物理还是数学的角度来说, 该系统都是值得研究的.

为了获得系统的局部解, 本文研究了带有微扰结构 $-\varepsilon v_{xx}$ 的非线性系统 ($\varepsilon>0$). 可以方便研究者今后利用局部解的先验估计将其推广至全局解. 因此, 有以下微扰问题:

$$\mathrm{i}u_t+u_{xx}+a|u|^2u=-buv, \tag{5}$$

$$v_t+cvv_x+v_{xxx}=-\frac{b}{2}(|u|^2)_x+\varepsilon v_{xx}, \tag{6}$$

它在初始条件 (3) 式和 (4) 式下的极限解, 即为系统 (1) 式和 (2) 式的解. 下面详述本文的主要结果.

定理 1 如果 $u_0,v_0\in H^s(s\geqslant 3)$, 则非线性系统 (3) 式—(6) 式的柯西问题存在局部解 $u(x,t)$, $v(x,t)\in L^\infty(0,T;H^s)$.

在研究之前, 给出一些本文用到的标记.

注记 1 C 是一个正的常数, 在本文不同的估计中代表不同的常数. 此外, 用 H^s 表示通常的 L_2-Sobolev 空间, 范数为

$$||u||_s^2=\sum_{|k|\leqslant s}||D^ku||_{L_2}^2,$$

以及 $L_p(\varOmega),1\leqslant p\leqslant\infty$ 表示一般的 L_p 空间, 范数为

$$||f||_{L_p(\varOmega)}=\left(\int_\varOmega|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

f 和 g 的内积为

$$(f,g)=\int_\varOmega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

2 微扰问题的局部存在性理论

首先对微扰系统 (5) 式和 (6) 式线性部分易得如下结论.

引理 1 假设 $\varPhi$ 是如下线性问题的解:

$$\varPhi_t+\varPhi_{xxx}-\varepsilon\varPhi_{xx}=0,\ \ (\varepsilon>0), \tag{7}$$

$$\varPhi|_{t=0}=v_0(x). \tag{8}$$

如果 $v_0(x)\in H^s$, 那么对于所有的时间 $T>0$ 有 $\varPhi(x,t)\in L^\infty(0,T;H^s)$, 且对于所有的时间 $t\geqslant 0$ 有 $||\varPhi(t)||_s\leqslant||v_0||_s$

证明 1 方程 (7) 和方程 (8) 的基本解为

$$E(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\mathrm{i}kx-\varepsilon k^2t+\mathrm{i}k^3t]\mathrm{d}k,$$

因此 $\varPhi(x,t)=E(x,t)*v_0(x)$ 是方程 (7) 的分布解, 其中 $*$ 表示 x 的卷积. 利用 Parseval 不等式, 可得

$$\begin{aligned}||D^s\varPhi(t)||&=||\widehat{D^s\varPhi(t)}||=||(\mathrm{i}k)^s\widehat{E(k,t)}\widehat{v_0(k)}||\\&\leqslant C||(\mathrm{i}k)^s\widehat{v_0(k)}||=C||D^sv_0(t)||,\end{aligned}$$

其中

$$\widehat{v(k,t)}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}v(x,t)\mathrm{d}x,$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\widehat{v(k,t)}\mathrm{d}k.$$

引理 2 假设 $\varPhi$ 是如下线性方程的解:

$$\mathrm{i}\varPhi_t+\varPhi_{xx}=0, \tag{9}$$

$$\varPhi|_{t=0}=u_0(x), \tag{10}$$

若 $u_0(x)\in H^s$, 则对于所有的时间 T 有 $\varPhi(x,t)\in L_\infty(0,T;H^s)$,

$$||\varPhi(t)||_l\leqslant||u_0||_l,\ \ (l=0,1,\cdots s).$$

证明 2 证明同上.

