

专题: 磁约束等离子体中的高能粒子

# 反磁剪切托卡马克等离子体中低频剪切阿尔芬波的理论研究\*

马瑞瑞<sup>1)†</sup> 陈骝<sup>2)3)</sup> 仇志勇<sup>2)</sup>

1) (核工业西南物理研究院, 成都 610041)

2) (浙江大学物理系, 杭州 310027)

3) (加州大学欧文分校物理与天文学系, 加州 CA 92697-4574)

(2023年2月21日收到; 2023年6月14日收到修改稿)

位于动理学热离子带隙附近的低频阿尔芬扰动因可以与高能粒子或背景热粒子发生相互作用而引起广泛的关注. 本文在一般鱼骨模色散关系的理论框架下, 针对反磁剪切托卡马克等离子体中观测到的由高能粒子或者背景热粒子激发的低频剪切阿尔芬波的线性特性进行了一系列的理论研究. 由于这些低频剪切阿尔芬波与2019年DIII-D开展的专门研究高能离子驱动低频不稳定的实验密切相关, 因此本文通过采用DIII-D具有代表性实验的平衡参数, 证明了实验上观测的低频模和比压阿尔芬本征模分别是以阿尔芬极化为主的反应型和耗散型不稳定模, 因此, 将前者称为低频阿尔芬模更准确. 由于受逆磁和捕获粒子动理学效应的影响, 低频阿尔芬模既可以在低频区(频率小于热离子的渡越或反弹频率)与比压阿尔芬声模耦合, 又可以在高频区(频率大于或近似等于热离子的渡越频率)与比压阿尔芬本征模耦合. 此外, 由于受到不同激发机制的影响, 与局域在安全因子最小值有理面附近的低频阿尔芬模相比, 驱动比压阿尔芬本征模的高能离子的压强梯度在偏离安全因子最小值的有理面时达到最大值, 相应的比压阿尔芬本征模的本征函数在高质量离子驱动最大的径向位置处出现峰值. 通过改变安全因子最小值理论上重现了实验上观测的比压阿尔芬本征模和低频阿尔芬模的上升频谱特征. 研究还表明, 比压阿尔芬声模由于受到强烈的朗道阻尼, 因而很难被高能粒子激发, 这与基于第一性原理的理论预测和模拟结果一致. 本文证明了一般鱼骨模色散关系在解释和预测实验和数值模拟结果方面的强大能力.

**关键词:** 低频剪切阿尔芬波, 高能粒子, 不稳定性, 回旋动理学**PACS:** 52.35.Bj, 52.55.Pi, 52.35.Py, 52.30.Gz**DOI:** 10.7498/aps.72.20230255

## 1 引言

高能粒子 (energetic particle, EP) 在聚变等离子体中的约束特性对决定当前和未来接近或在反应堆参数区间运行的托卡马克的性能具有重要意义. 例如, 为了点燃氘-氚 (D-T) 等离子体, 必须对在 D-T 聚变反应中产生的阿尔法粒子进行良

好的约束. 同样地, 在射频或中性束注入实验中产生的高能离子也必须受到良好的约束才能成功地实现等离子体加热和/或电流驱动. 尽管目前基于库仑碰撞理论对 EP 约束性的评估是可行的, 但这一理论仍然存在严重的问题, 问题主要来自于由 EP 激发的集体振荡所引起的 EP 的反常输运损失. 这是由于携带着足够强的来自压强梯度自由的 EP, 其特征频率 (例如渡越/反弹频率) 与剪

\* 国家磁约束核聚变发展研究 (批准号: 2022YFE03040002, 2018YFE0304103)、国家自然科学基金 (批准号: 12261131622, 12175053) 和四川省自然科学基金 (批准号: 2022NSFSC1814) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: rрма@swip.ac.cn

切阿尔芬波 (shear Alfvén wave, SAW) 的频率在同一量级 (均在 MHz 范围内), 并且 SAW 的群速度与磁场平行, 因此通过波-粒共振相互作用, 可以直接激发多种 SAW, 并引起 EP 的反常输运. 在聚变装置中, 由于磁场和等离子体的不均匀性, 使得各种阿尔芬本征模 (Alfvén eigenmode, AE) 存在于 SAW 连续谱的带隙中. 这些 AE 因不受连续谱阻尼的影响, 很容易被 EP 激发, 因此通常被认为是 EP 输运的主要因素<sup>[4]</sup>.

在这些由不同效应引起的 AE 中, 其中由有限比压引起的阿尔芬本征模 (beta-induced Alfvén eigenmode, BAE) 存在于由热等离子体可压缩效应产生的间隙中<sup>[2,3]</sup>. 自首次观测到 BAE 以来<sup>[2,3]</sup>, 动理学热离子带隙频率<sup>[4]</sup> 范围内的低频阿尔芬波谱一直是人们研究的热点. 这些模的频率 ( $\omega$ ) 与热离子逆磁频率 ( $\omega_{*pi}$ ) 同一量级, 且与热离子渡越 ( $\omega_{ti}$ ) 和/或反弹 ( $\omega_{bi}$ ) 频率相当, 因而可以与背景热粒子和 EP 发生相互作用<sup>[1,5-9]</sup>. 由这种相互作用引起的有限电磁扰动和带状场结构会对相应粒子的输运过程产生正面或负面的影响<sup>[1,4,10]</sup>. 这类低频 SAW 扰动包括但不限于: 考虑了有限逆磁漂移效应的动理学气球模 (kinetic ballooning mode, KBM)<sup>[11-13]</sup>、由热离子可压缩性而引起的 BAE<sup>[2,3]</sup>、由动理学热离子可压缩性及波-粒共振效应引起的阿尔芬的离子温度梯度 (Alfvénic ion temperature gradient, AITG) 模<sup>[6,14]</sup>、以及由两个边带声模相互耦合再与 SAW 耦合而产生的比压阿尔芬声模 (beta-induced Alfvén acoustic eigenmode, BAAE)<sup>[15,16]</sup>. 对于这些低频 SAW, 由于热等离子体的可压缩效应会对其色散关系产生重要的修正, 因此, 低频 SAW 的线性性质往往与已被广泛研究的环向阿尔芬本征模 (toroidal Alfvén eigenmode, TAE)<sup>[17]</sup> 和反磁剪切阿尔芬本征模 (reversed shear Alfvén eigenmode, RSAE)<sup>[18,19]</sup> 等高频阿尔芬本征模的线性性质不同. 一般地, 包含任何热粒子动理学效应的由高能粒子激发的 Alfvén 波的不稳定性, 均可以在由 Zonca 和 Chen<sup>[20,21]</sup> 发展的一般类鱼骨模色散关系 (general fishbone-like dispersion relation, GFLDR) 的理论框架下进行统一的描述. GFLDR 是类比磁流体能量原理的推导方法, 将描述波色散关系的式子表示为类能量形式的方程. 它首先要求扰动量在空间上存在两个径向尺度, 然后采用模分解<sup>[22]</sup> 和 WKB (Wentzel-Kramers-