令序列 u^n, v^n 由以下线性方程定义:

$$\mathrm{i}u_t^n+u_{xx}^n+b\alpha^{n-1}\beta^{n-1}+a|\alpha^{n-1}|^2\alpha^{n-1}=0, \tag{11}$$

$$v_t^n+v_{xxx}^n+c\beta^{n-1}\beta_x^{n-1}+\frac{b}{2}(|\alpha^{n-1}|^2)_x=\varepsilon v_{xx}^n, \tag{12}$$

$$u^n(x,0)=v^n(x,0)=0,\ \ (n=1,2\cdots), \tag{13}$$

其中 $u^0=v^0=0$, $\alpha^{n-1}=\varPhi+u^{n-1}$, $\beta^{n-1}=\varPhi+v^{n-1}$, 然后有

$$\mathrm{i}\xi_t+\xi_{xx}=d(x,t), \tag{14}$$

$$w_t+w_{xxx}-\varepsilon w_{xx}=f(x,t), \tag{15}$$

$$\xi(x,0)=w(x,0)=0. \tag{16}$$

对于 $\xi=u^n,w=v^n$,

$$d(x,t)=d_{n-1}(x,t)=-b\alpha^{n-1}\beta^{n-1}-a|\alpha^{n-1}|^2\alpha^{n-1}, \tag{17}$$

$$f(x,t)=f_{n-1}(x,t)=-c\beta^{n-1}\beta_x^{n-1}-\frac{b}{2}(|\alpha^{n-1}|^2)_x. \tag{18}$$

引理 3 令 w 是如下问题的解:

$$w_t+w_{xxx}-\varepsilon w_{xx}=f(x,t), \tag{19}$$

$$w|_{t=0}=0,\tag{20}$$

如果 $f(x,t)\in L_\infty(0,T;H^{s-1})$,则 $w(x,t)\in L_\infty(0,T;H^s)$且满足

$$||w(t)||_l\leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||f(\tau)||_{l-1},$$

对于 $l=1,\cdots,s$. 其中 $A(t)=t+t^{\frac{1}{2}}$, $C(\varepsilon)$是依赖于 ε 的常数.

证明 3 $w(x,t)=\displaystyle\int_0^t E(x,t-\tau)*f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$ 是方程 (19) 和方程 (20) 的解. 通过 Fourier 变换和范数估计, 可以得到

$$\begin{aligned}||D^m w(t)||\leqslant&\int_0^t||\exp[-\varepsilon k^2(t-\tau)](\mathrm{i}k)^m\widehat{f(x,\tau)}||\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&\int_0^t||\exp[-\varepsilon k^2(t-\tau)](1+k^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{k^m}{(1+k^2)^{\frac{m}{2}}}\right](1+k^2)^{\frac{m-1}{2}}\widehat{f(k,\tau)}||\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

我们知道 $(1+k^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1+|k|$, 因此

$$\begin{aligned}||D^m w(t)||\leqslant&\int_0^t||\exp[-\varepsilon k^2(t-\tau)](1+|k|)(1+k^2)^{\frac{m-1}{2}}\widehat{f(k,\tau)}||\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&\sum_{i=0}^{1}\int_0^t(\varepsilon(t-\tau))^{-\frac{1}{2}}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||z^i\exp(-z^2)(1+k^2)^{\frac{m-1}{2}}\widehat{f(k,\tau)}||\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

其中 $z=|k|(\varepsilon(t-\tau))^{\frac{1}{2}}, z^i\exp(-z^2)\leqslant\text{const}, (i=0,1)$, 有

$$||w(t)||_m\leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||f(\tau)||_{m-1}, A(t)=t+t\frac{1}{2}.$$

引理 4 令 ξ 是如下问题的解:

$$\mathrm{i}\xi_t+\xi_{xx}=d(x,t),\tag{21}$$

$$\xi|_{t=0}=0,\tag{22}$$

如果$d(x,t)\in L_\infty(0,T;H^s)$,则$\xi(x,t)\in L_\infty(0,T;H^s)$且满足

$$||\xi(t)||_l\leqslant A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||\mathrm{d}(\tau)||_l,$$

对于所有的$l=0,1,\cdots,s$, 其中$A(t)=ct, c>0$.

证明 4 令 $R(x,t)=\dfrac{1}{(4\pi ait)^{\frac{1}{2}}}\exp\Big(-\dfrac{\mathrm{i}x^2}{4at}\Big)$, 则 $\xi(x,t)=\displaystyle\int_0^t R(x,t-\tau)*[-\mathrm{i}d(x,\tau)]\mathrm{d}\tau$ 是 (21) 式和 (22) 式的解, 则有

$$||\xi||\leqslant\int_0^t||d(x,\tau)||\mathrm{d}\tau\leqslant t\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||d(x,\tau)||,$$

因此

$$\begin{aligned}||D^l\xi||\leqslant&\int_0^t||D^lR(x,t-\tau)*[-\mathrm{i}d(x,\tau)]||\mathrm{d}\tau\\ =&\int_0^t||R(x,t-\tau)*D^l[-\mathrm{i}d(x,\tau)]||\mathrm{d}\tau\\ \leqslant&Ct\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||d(x,\tau)||_l.\end{aligned}$$

引理 5 令 $u_0,v_0\in H^s,(s\geqslant 2)$, 序列 u^n,v^n 是由 (11) 式—(13) 式定义, 则存在$t_1>0(0\leqslant t\leqslant t_1)$使得

$$||u^n(t)||_l\leqslant C_1(\varepsilon,l),$$

$$||v^n(t)||_l\leqslant C_2(\varepsilon,l),$$

对于所有的$l=2,3,\cdots,s$.

在证明引理 5 之前, 先给出两个引理.

引理 6 如果 $n(x)\in H^s, s\geqslant 1$,则对于所有的 $p\leqslant s-1, \alpha=(2s)^{-1}(2p+1)$, 有

$$||D^pn||_\infty\leqslant C_1(||n||^{1-\alpha}||D^sn||^\alpha+||n||)\leqslant C_2||n||_s,$$

其中C_1,C_2依赖于 n.

引理 7 令 $k\geqslant 1, f(n)\in C^k, f(0)=0, n(x,t)\in L_\infty(0,T;H^k)$, 那么 $f(n(x,t))\in L_\infty(0,T;H^k)$然后有

$$||f(n(t))||_1\leqslant CM_1(f,b)||n(t)||_1,$$

$$||f(n(t))||_k\leqslant CM_k(f,b)(1+||n(t)||_{k-1}^{k-1})||n(t)||_k,$$

其中, $M_k(f,b)=\max_s\sup_\nu|D^sf(\nu)|,(s=1,\cdots,k;|\nu|\leqslant b)$, 其中$b=\sup_\tau||n(\tau)||_\infty,(0\leqslant\tau\leqslant t)$. 其中的常数依赖于 f 和 n.

证明 5 首先证明$l=2$, 对于引理 3 和引理 4, 有

$$\begin{aligned}||v^n(t)||_2\leqslant&C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||f_{n-1}(\tau)||_1\\ =&C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||-c\beta^{n-1}\beta_x^{n-1}\\ &-\frac{b}{2}(|\alpha^{n-1}|^2)_x||_1,\end{aligned}$$

其中 $A(t)=t+t^{\frac{1}{2}}$,

$$||u^n(t)||_2 \leqslant A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||d_{n-1}(\tau)||_2$$
$$=A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||-b\alpha^{n-1}\beta^{n-1}$$
$$-a|\alpha^{n-1}|^2\alpha^{n-1}||_2,$$

其中 $A_1(t)=C(t)$. 我们知道

$$f_0(x,t)=-c\beta^0\beta^0_x-\frac{b}{2}(|\alpha^0|^2)_x$$

以及

$$\beta^0=\varPhi,\quad \beta^0_\alpha=\varPhi_\alpha,$$
$$|\alpha^0|^2_x=\alpha^0_x\overline{\alpha^0}+\overline{\alpha^0_x}\alpha^0=\varPsi_x\overline{\varPsi}+\overline{\varPsi_x}\varPsi,$$