Brillouin)<sup>[23,24]</sup> 渐进匹配的方法将涡量方程表示成能量函数的形式. 该理论已成功用于鱼骨模、有限磁剪切下 BAE 等相关实验的解释和模拟的验证<sup>[25-27]</sup>. 在动理学处理中, 低频 SAW 连续谱的极化可以迅速变化, 模之间的耦合对热离子的温度和密度的比值以及热离子逆磁频率与渡越频率的比值非常敏感<sup>[5,28]</sup>. 因此, 与低频间隙相关的各种特征频率变得非常重要. 例如, 通行粒子共振条件取决于渡越频率, 而捕获粒子的共振条件取决于反弹频率和环向进动频率. 为了直观地说明与低频间隙相关的特征频率对低频 SAW 连续谱的影响, 我们采用 GFLDR 理论<sup>[5,7,14,20,21,29,30]</sup> 画出了环向模数  $n = 3$ 、极向模数  $m = 4-8$  的低频 SAW 和声波分支的连续谱, 结果如图 1 所示. 这里采用了 DIII-D 第 #178631 次放电在 1200 ms 的平衡剖面. 其中图 1(a1)–(c1) 的连续谱包含了逆磁效应和热通行离子可压缩效应, 以及通过波-热离子相互作用和逆磁效应而产生的漂移阿尔芬波和漂移波边带模的耦合<sup>[7]</sup>. 因此, 该连续谱可以描述模频率满足  $|\omega_{bi}| < \omega < |\omega_A|$  ( $\omega_A$  代表 Alfvén 频率) 的低频模. 图 1(a2)–(c2) 则包含了逆磁效应与热通行和热捕获离子的可压缩效应, 能够描述更低频 ( $0 < |\omega| < |\omega_A|$ ) 的 SAW 分支<sup>[5,8,28]</sup>. 根据 GFLDR, 我们可以通过模的频率 ( $\text{Re}(\omega/\omega_{ti})$ )(a)、增长率 ( $\text{Im}(\omega/\omega_{ti})$ )(b) 和极化性质 ( $|S_f|$ )(c) 对各种分支进行分类, 这一点将在下文详细阐述. 这里要强调的是, 通过对比图 1(a1)–(c1) 和图 1(a2)–(c2) 可知, 捕获粒子的动理学效应对相对高频的 BAE 的连续谱无明显影响, 而对低频的 BAAE 和 KBM 的连续谱 (如频率、增长率及极化性质) 产生了重大的影响.

最近关于 EP 对这些低频 SAW 影响的实验和模拟研究涵盖了最新开发的创新诊断方法对实验测量的解释和建模<sup>[31-35]</sup>, 以及在将数值研究和/或模拟结果与观察到的现象进行比较方面的最新进展<sup>[28,36-40]</sup>. 尤其是 2019 年 Heidbrink 等<sup>[33-35]</sup> 在 DIII-D 上进行的一系列实验专门研究了低频 SAW 的不稳定性. 这些实验中发现: 之前被识别为 DIII-D 中由高能离子驱动的低频 BAAE 不稳定性其实与高能离子的驱动无关, 而且这种环向模数  $n = 3-12$  的不稳定性强烈地依赖于电子的参数 (如电子温度  $T_e$  及其梯度), 其频率与离子逆磁频率相当, 并低于 BAAE 的带隙中心. 此外, 在  $T_e \geq 2.1$  keV

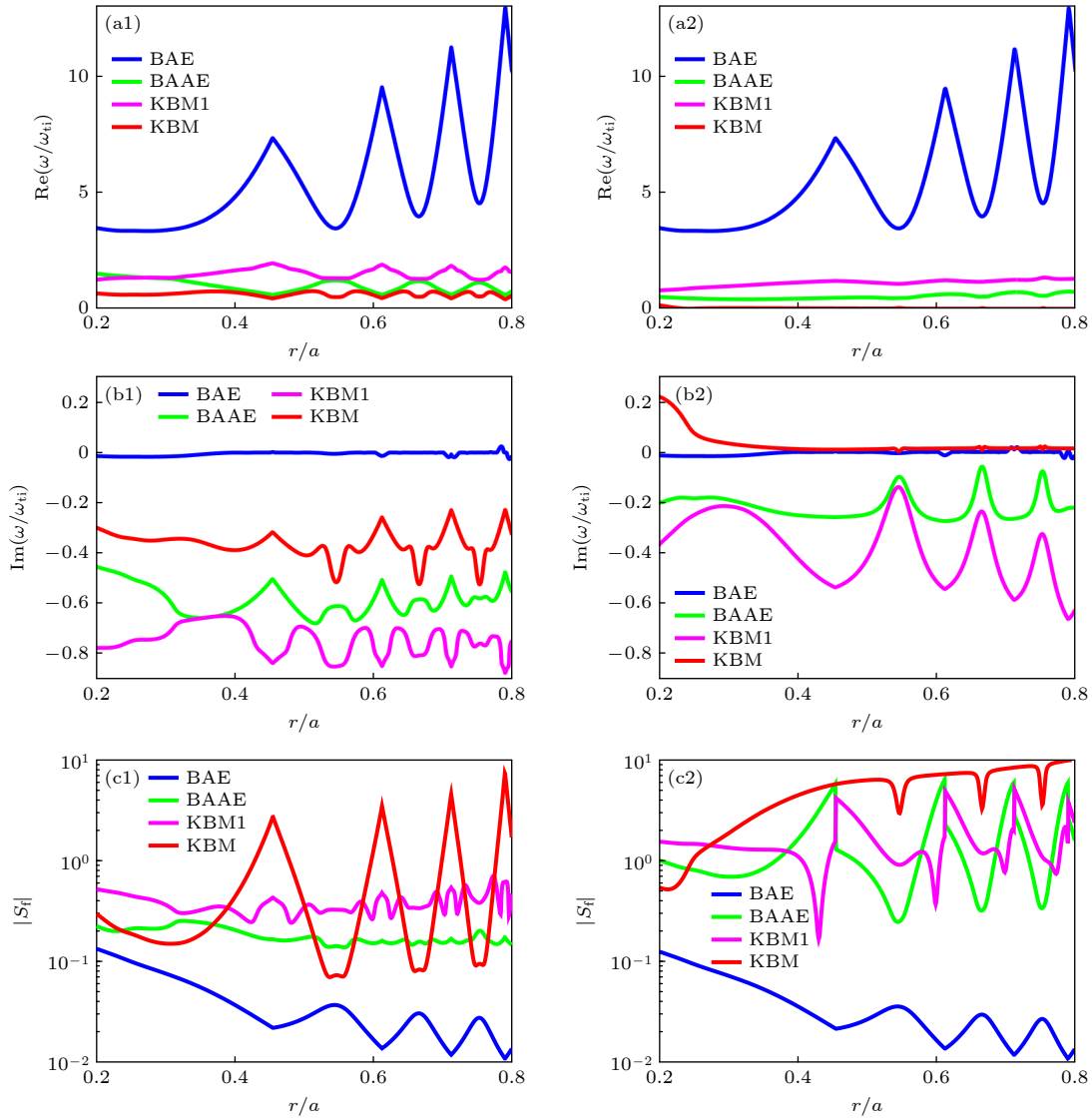


图 1  $n = 3, m = 4-8$  的低频 SAW 和声波分支的连续谱, 此处采用了 DIII-D 第 #178631 次放电在 1200 ms 的平衡分布 (a1)–(c1) 考虑了逆磁效应和热通行离子可压缩效应, 以及通过波-热离子相互作用和逆磁效应而产生的漂移阿尔芬波和漂移波边带模的耦合<sup>[7]</sup>的低频 SAW 连续谱; (a2)–(c2) 包含了逆磁效应与热通行和热捕获离子的可压缩效应<sup>[5,8,28]</sup>

Fig. 1. Continuous spectra of low-frequency shear Alfvén and acoustic branches for  $n = 3, m = 4-8$ : (a1)–(c1) Considering the diamagnetic effects and thermal ion compressibility as well as drift Alfvén wave and drift wave sideband coupling via the wave-thermal-passing-ion interaction and diamagnetic effect<sup>[7]</sup>; (a2)–(c2) considering the diamagnetic effects and thermal ion compressibility (well passing and deeply trapped particle dynamics)<sup>[5,8,28]</sup>. The equilibrium profiles of DIII-D #178631 at 1200 ms are adopted.

且比压  $\beta$  值适中的实验条件下, 这类低频模呈现出“圣诞彩灯”和“山峰”的频谱特征, 即: 这种低频模与安全因子  $q$  的演化有关, 局域在安全因子最小值  $q_{\min}$  的径向位置附近, 并在  $q_{\min}$  接近有理数时出现. 针对这种现象, 陈骢<sup>[41]</sup> 首次从理论上预测: 这一低频模并不是通常所指的 BAAE, 而是一种与高能离子激发无关的反应型不稳定性. 关于反应型不稳定性的描述, 将在下文进行直观且详细的阐述 (图 6). 现在起将低频模称为低频阿尔芬模 (LFAM), 它属于以阿尔芬极化为主的低频 SAW.

请注意, 这个术语与 DIII-D 实验中观察到的低频模 (low-frequency mode) 相同<sup>[33]</sup>. 此外, 在 DIII-D 实验研究中还发现, 当注入平行方向的中性束注入 (neutral beam injection, NBI) 时, 除了以上的 LFAM 不稳定性外, 还观测到了由高能离子共振激发的、且不稳定性对 NBI 的功率和注入方向非常敏感的 BAE. 这里为了方便读者阅读, 选取文献<sup>[34]</sup> 中典型的实验结论, 如图 2 所示, 其中图 2(a) 为布局在 DIII-D 大半径  $R=192-201$  cm 之间的 ECE 通道的互功率谱图; 图 2(b) 为 EFIT

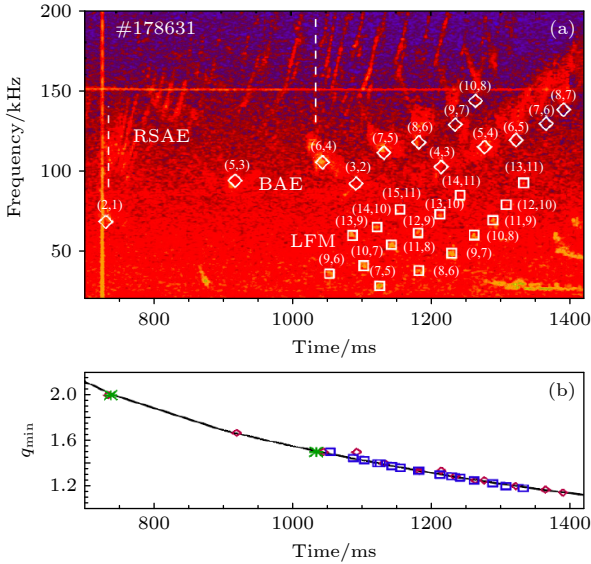


图2 Heidbrink等<sup>[34]</sup>对DIII-D参考炮数#178631分析的实验结果 (a) 布局在大半径  $R = 192\text{--}201\text{ cm}$  之间的ECE通道的互功率谱图; (b) EFIT重建得到的  $q_{\min}$  与时间的关系. 其中频谱图上所示的不同符号分别对应不同  $m/n$  值的不同模式: RSAE (\*), BAE( $\diamond$ ) 及 LFAM( $\square$ )

Fig. 2. The DIII-D experimental results from Ref. [34] by Heidbrink et al.: (a) Cross-power spectrogram in the reference shot for ECE channels between 192–201 cm; (b) measured  $q_{\min}$  from EFIT reconstructions vs. time. The RSAE (\*), BAE( $\diamond$ ), and LFAM( $\square$ ) symbols represent the values of  $m/n$  shown on the spectrogram.

重建得到的  $q_{\min}$  与时间的关系. 其中频谱图中所示的不同符号分别对应不同  $m/n$  值的不同模式: RSAE(\*), BAE( $\diamond$ ) 及 LFAM( $\square$ ). 这些不稳定的高频BAE和LFAM均出现在  $q_{\min}$  附近, 并且它们的频谱特征随着环向模数的增加呈现出上升的趋势, 而且相邻环向模数的模频率近似被环向旋转频率 ( $f_{\text{rot}}$ ) 分隔. 这些高频的BAE和低频的LFAM之间的细微差别在于: 对于LFAM而言, 当  $q_{\min}$  为有理值时, LFAM才被观测到; 此外, ECE测得的模结构也局域在  $q_{\min}$  的径向位置. BAE虽也出现在当  $q_{\min}$  接近有理数时, 但其不稳定性发生的时间不如LFAM精确. 此外, 与LFAM相比, BAE的本征函数在空间上偏离  $q_{\min}$  的径向位置. 针对以上实验观察, 基于第一性原理的数值模拟已对BAE和LFAM的线性性质进行了大量的模拟研究<sup>[40,42]</sup>, 但上述实验现象仍未得到完全解释. 引用与Heidbrink教授讨论问题时的原话“*That question has troubled me since 2019 when we did the experiment: why do these modes that seem so similar (in some ways) differ so much in*

*others?*”. 因此, 本文将基于GFLDR的理论框架<sup>[5,20,21,25,43–46]</sup>, 从理论上提供对DIII-D实验观测和数值模拟中低频SAW不稳定的本质和主要特征(如LFAM, BAE及BAAE稳定性和极化)的分析; 同时也再次验证GFLDR理论框架的预测能力及其对实验和数值模拟结果的解释能力<sup>[20,21]</sup>.

本文从不考虑<sup>[47]</sup>以及考虑EP<sup>[48]</sup>的效应来研究低频SAW的线性特征. 在这种情况下, 不同种类粒子的动理学效应将通过其压强特征尺度线性地进入低频SAW的色散关系并影响其行为. 对于DIII-D第178631次放电, 图3所示为热粒子和高能粒子的压强特征尺度 ( $L_{P_{\text{th}}}$  和  $L_{P_{\text{e}}}$ ), 以及在弱和/或零磁剪切情况下 ( $|s| = |(r/q)(dq/dr)| \lesssim 0.05$ ) 模的宽度 ( $\Delta_m$ ) 的径向依赖关系. 这里,  $r$  为沿着小半径方向的径向位置. 具体而言, EP的压强分布由“弛豫的 (relaxed)”EP剖面 and “经典的 (classical)”EP剖面这两种极限情况给出. “弛豫的”EP剖面由EFIT<sup>[49]</sup>重建提供, 其中快离子的压强是通过计算平衡压强与热粒子压强之差得到的. 另一种由TRANSP/NUBEAM<sup>[50]</sup>给出, 是指在考虑由不稳定性引起的快离子运输的情况下得到的“经典的”EP分布. 对于这两种极限情况, EP的压强特征尺度分别由  $L_{P_{\text{e,rel}}}$  和  $L_{P_{\text{e,cl}}}$  表示. 当模失稳时, 真实的EP分布可能介于这两个极限之间, 且最接近基于EFIT获得的结果. 在弱和/或零磁剪切区域, 对于给定的环向和极向模数 ( $n, m$ ), 其归一化平行波矢  $\Omega_{A,m} = k_{//n0} q_{\min} R = nq_{\min} - m$ , 模的径向度可以用  $\Delta_m \simeq 1/|nq''|^{1/2}$ <sup>[45,46]</sup> 来估算. 这里,  $k_{//n0}$  表示在  $r_0$  处的平行波矢, 其中  $q$  剖面具有最小值并由  $q_{\min}$  给出,  $q''$  表示  $q$  在径向上的二次导数,  $R$  是托卡马克的大半径. 由图3可知, 在弱和/或零磁剪切的区域,  $L_{P_{\text{th}}} \gg \Delta_m$ . 这一关系通常对应于将全局问题简化为求解模的局域色散关系的前提条件. 因此, 对于与高能粒子激发无关的LFAM的分析, 可以通过求解低频SAW的局域色散关系来处理<sup>[47]</sup>. 然而, 对于高能离子驱动的BAE, 需要讨论两种不同的情况<sup>[48]</sup>: 一种是在适中的EP压强梯度下, 即仍有  $L_{P_{\text{e,rel}}} > \Delta_m$  的关系, 这种情况可近似通过求解局域的GFLDR<sup>[5,20,21,25,43–46]</sup>来研究EP激发的BAE的性质; 另一种是当系统中存在强的EP压强梯度时, 则有  $L_{P_{\text{e,rel}}} \simeq \Delta_m$ , 对于这种情况, 需要求解低频SAW的全局色散关系. 关于这部分的讨论将在理论模型中具体展开.