对于引理 6, 引理 1 和引理 2, 有

$$||\beta^0||_{L_\infty}\leqslant C_0||\beta^0||_1=C_0||\varPhi^0||_1\leqslant C_1||v_0||_1,$$
$$||\beta^0_x||_{L_\infty}\leqslant C'||\beta^0||_1=C'||\varPhi^0||_1\leqslant C_2||v_0||_1,$$
$$||\varPsi||_{L_\infty}\leqslant C''||\varPsi||_1\leqslant C_3||u_0||_1,$$
$$|(|\alpha^0|^2)_x|\leqslant 2||\varPsi||_{L_\infty}||\varPsi_x||\leqslant C_4||u_0||_1^2,$$

然后

$$||f_0(\tau)||\leqslant\eta_1(||u_0||_1,||v_0||_1)\leqslant B_1,$$

其中 $\eta_j(x,y)$描述随变量 x,y单调递增的函数 $\eta_j(x,y)>0, j=1,2,\cdots$, B_1是一个常数.

我们知道

$$\frac{\partial}{\partial x}f_0(x,t)=-c(\beta^0_x)^2-c\beta^0\beta^0_{xx}$$
$$-\frac{b}{2}\left[\alpha^0_{xx}\overline{\alpha^0}+2\alpha^0_x\overline{\alpha^0_x}+\alpha^0\overline{\alpha^0_{xx}}\right],$$

此后

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}f_0(\tau)\right\|$$
$$\leqslant||\varPhi_x||_{L_\infty}||\varPhi_x||+||\varPhi||_{L_\infty}||\varPhi||+||\varPsi||_{L_\infty}||\varPsi||$$
$$+||\varPsi_x||_{L_\infty}||\varPsi_x||\leqslant\eta_2(||u_0||_2,||v_0||_2)\leqslant B_2,$$

其中 B_2 是一个常数.

同时有 $||f_0(\tau)||_1=\left(||f_0(\tau)||^2+\left\|\frac{\partial}{\partial x}f_0(\tau)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\leqslant B_3$, 其中 B_3 是一个常数, 那么

$$||v^1(t)||_2\leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||f_0(\tau)||_1$$
$$\leqslant C(\varepsilon)A(t_1)B_3=B_4,$$

我们知道 $d_0(x,t)=-b\alpha^0\beta^0-a|\alpha^0|^2\alpha^0$, $\alpha^0=\varPsi$, 进而得到

$$||\alpha^0\beta^0||\leqslant||\varPhi||_{L_\infty}||\varPsi||\leqslant C_5||v_0||_1||u_0||,\qquad |||\alpha^0|^2\alpha^0||\leqslant||\varPsi||^2_{L_\infty}||\varPsi||\leqslant C_6||u_0||_1^2||u_0||,$$
$$||(\alpha^0\beta^0)_x||=||\alpha^0_x\beta^0+\alpha^0\beta^0_x||\leqslant||\alpha^0_x||||\beta^0||_{L_\infty}+||\alpha^0||_{L_\infty}||\beta^0||$$
$$=||\varPsi_x||||\varPhi||_{L_\infty}+||\varPsi||_{L_\infty}||\varPhi_x||\leqslant C_7||v_0||_1||u_0||_1,$$
$$||(|\alpha^0|^2\alpha^0)_x||=||4\overline{\varPsi}\varPsi\varPsi_x+2\varPsi^2\overline{\varPsi_x}||\leqslant||\varPsi||^2_{L_\infty}||\varPsi_x||\leqslant||u_0||_1^3,$$
$$||(\alpha^0\beta^0)_{xx}||=||\alpha^0_{xx}\beta^0+\alpha^0\beta^0_{xx}+2\alpha^0_x\beta^0_x||\leqslant||\varPsi_{xx}||||\varPhi||_{L_\infty}+2||\varPsi_x||_{L_\infty}||\varPhi_x||+||\varPhi_{xx}||||\varPsi||_{L_\infty}$$
$$\leqslant C_8||v_0||_2||u_0||_2,$$
$$||(|\alpha^0|^2\alpha^0)_{xx}||=||4(\varPsi_x^2\overline{\varPsi}+\varPsi\varPsi_{xx}\overline{\varPsi}+\varPsi\varPsi_x\overline{\varPsi_x})+2(2\varPsi\varPsi_x\overline{\varPsi_x}+\varPsi^2\overline{\varPsi_{xx}})||$$
$$\leqslant C_9(||\varPsi_x||^2||\varPsi||_{L_\infty}+||\varPsi_{xx}||||\varPsi||^2_{L_\infty})\leqslant C_{10}||u_0||_1^3.$$