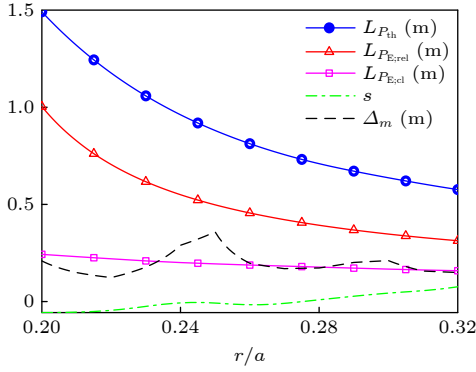


图 3 热粒子和高能粒子压强特征尺度 ( $L_{P_{th}}$  和  $L_{P_E}$ ), 以及在弱和/或零磁剪切 ( $s = r'q'/q$ ) 情况下模宽度 ( $\Delta_m$ ) 的径向依赖关系

Fig. 3. Radial dependences of the typical scale lengths of thermal and energetic particle pressure ( $L_{P_{th}}$  and  $L_{P_E}$ ), magnetic shear ( $s$ ) as well as the estimated radial mode width ( $\Delta_m$ ).

本文的结构如下: 首先, 第 2 节讨论弱磁剪切和/或零磁剪切附近低频 SAW 的局域和全局色散关系, 这些色散关系的选取取决于  $L_P$  和  $\Delta_m$  的相对大小; 紧接着, 第 3 节详细讨论不包含及包含 EP 效应的低频 SAW 的数值结果和相应的理论分析, 并进一步与实验结果进行比较; 最后第 4 节对本文进行总结和讨论.

## 2 理论模型

本节将讨论具有弱反磁剪切 DIII-D 放电中低频 SAW 的色散关系. 正如第 1 节所讨论的, 我们将依据  $L_{P_{th}}$  及  $L_{P_E}$  与  $\Delta_m$  的相对大小, 讨论以下两种情况来研究低频 SAW 的稳定性. 情况 I: 不考虑 EP 的作用 ( $L_{P_{th}} \gg \Delta_m$ ) 以及考虑适中 EP 梯度 ( $L_{P_{E,rel}} > \Delta_m$ ) 情形下, 描述低频 SAW 的局域 GFLDR 模型; 情况 II: 考虑强 EP 压强梯度 ( $L_{P_{E,cl}} \approx \Delta_m$ ) 情形下, 适用于描述低频 SAW 的全局 GFLDR 模型.

### 2.1 局域模型

对于情况 I: 不考虑 EP 的作用 ( $L_{P_{th}} \gg \Delta_m$ ) 以及考虑适中 EP 梯度 ( $L_{P_{E,rel}} > \Delta_m$ ) 情形下, 背景热离子的压强特征尺度及 EP 的特征压强尺度均可以与模结构的径向宽度很好地分开, 因此描述 SAW 的涡量方程 [1,5,20,21,43,44] 可以简化为通常局域极限下的 SAW 色散关系. 关于这一点, 已有大量文献进行了详细的推导和讨论 [1,20,21,25,43,44], 此

处将不再赘述. 我们只需注意, 针对 DIII-D 的实验, 在应用局域 GFLDR 时需要考虑两个关键点. 首先, 对于描述  $|\omega| \ll \omega_{bi}$  的低频 SAW, 需要考虑热粒子的可压缩效应, 即考虑包括波-粒子 (包含通行和捕获的热粒子) 的相互作用 [8]; 其次, 还需处理 DIII-D 芯部具有反磁剪切的位形特征. 因此, 对于局域在  $r_0$  处, 磁剪切  $s = 0$  但  $S \equiv (r/q)[q'']^{1/2}$  具有有限值的低频 SAW 的局域 GFLDR 可表示为 [20,21,25,46,51]

$$\begin{aligned} & iS(A_n^2 - k_{//n0}^2 q_{min}^2 R^2)^{1/2} (1/n)^{1/2} \\ & [k_{//n0} q_{min} R - i(A_n^2 - k_{//n0}^2 q_{min}^2 R^2)^{1/2}]^{1/2} \\ & = \delta \hat{W}_{nf} + \delta \hat{W}_{nk}(\omega), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $A_n(\omega)$  为广义的惯性项, 它既包括逆磁效应, 也包括通行热粒子和捕获热粒子的动理学效应. 关于  $A_n(\omega)$  的具体推导请参考文献 [8]. 这里将主要结果总结于附录 A 中以便读者阅读. 此外, 方程 (1) 的右边包含了对理想区域势能的“流体” ( $\delta \hat{W}_{nf}$ ) 和“动能” ( $\delta \hat{W}_{nk}$ ) 贡献. 对于低频模 ( $|A_n^2| \ll 1$ ),  $\delta \hat{W}_{nf}$  与频率无关, 考虑圆截面近似并采用 ( $s, \alpha$ ) 模型 [52], 则  $\delta \hat{W}_{nf}$  的表达方程可表示为

$$\begin{aligned} \delta \hat{W}_{nf} \approx & \frac{\pi}{4} \left( \frac{S^2 k_{//0} q_{min} R}{n} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \alpha^2 S \left| \frac{k_{//0} q_{min} R}{n} \right|^{1/2} + \frac{9}{32} \alpha^4 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\alpha = \alpha_c + \alpha_E$ ,  $\alpha_c = -R q_{min}^2 d\beta_c/dr$ ,  $\alpha_E = -\frac{1}{2} \times R q_{min}^2 d(\beta_{E//} + \beta_{E\perp})/dr$ , 这里  $\beta_c$  为背景热粒子的比压,  $\beta_{E//}$  和  $\beta_{E\perp}$  分别为平行于磁场方向和垂直于磁场方向的高能量离子的比压. 方程 (2) 中包括高能粒子的绝热和对流响应的贡献 [53].  $\delta \hat{W}_{nk}$  反映了共振和非共振的波-粒相互作用, 因而是模频率的函数. 简单起见 (但仍与 DIII-D 情况相关), 我们假设高能离子的平衡分布函数  $F_{0E}$  遵从具有单一俯仰角 ( $\lambda = \mu/\varepsilon$ ) 的慢化分布, 即  $F_{0E} = \frac{B_0 \beta_E(r)}{2^5 \sqrt{2\pi^2 m_E \varepsilon_b}} \sqrt{(1 - \lambda_0 B_0)} \varepsilon^{-3/2} \delta(\lambda - \lambda_0)$ . 其中,  $m_E$  是高能离子的质量,  $\lambda_0$  是初始俯仰角,  $\beta_E(r) \equiv 8\pi P_E(r)/B_0^2$  是热压 ( $P_E$ ) 和磁压的比值,  $B_0$  是磁轴上平衡磁场,  $\delta(x)$  是狄拉克函数,  $\mu$  是磁矩,  $\varepsilon = v^2/2 \leq \varepsilon_b$ ,  $\varepsilon_b$  是单位质量 EP 初始能量. 那么, 高能通行离子的非绝热贡献的表达方程可写为 [43,44]

$$\delta\hat{W}_{nku} \approx \frac{\pi\alpha_E}{2^{5/2}}(1 - \lambda_0 B_0/2)\bar{\omega} \left[ 2 - \bar{\omega} \ln \left( \frac{\bar{\omega} + 1}{\bar{\omega} - 1} \right) \right], \quad (3)$$

其中  $\bar{\omega} = \omega/\omega_{tEm}$ ,  $\omega_{tEm} \equiv \sqrt{2\varepsilon_b}/qR$  是粒子能量最大时 EP 的渡越频率.

这里需要注意的是, 方程 (1) 的中括号的第一项代表在  $r = r_0$  处有限的  $k_{//n0}q_{\min}R$ , 它来自有限的场线弯曲效应, 并在方程中起着重要的稳定作用 [20,21,25]. 此外, 通过  $S_f \equiv (i\delta E_{//}/k_{//})_{a.c.}/\delta\phi_{d.c.}$  来定义模的极化. 这里的 a.c. 和 d.c. 分别对应于平行电场、波矢和标势扰动的正弦分量和几乎恒定的分量.  $S_f$  的详细表达方程也在附录 A 中给出. 根据文献 [8, 28, 51] 中的讨论,  $|S_f|$  的值远远小于 1, 表示模具有 SAW 的极化特征; 而  $|S_f|$  的值与 1 可比拟或大于 1 则代表模具有离子声波的极化特征.

当粒子压强特征尺度与模的径向宽度可以很好区分开时, 我们得到了描述低频 SAW 的局域 GFLDR, 即方程 (1). 进一步, 可以借助数值方法研究方程 (1) 中涉及的各项, 来描述实验观测和模拟中低频 SAW 的基本物理. 然而, 在强 EP 压强梯度存在的情况下, 如上述讨论的情况 II, 此时描述低频 SAW 的局域 GFLDR 将不再适用, 需要借助全局的 GFLDR 来处理.

## 2.2 全局模型

针对情况 II, 即  $L_{P_{E,cl}} \approx \Delta_m$ , 此时两个特征尺度  $L_{P_{E,cl}}$  和  $\Delta_m$  不再能很好地区分, 即 EP 的特征平衡参数相对于模的宽度不再是缓变量, 因此, 模在径向局域的位置将受高能离子分布的影响, 因而需要全局的色散关系来描述低频 SAW 的性质. 要解决这个问题, 需要采用傅里叶逆变换将涡量方程变回至实空间 [46], 相应地, 描述由单个环向和极向模数 ( $m, n$ ) 主导的低频 SAW 的全局色散关系为

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r\xi) \cdot \left[ A^2 - \Omega_{A,m}^2 \left( 1 + \frac{x^2}{\Omega_{A,m}} + \frac{x^4}{4\Omega_{A,m}^2} \right) \right] \\ & \times (\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r\xi)\delta\phi_m - (F + K)\delta\phi_m = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{k}_\perp/\mathbf{k}_\theta = -(\mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r\xi)$ , 这里的  $\mathbf{e}_r$  和  $\mathbf{e}_\theta$  分别为径向和极向的单位矢量,  $x^2 = nq_{\min}''(r - r_0)^2$ ,  $\xi \equiv (i/n^{1/2})S(\partial/\partial x)$ ,  $\delta\phi_m$  是标量场扰动的  $m$  次极向谐波. 值得注意的是, 不同极向谐波之间的环向耦合对于局域在反磁剪切区域的模方程通常并不重

要. 此外, 方程 (4) 中的  $F$  和  $K$  项分别表示类流体粒子和高能离子的贡献, 其表达方程为

$$\begin{aligned} F & \approx D_S^2 - 4\alpha^2 D_S + 2\alpha D_S^2 - (\alpha + 1)\alpha + 2\alpha^3, \\ K & \approx \frac{2\pi q_E^2 q^2 R^2 \omega}{m_E c^2} \left\langle \frac{\Omega_{dE}^2 Q F_{0E}}{\omega_{tE}^2 - \omega^2} \right\rangle_v = \frac{2}{\pi} \delta\hat{W}_{nku}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $D_S = S\sqrt{\Omega_{A,m}/n}$ ,  $q_E$  为高能离子的电荷.  $\Omega_{dE} = (v_{E\perp}^2/2 + v_{E\parallel}^2)/\omega_{cE}R$ ,  $\omega_{tE} = v_{E\parallel}/qR$ ,  $Q F_{0E} = (\omega\partial_\epsilon + \hat{\omega}_{*E})F_{0E}$ ,  $\hat{\omega}_{*E}F_{0E} = \omega_{cE}^{-1}(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \cdot \nabla F_{0E}$ ,  $\omega_{cE} = q_E B/m_E c$ ,  $\langle (\cdot) \rangle_v = \int d^3v (\cdot)$ , 代表对速度空间  $v$  的积分, 下标  $\parallel$  和  $\perp$  分别表示相对于平衡磁场  $\mathbf{b}$  的平行和垂直分量.

求解常微分方程 (4) 一般需要借助数值方法. 然而, 对于 DIII-D 的情形, 如图 4 中的黑色曲线所示的“经典”分布下高能离子归一化压强梯度的径向关系, 它可以用红色曲线所示的解析方程  $\alpha_E(\rho) = c_1 [1 - (\rho - c_2)^2/c_3^2]$  来很好地拟合. 这里  $c_1 = 0.7099$ ,  $c_2 = 0.3018$ ,  $c_3 = 0.2944$ . 这一方法使得我们可以解析得到描述低频 SAW 的全局色散关系. 需要注意的是, 高能离子的最大驱动位于  $\rho = c_2 = 0.3018$  附近, 它偏离了  $q_{\min}$  的径向位置. 此外, 方程 (3) 中  $\alpha_E$  为  $r$  的函数:

$$\alpha_E(r) = \delta_a \alpha_{E0} \left[ 1 - \frac{(r - r_0 + \delta_b)^2}{\delta_c^2 L_{P_{E,cl}}^2} \right], \quad (6)$$

其中  $\delta_a = c_1/\alpha_{E0}$ ,  $\delta_b = r_0 - c_2 a$ ,  $a$  为等离子小半径,  $\delta_c = c_3 a/L_{P_{E,cl}}$ ,  $\alpha_{E0}$  和  $L_{P_{E,cl}}$  表示在  $r = r_0$  的值.

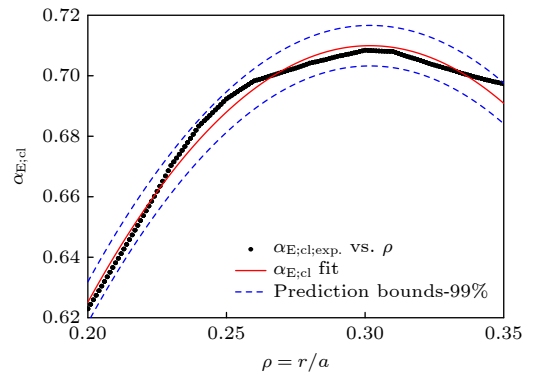


图 4 “经典”EP 分布下 EP 归一化压强梯度的径向关系. 其中红线是解析拟合曲线,  $q_{\min}$  的归一化径向位置为  $\rho_0 \equiv r_0/a = 0.28$

Fig. 4. Radial dependence of the normalized pressure gradient of EPs with the classical profile. Here, the normalized radial position of  $q_{\min}$  is  $\rho_0 \equiv r_0/a = 0.28$ .

进一步, 引入变量代换  $x = r - r_0 = \sigma z - \Delta_b$ , 则方程 (4) 可进一步简化为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta\phi_m - \frac{n\sigma^2}{S^2} \left( 1 - \frac{F + \frac{2\delta_a}{\pi} \delta\hat{W}_{nku0}}{\varepsilon_{A0}} \right) \delta\phi_m - \frac{1}{4} z^2 \delta\phi_m = 0,$$

$$\frac{2n\sigma^4 \delta_a \delta\hat{W}_{nku0}}{\varepsilon_{A0} \pi S^2 \delta_c^2 L_{P_{E:cl}}^2} = \frac{1}{4}, \quad (7)$$

其中,

$$\varepsilon_{A0} = A^2 - \Omega_{A,m}^2,$$

$$\delta\hat{W}_{nku0} = \frac{\pi\alpha_{E0}}{4\sqrt{2}} \left[ 2 - \bar{\omega} \ln \left( \frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}-1} \right) \right].$$

则由方程 (7) 可导出描述低频 SAW 的全局色散关系:

$$\frac{-n^{1/2} \pi^{1/2} \delta_c L_{P_{E:cl}} \varepsilon_{A0}^{1/2}}{2\sqrt{2} S \delta_a^{1/2} \delta\hat{W}_{nku0}^{1/2}} \left( 1 - \frac{F + \frac{2\delta_a}{\pi} \delta\hat{W}_{nku0}}{\varepsilon_{A0}} \right) = 2L + 1, \quad L = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

式中的正整数  $L$  表示径向本征模数. 相应的本征函数为

$$\delta\phi_m(r) = H_L(z) e^{-z^2} \propto \exp \left[ -\frac{(r - r_0 + \delta_b)^2}{4\sigma^2} \right], \quad (9)$$

其中,  $H_L(z)$  表示  $L$  次厄密多项式. 对于离散模, 其因果限制条件要求  $\text{Re}(\sigma^2) > 0$ ; 这里的  $\sigma^2$  由方程 (7) 中的第二个方程求解, 且满足色散关系——方程 (8). 此外,  $\delta\phi_m(r)$  的典型径向宽度  $w$  则由  $w^2 = 4\sigma^2$  给出.