另外有

$$||u'(t)||_2\leqslant A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||d_0(\tau)||_2\leqslant A_1(t_1)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_3(||u_0||_2,||v_0||_2)=B_2,$$

那么

$$\max(||u^1(t)||_2,||v^1(t)||_2)\leqslant\max(B_4,B_5)=B,$$

这意味着当 $k=1$时, $||u^1(t)||_2,||v^1(t)||_2$是有界的.

当 $k=2$时, 有

$$||v^2(t)||_2\leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||f_1(\tau)||_1,\quad ||u^2(t)||_2\leqslant A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||d_1(\tau)||_2,$$

其中

$$f_1(\tau) = -c\beta^1\beta^1_x - \frac{b}{2}(|\alpha^1|^2)_x, \quad d_1(\tau) = -b\alpha^1\beta^1 - a|\alpha^1|^2\alpha^1,$$

以及$\beta^1 = \varPhi + v^1$, $\alpha^1 = \varPsi + u^1$, 然后

$$||\beta^1||_{L_\infty} \leqslant C_{11}||\beta^1||_2 \leqslant C_{11}(||\varPhi||_2 + ||v^1||_2) \leqslant C_{11}(||v_0||_2 + B),$$

$$||\alpha^1||_{L_\infty} \leqslant C_{11}||\alpha^1||_2 \leqslant C_{11}(||\varPsi||_2 + ||u^1||_2) \leqslant C_{11}(||u_0||_2 + B),$$

$$||\beta^1||_2 \leqslant \frac{C_{12}}{C_{11}}(||v_0||_2 + B), \quad ||\alpha^1||_2 \leqslant \frac{C_{14}}{C_{13}}(||u_0||_2 + B).$$

正如证明$k = 1$, 有

$$||v^1(t)||_2 \leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_4(||u^1||_2, ||v^1||_2) \leqslant B,$$

$$||u^1(t)||_2 \leqslant A_1(t_1)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_5(||u^1||_2, ||v^1||_2) \leqslant B.$$

现在通过引入$k(k \geqslant 3)$来证明, 令$\max(||u^{k-1}||_2, ||v^{k-1}||_2) \leqslant B$, 然后

$$||\beta^{k-1}||_1 \leqslant ||\beta^{k-1}||_2 \leqslant C_{15}(||\varPhi||_2 + ||v^{k-1}||_2) \leqslant C_{16}(||v_0||_2 + B),$$

$$||\alpha^{k-1}||_1 \leqslant ||\alpha^{k-1}||_2 \leqslant C_{17}(||\varPsi||_2 + ||u^{k-1}||_2) \leqslant C_{18}(||u_0||_2 + B),$$

则有

$$||v^k(t)||_2 \leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_6(||u^{k-1}||_2, ||v^{k-1}||_2) \leqslant B,$$

$$||u^k(t)||_2 \leqslant A_1(t_1)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\eta_7(||u^{k-1}||_2, ||v^{k-1}||_2) \leqslant B.$$

现在证明$l \geqslant 3$时的引理, 事实上, 有

$$||v^k||_l \leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||f_{k-1}(\tau)||_{l-1}, \quad ||u^k||_l \leqslant A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||d_{k-1}(\tau)||_l,$$

$$||f_{k-1}(\tau)||_{l-1} = ||-c\beta^{k-1}\beta^{k-1}_x - \frac{b}{2}(|\alpha^{k-1}|^2)_x||_{l-1} \leqslant \eta_8(||\beta^{k-1}||_l, ||\alpha^{k-1}||_l),$$

$$||d_{k-1}(\tau)||_l = ||-b\alpha^{k-1}\beta^{k-1} - a|\alpha^{k-1}|^2\alpha^{k-1}||_l \leqslant \eta_9(||\beta^{k-1}||_l, ||\alpha^{k-1}||_l),$$

通过引入以上证明, 有$||v^k||_l \leqslant B, ||u^k||_l \leqslant B$.

引理 8 令$u_0, v_0 \in H^s(s \geqslant 2)$, 存在常数$t^s$和$\rho(0 < \rho < 1)$, 使得

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t_s}[||v^{n+1}(\tau) - v^n(\tau)||_s + ||u^{n+1}(\tau) - u^n(\tau)||_s] \leqslant \rho \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t_s}[||v^n(\tau) - v^{n-1}(\tau)||_s + ||u^n(\tau) - u^{n-1}(\tau)||_s].$$

证明 6 将 (12) 式中的 n 变为$n+1$且与原式相减, 则有

$$(v^{n+1} - v^n)_t + (v^{n+1} - v^n)_{xxx} - \varepsilon(v^{n+1} - v^n)_{xx} = -c\beta^n\beta^n_x - \frac{b}{2}(|\alpha^n|^2)_x - \left[-c\beta^{n-1}\beta^{n-1}_x - \frac{b}{2}(|\alpha^{n-1}|^2)_x\right],$$

令$w = v^{n+1} - v^n$, 然后

$$w_t + w_{xxx} - \varepsilon w_{xx} = r_1(\beta^n,\ \beta^{n-1},\ \alpha^n,\ \alpha^{n-1}),$$

其中

$$r_1(\beta^n, \beta^{n-1}, \alpha^n, \alpha^{n-1}) = -c\beta^n\beta^n_x - \frac{b}{2}(|\alpha^n|^2)_x - \left[-c\beta^{n-1}\beta^{n-1}_x - \frac{b}{2}(|\alpha^{n-1}|^2)_x\right]$$

$$= -c(\beta^n - \beta^{n-1})\beta^n_x + c\beta^{n-1}(\beta^{n-1}_x - \beta^n_x) - \frac{b}{2}[|\alpha^n|^2 - |\alpha^{n-1}|^2]_x,$$

然后

$$|r_1(\beta^n,\beta^{n-1},\alpha^n,\alpha^{n-1})|\leqslant|c||\beta^n-\beta^{n-1}||\beta_x^n|+|c||\beta^{n-1}||\beta_x^{n-1}-\beta_x^n|+|b||\alpha^n-\alpha^{n-1}||\alpha_x^n|+|b||\alpha^{n-1}||\alpha_x^{n-1}-\alpha_x^n|,$$

则有

$$||r_1||_{s-1}\leqslant C_{19}[||\alpha^n-\alpha^{n-1}||_s+||\beta^n-\beta^{n-1}||_s],$$

根据引理 3 已经足够可以证明:

$$||w||_s\leqslant C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leq\ \tau\leqslant t}||r_1(\beta^n,\beta^{n-1},\alpha^n,\alpha^{n-1})||_{s-1}\leqslant C_{19}C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leq\ \tau\leqslant t}[||\alpha^n-\alpha^{n-1}||_s+||\beta^n-\beta^{n-1}||_s],$$

我们知道$\alpha^n-\alpha^{n-1}=u^n-u^{n-1},\beta^n-\beta^{n-1}=v^n-v^{n-1}$, 则

$$||v^n-v^{n-1}||_s\leqslant C_{19}C(\varepsilon)A(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}[||u^n-u^{n-1}||_s+||v^n-v^{n-1}||_s].$$