方程 (1) 和方程 (8) 组成了本节理论模型的主要结论, 即由高能离子激发的低频 SAW 的局域和全局的 GFLDR. 根据各项的具体表达式, 就可以计算方程中的各项, 分析它们对色散关系的影响, 进而研究实验观察到的低频 SAW 的线性性质.

### 3 数值结果与分析

本节将分别给出低频 SAW 局域的和全局的 GFLDR 的数值结果, 其色散关系分别由方程 (1) 和方程 (8) 给出.

这里的数值研究采用了如图 5 所示的 DIII-D 第 #178631 次放电  $t = 1200$  ms 的平衡分布 [33], 其中  $q$  剖面具有反磁剪切的位形, 并在  $r_0/a = 0.28$  时具有最小值  $q_{\min} = 1.37$ . 此外, 在  $1050$  ms  $< t < 1350$  ms 的时间窗口内,  $q_{\min}$  从 1.49 降至 1.18, 具

体可参考文献 [33] 中的图 6(b). 此处应注意, 快粒子的温度是通过慢化分布快粒子的平均动能定义的等效温度.

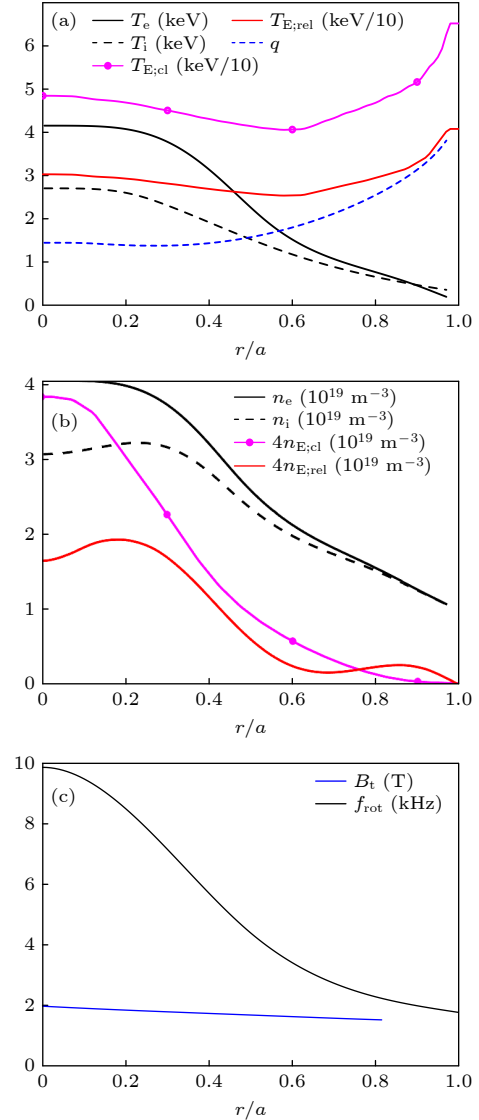


图 5 DIII-D 第 #178631 次放电的 (a) 温度和  $q$  的径向分布, (b) 密度的径向分布, 以及 (c) 环向磁场  $B_t$  和环向旋转频率  $f_{\text{rot}}$  的径向分布

Fig. 5. Radial profiles of (a) temperature and  $q$ , (b) density and (c)  $B_t$  as well as toroidal rotation frequency  $f_{\text{rot}}$  of DIII-D shot #178631 used for numerical studies.

#### 3.1 局域数值结果和分析

首先研究局域低频 SAW 的线性性质, 即情况 I. 在数值研究中所采用的局域平衡参数均在  $q_{\min}$  的径向位置  $r_0/a = 0.28$  处取值:  $S = 0.5895$ ,  $\tau = T_e/T_i = 3.86$  keV/2.37 keV = 1.62,  $n_e = 3.80 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $n_i = 3.19 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ,  $\varepsilon_r = r_0/R = 0.10$ ,  $\beta_i \approx 0.01$ ,  $\varepsilon_{ni} = L_{ni}/R = 0.414$ ,  $\eta_i = L_{ni}/L_{Ti} = 0.8324$ ,

$\omega_{*ni}/\omega_{ti} = 0.1919$ ,  $(m, n) = (8, 6)$ ,  $k_{\theta}\rho_{Li} = 0.2555$ ,  $k_{\theta}\rho_{Le} = 0.0054$ . 此外, 其他固定的平衡量为:  $a = 0.64$  m, 等离子体磁轴处的大半径  $R_0 = 1.74$  m,  $B_0 = 1.8$  T. 这里的  $k_{\theta}$  为极向波数,  $\rho_{Li}$  和  $\rho_{Le}$  分别是热离子和热电子的拉莫尔半径.

首先, 研究低频 SAW 在不考虑 EP 效应时的 (a) 模频率、(b) 增长率和 (c) 模极化对归一化热离子逆磁频率  $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$  的依赖关系, 如图 6 所示. 根据模频率和  $|S_f|$  的值, 可将图中的 3 个分支分类为: 1) KBM (用圆圈标记的红色曲线), 且  $\omega \propto \omega_{*pi}$ ; 2) BAE 及其谐波分支 BAE1 和 BAE2 (蓝色

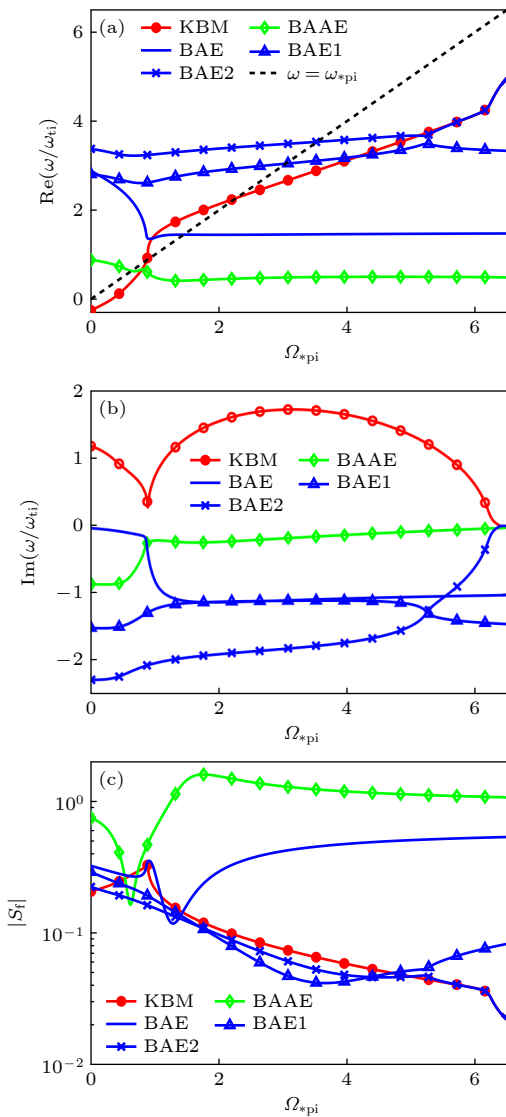


图 6 在不包含 EP 效应的情况下, 低频 SAW 的 (a) 频率、(b) 增长率和 (c) 极化性质对  $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$  的依赖关系  
Fig. 6. Dependence of (a) mode frequencies, (b) growth rates and (c) polarization of modes on  $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$  without EP effect.