同样地, 可以得到关于$||u^{n+1}-u^n||_s$的估计. 将 (11) 式的 n 替换为$n+1$再减去原式, 有

$$\mathrm{i}(u^{n+1}-u^n)_t+(u^{n+1}-u^n)_{xx}=b\alpha^n\beta^n-a|\alpha^n|^2\alpha^n-[b\alpha^{n-1}\beta^{n-1}-a|\alpha^{n-1}|^2\alpha^{n-1}],$$

令$V=u^{n+1}-u^n$, 则

$$\mathrm{i}V_t+V_{xx}=r_2(\beta^n,\beta^{n-1},\alpha^n,\alpha^{n-1}),$$

其中

$$r_2(\beta^n,\beta^{n-1},\alpha^n,\alpha^{n-1})=b\alpha^n\beta^n-a|\alpha^n|^2\alpha^n-[b\alpha^{n-1}\beta^{n-1}-a|\alpha^{n-1}|^2\alpha^{n-1}],$$

则

$$\begin{aligned}||r_2||_s&=||b[\alpha^n(\beta^n-\beta^{n-1})+(\alpha^n-\alpha^{n-1})\beta^{n-1}]+a[(|\alpha^{n-1}|^2-|\alpha^n|^2)\alpha^{n-1}+|\alpha^n|^2(\alpha^{n-1}-\alpha^n)]||_s,\\&\leqslant C_{20}[||\alpha^n-\alpha^{n-1}||_s+||\beta^n-\beta^{n-1}||_s].\end{aligned}$$

从引理 4, 有

$$\begin{aligned}||V||_s&\leqslant A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}||r_2||_s\leqslant C_{20}A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}[||\alpha^n-\alpha^{n-1}||_s+||\beta^n-\beta^{n-1}||_s]\\&=C_{20}A_1(t)\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}[||u^n-u^{n-1}||_s+||v^n-v^{n-1}||_s],\end{aligned}$$

则

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}[||u^{n+1}-u^n||_s+||v^{n+1}-v^n||_s]\leqslant(C_{19}C(\varepsilon)A(t)+C_{20}A_1(t))\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}[||u^n-u^{n-1}||_s+||v^n-v^{n-1}||_s],$$

选择t^s使得$C_{19}C(\varepsilon)A(t)+C_{20}A_1(t)\leqslant\rho<1,0\leqslant t\leqslant t^s$, 则有

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t_s}[||v^{n+1}(\tau)-v^n(\tau)||_s+||u^{n+1}(\tau)-u^n(\tau)||_s]\leqslant\rho\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t_s}[||v^n(\tau)-v^{n-1}(\tau)||_s+||u^n(\tau)-u^{n-1}(\tau)||_s].$$

利用H^s的完备性, 可以获得关于序列u^n,v^n的H^s在 t 的极限下的解$u(x,t),v(x,t)\in L^\infty(0,T;H^s)$.

3 结 论

本文研究了具有长波-短波相互作用耦合的非线性 Schrödinger-KdV 方程, 主要通过研究带有微扰结构$-\varepsilon v_{xx}(\varepsilon>0)$的非线性系统, 获得该系统的局部解, 主要结论可以描述为如下定理.

定理 2 如果$u_0,v_0\in H^s(s\geqslant3)$, 则系统 (3) 式—(6) 式存在局部解$u(x,t),v(x,t)\in L^\infty(0,T;H^s)$.

此结论为研究者今后利用局部解的先验估计将其推广至全局解提供了理论依据, 进一步可以得到 NLS-KdV 系统解的整体适定性分析. 在相应的工作空间内, 通过构造系统逼近解并结合精细的估计和分析, 给出了该微扰系统柯西问题的局部解, 对研究该系统的整体适定性提供了理论保证, 具有重要的意义.

参考文献

[1] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095

[2] Shabat A, Zakharov V 1972 *Sov. Phys. JETP* **34** 62
[3] Bernard D, Nghiem V N, Benjamin L S 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 415501
[4] Albert J, Bhattarai S 2013 *Adv. Differ. Equ.* **18** 112964
[5] Angulo Pava J 2006 *Electron. J. Differ. Equ.* **72** 1
[6] Angulo Pava J, Matheus C, Pilod D 2009 *Commun. Pure Appl. Anal.* **8** 81544
[7] Chen L 1999 *J. Partial Differ. Equ.* **12** 11
[8] Corcho A J, Linares F 2007 *Trans. Am. Math. Soc.* **359** 4089106
[9] Dias J P, Figueira M, Oliveira F 2010 *Nonlinear Anal.* **73** 268698
[10] Appert K, Vaclavik J 1977 *Phys. Fluids* **20** 18459
[11] Ikezi H, Nishikawa K, Hojo H, Mima K 1974 *Proc. 5th Int. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res. (Tokyo)* 23948
[12] Nishikawa K, Hojo H, Mima K, Ikezi H 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 14851
[13] Bubnov B A 1979 *Differ. Equ.* **15** 17
[14] Bubnov B A 1980 *Differ. Equ.* **16** 24
[15] Zhang B Y 1994 *Int. Ser. Numer. Math.* **118** 371
[16] Pei Y, Guo B, Liu W 2022 *Math. Methods Appl Sci.* **45** 4853
[17] Capistrano-Filho R A, Sun S M, Zhang B Y 2018 *Math. Control Relat. Fields* **8** 583
[18] Bona J L, Dougalis V A 1980 *J. Math. Anal. Appl.* **75** 503
[19] Kumar V, Alqahtani A 2017 *Nonlinear Dyn.* **90** 2903
[20] Kumar V, Alqahtani A 2019 *Adv. Differ. Equ.* **1** 1

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

Initial value problem of nonlinear KdV-Schrödinger system*

Pei Yi-Tong [1)2)] Wang Jin-Kun [2)] Guo Bo-Ling [3)] Liu Wu-Ming [2)†]

1) (*School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 211106, *China*)

2) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*)

3) (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100088, *China*)

(Received 20 February 2023; revised manuscript received 22 March 2023)

Abstract

The Korteweg-de Vries (KdV) equation is a mathematical model that describes the propagation of long waves in dispersive media. It takes into account both nonlinearity and dispersion, and is particularly useful for modeling phenomena like solitons. The nonlinear Schrödinger (NLS) equation models the dynamics of narrow-bandwidth wave packets consisting of short dispersive waves. It is a useful model for describing many physical systems, including Bose-Einstein condensates, optical fibers, and water waves. A system that couples the KdV and NLS equations can model the interaction of long and short waves. This system combines the strengths of both models. The long waves described by the KdV equation can affect the behavior of the short waves described by the NLS equation, while the short waves can in turn affect the behavior of the long waves. Such a coupled system has been studied extensively over the last few decades, and has led to important insights into many physical systems. This paper considers the existence of local solutions to the Cauchy problem of KdV-Schrödinger nonlinear system on the basis of literature (Bernard D, Nghiem V N, Benjamin L S 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 415501), and also gives the existence space of the local solutions.

Keywords: nonlinear Schrödinger-KdV system, Cauchy problem, local solutions

PACS: 02.10.Yn, 33.15.Vb, 98.52.Cf **DOI:** 10.7498/aps.72.20230241

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2021YFA1400900, 2021YFA0718300, 2021YFA1402100), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61835013, 12234012), and the Space Application System of China Manned Space Program.

† Corresponding author. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

一类非线性Schrödinger-KdV微扰系统的初值问题

裴一潼 王锦坤 郭柏灵 刘伍明

Initial value problem of nonlinear KdV–Schrdinger system

Pei Yi-Tong Wang Jin-Kun Guo Bo-Ling Liu Wu-Ming

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 100201 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230241

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20230241

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