曲线), 频率接近 MHD 极限值  $\omega/\omega_{ti} = q_{\min}\sqrt{7/4+\tau} \approx 2.51$ ; 3) BAAE (用钻石标记的绿色曲线), 频率约为 BAE 的一半, 并经历强的朗道阻尼. 此处需要注意的是, BAE1 和 BAE2 均是 BAE 谐波的分支, 它们来自于惯性项  $A_n(\omega)$  (方程 (A1)) 中的超越函数, 由于不同的平行模结构, 它们通常具有更强的朗道阻尼, 因此需要更多的自由能来激发. 由图 6 可知, 即使在不考虑 EP 效应的情况下, KBM 在低频区和高频区都不稳定 (见图 6(b) 中红色曲线). 随着  $\omega \propto \omega_{*pi}$  的增加, KBM 的频率先增大, 然后约在  $\Omega_{*pi} = 0.75$  附近与强阻尼的 BAAE 耦合, 两者发生耦合后 BAAE 的阻尼明显减弱. 随着  $\Omega_{*pi}$  的进一步增大, KBM 的频率也随之增加, 不稳定的 KBM 与强阻尼的 BAE2 (如图 6(a) 和图 6(b) 中带“x”标记的蓝色曲线所示) 耦合, 同时降低了 BAE2 的阻尼率, 相应的频率和增长/阻尼率呈现出典型的复共轭特征, 这是线性反应型不稳定性的一个基本特征 [54,55]. 请注意, 在这种情况下, KBM 的频率始终随  $\Omega_{*pi}$  而变化. 此外, 图 6(c) 所示的极化曲线表明, BAAE 具有 SAW 和声波混合的极化特征; 而 BAE 和 KBM 本质上都是 SAW 的极化. 这里需要指出, 所谓的反应型不稳定性涉及两种振荡模方程的耦合: 一种是正能波, 另一种是负能波. 正、负能波的定义为: 如果用  $D(\omega, k) = D_h(\omega, k) + iD_a(\omega, k)$  表示模方程的色散关系, 其中  $D_h$  和  $D_a$  分别表示色散关系中的厄米和反厄密分量, 那么正能波满足  $\partial(\omega_r D_h)/\partial\omega_r > 0$ ; 负能波满足  $\partial(\omega_r D_h)/\partial\omega_r < 0$ . 其中  $\omega_r$  代表模的实频. 在不稳定的临界点 (如方程 (13) 所讨论的), 这两支正负能波之间发生能量交换而简并, 没有任何净能量转移到等离子体介质中.

进一步研究了 EP 对低频 SAW 稳定性的影响. 为了便于对比, 画出了包含 EP 效应和不包含 EP 效应的数值结果, 如图 7 所示, 其中虚线代表无 EP 效应, 而实线代表包含 EP 效应. EP 对低频 SAW 稳定性的影响由图 7(b) 中紫色曲线所示的区域标出, 可以明显看出: KBM 在没有 EP 的情况下是唯一不稳定的模, 而 KBM 和 BAE 在有 EP 存在时, 在低频区域同时不稳定. 根据实验参数计算出的离子逆磁频率为  $\Omega_{*pi;exp} = 0.3517$ , 如图 7(b) 的垂直虚线所示. 在这种情况下, 方程 (1) 在离子逆磁频率方向上根分布如图 8 所示, 其中横轴和纵轴分别表示根的实频和增长/阻尼率.

图 8 再次表明: 在 EP 存在的情况下 (如图 8(b) 所示), KBM 和 BAE 都是不稳定的. 经计算, 在等离子体框架下 KBM 和 BAE 的频率分别为 5.6 kHz 和 63.7 kHz; 该理论预测结果与实验观测结果一致. 此外, 图 7(c) 所示的极化曲线表明: 对于 KBM 和 BAE, 其  $|S_f| \lesssim 0.1$ , 这表明 KBM 和 BAE 本质上是 SAW 极化的模.

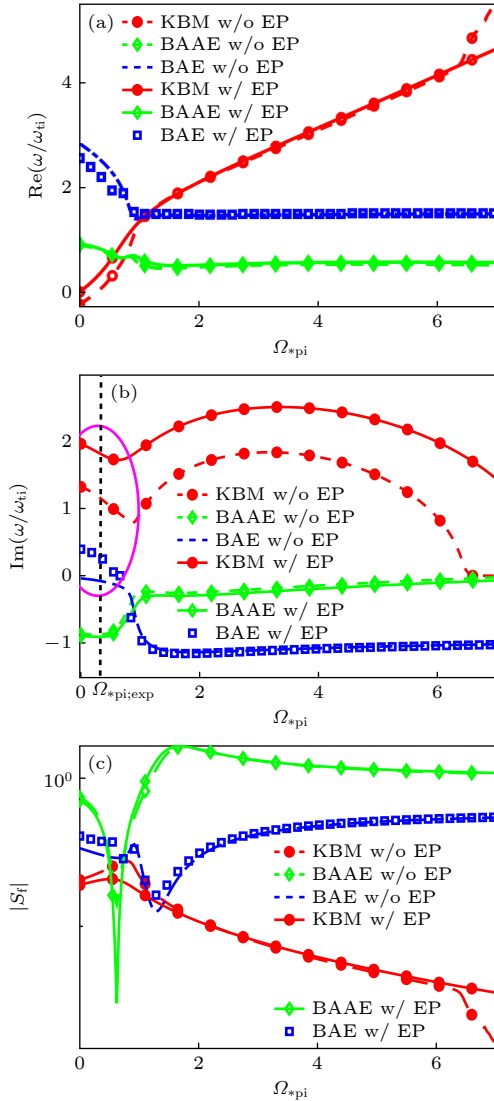


图 7 在不包含 (w/o) 和包含 (w/)EP 效应情况下, 低频 SAW 的 (a) 频率、(b) 增长率和 (c) 极化性质对  $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$  的依赖关系. 图中所示的垂直虚线表示  $\Omega_{*pi;exp}$  的实验值, 约为 0.35

Fig. 7. Dependence of the (a) real frequencies, (b) growth rates and (c) polarization of the low-frequency SAWs on  $\Omega_{*pi} \equiv \omega_{*pi}/\omega_{ti}$  for the cases without (w/o) and with (w/) EP effects. Here, a dashed vertical line represents the experimental value of  $\Omega_{*pi;exp}$  of about 0.35.

值得注意的是, 与对 EP 效应不敏感的频率相比, 在有和没有 EP 效应的情况下, KBM 的增长

率发生了显著的变化. 这是因为在本文的理论模型中, EP 的绝热和对流贡献通过  $\alpha$  修改了  $\delta\hat{W}_f$  的值, 如方程 (2) 所示. 在这一点上, 为了获得更加令人信服的理论预测和实验观测的对比, 有必要提供更精确的理论模型和更全面的实验分析. 这里还应注意到, 即使在足够强的  $\Omega_{*pi}$  效应下, BAAE 由于逆磁和捕获粒子效应而与 KBM 耦合变得弱阻尼, 但 BAAE 的稳定性和性质仍不受高能离子的影响, 如图 7 中带有符号 (没有 EP 效应) 的绿色虚线和带有符号 (具有 EP 效应) 的实线所示, 它们在 3 个图中显然是重叠的. 此外, 从图 8 中根的分布也可以清晰地看出 BAAE 的稳定性不受 EP 的影响. 本文的数值计算结果与文献报道的数值模拟结果 [37,39,40] 以及理论预测 (“EPs preferentially excite the BAE over the BAAE branch due to the stronger wave-EP interaction”)[51] 相符合.

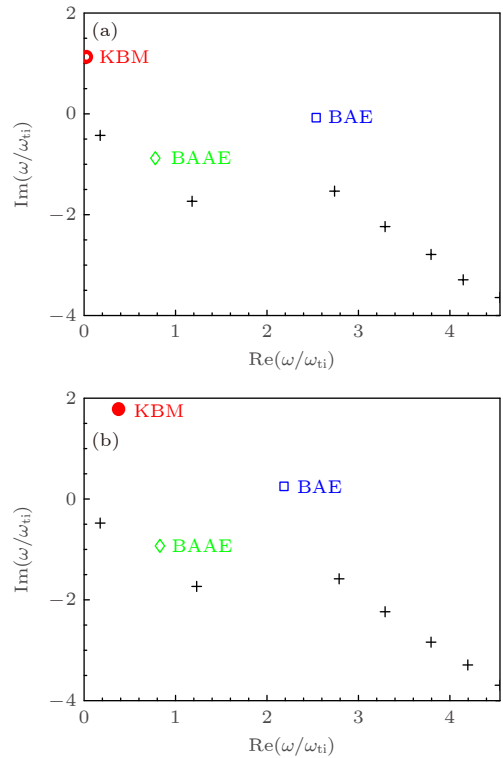


图 8 (a) 无 EP 效应和 (b) 有 EP 效应的情况下, 色散关系方程 (1) 在复平面上的本征值分布

Fig. 8. Eigenvalues of the dispersion relation Eq. (1) in the complex- $\omega$  plane for the cases (a) without and (b) with EPs

接下来, 将  $q_{min}$  作为扫描参数来研究在 DIII-D 中观察到如图 2 所示的高频 BAE 和 LFAM 上升频谱的潜在不稳定性机制. 图 9 给出了 KBM (红色曲线) 和 BAE (蓝色、绿色、紫色和橙色曲线)

的模频率 (带标记的实线曲线) 和增长率 (带标记的虚线曲线) 在不同极向和环向模数 ( $m, n$ ) 下对  $q_{\min}$  的依赖关系.

图 9 表明, 高频的 BAE 和低频的 KBM 在上升方向上的模频率间隔均约为 7.5 kHz, 此频率正好对应于  $\rho = 0.28$  处的等离子体旋转频率  $f_{\text{rot}}$  (见图 5(c) 中黑色实线). 对于 KBM, 其不稳定性的最大值正好出现在当  $q_{\min}$  为有理数时, 如图 9 中红色虚线. 对于 BAE, 其不稳定性出现的时间不像 KBM 那样精确, 表现为 BAE 增长率的最大值偏离  $q_{\min}$  有理面的位置. 此外, 相对于高  $n$  的 BAE (如橙色曲线), 低  $n$  的 BAE (如蓝色曲线) 偏离  $q_{\min}$  有理值的距离更大. 图中同时标记出了理论预测的频率 (彩色曲线) 与实验测量值 (带“★”的黑线) 的比较, 清晰可见这些数值结果与实验观测结果能够较好地符合. 我们将在结论部分中对理论预测和实验结果的比较进行详细的总结与讨论.

为了从理论上深入理解图 9 中不稳定性的激

发机制, 我们进一步分析了一般鱼骨模色散关系 (GFLDR) 在高频 ( $|\omega| \gg \omega_{\text{ti}}$ ) 和低频  $|\omega| \ll \omega_{\text{bi}}$  两种极限下的行为.

当  $|\omega| \gg |\omega_{\text{ti}}|$  时, 对应的 BAE 的惯性项可简化为  $\Lambda^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_{\text{BAE}}^2}{\omega_{\text{A}}^2}$  [5,14,25], 式中的  $\omega_{\text{BAE}}^2 = \left(\frac{7}{4} + \tau\right) \frac{v_i^2}{R^2}$  是 BAE 频率在流体极限下的表达方程, 其中  $v_i$  是背景热离子的热速率. 做如下展开:  $\omega = \omega_r + i\gamma$  (其中  $\gamma$  为模的增长率),  $\delta\hat{W}_{ku} = \text{Re}\delta\hat{W}_{ku} + i\text{Im}\delta\hat{W}_{ku}$ , 并假设  $|\gamma/\omega_r| \ll 1$ , 则可得到  $\left|\frac{\text{Im}\delta\hat{W}_{ku}}{\text{Re}\delta\hat{W}_{ku}}\right| \ll 1$ . 对于带隙模的存在要求  $\delta\hat{W}_{nf} + \text{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)) < 0$ , 那么其频率和增长率分别满足:

$$\omega_r^2 = \omega_{\text{BAE}}^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_{\text{A}}^2}{\omega_{\text{BAE}}^2} \left[ k_{\parallel}^2/n_0 q_{\min}^2 R^2 - \frac{n}{|k_{\parallel}/n_0 q_{\min} R|} \right] \times \frac{(\delta\hat{W}_{nf} + \text{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)))^2}{S^2} \right\}, \quad (10)$$

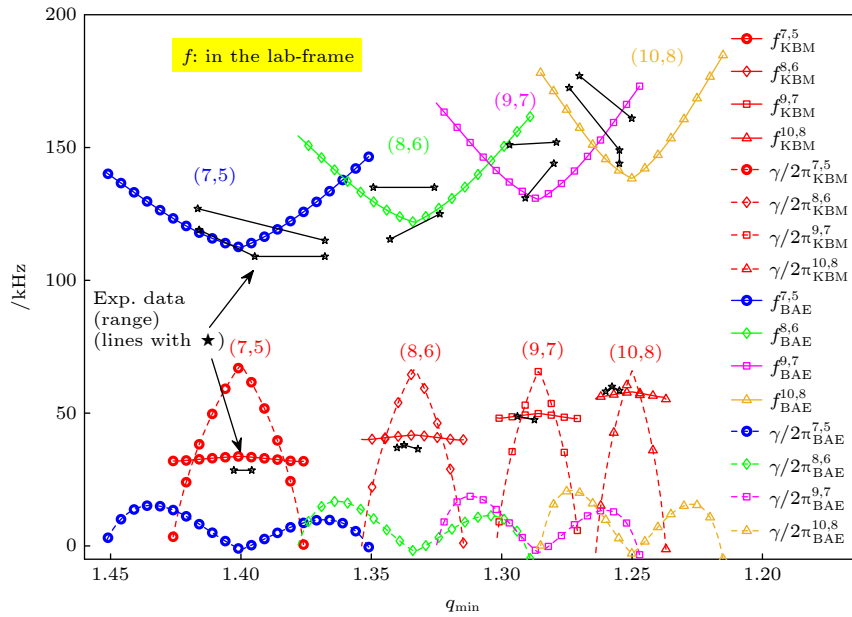


图 9 KBM (红色曲线) 和 BAE (蓝色、绿色、紫色和橙色曲线) 的模频率 (带标记的实线) 和增长率 (带标记的虚线) 在不同 ( $m, n$ ) 下对  $q_{\min}$  的依赖关系. 图中还给出了实验观测的频率. 对于 BAE, 由于模跨越了一个频率范围, 因此这些线表示不稳定区域的上下限; 对于 LFAM, 实验频率变化小于 0.5 kHz. 横坐标为  $q_{\min}$  的变化, 是依据参考文献 [34] 的图 8 所示的实验测量的  $q_{\min}(t)$ , 将时间  $t$  转换为  $q_{\min}$  的变化, 与此相关的不确定度为  $\Delta q_{\min} \approx 0.01$ . 纵坐标为理论实验室框架下的频率, 已将多普勒频移合并到计算的等离子体框架下的频率  $n f_{\text{rot}}$ , 相关的不确定度为  $\sim 0.5 \times n$  kHz

Fig. 9. Dependence of mode frequencies (solid curves with markers) and growth rates (dashed curves with markers) on  $q_{\min}$  of the KBMs (red curves) and the BAEs (blue, green, purple and orange curves) for different ( $m, n$ ). The experimentally observed frequencies are also shown. For the BAE, since the modes span a range of frequencies, the lines indicate the upper and lower limits of the unstable bands; for the LFAM, the experimental frequency variation is  $< 0.5$  kHz. In the abscissa, the experimentally measured  $q_{\min}(t)$  fit shown in Fig. 8 of Ref. [34] is used to convert time to  $q_{\min}$ , with an associated uncertainty of  $\Delta q_{\min} \approx 0.01$ . In the ordinate, the theoretical lab-frame frequency incorporates a Doppler shift to the calculated plasma-frame frequency of  $n f_{\text{rot}}$ , with an associated uncertainty of  $\sim 0.5 \times n$  kHz.

$$\gamma = -\text{Im}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)) \frac{\omega_A^2 n}{\omega_r} \frac{(\delta\hat{W}_{nf} + \text{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)))}{|k_{//n0}q_{\min}R| S^2}. \quad (11)$$

从方程 (10) 可以很容易地得到 BAE 频率与  $|k_{//n0}q_{\min}R|$  正相关. 因此, 偏离  $q_{\min}$  的有理面越大, BAE 的频率就越大, 如图 9 所示. 此外, 还需注意的是, BAE 具有正的频率, 则  $\text{Im}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)) > 0$  对应于 EP 通过波-粒子共振相互作用激发 BAE. 因此, BAE 的持续时间不仅受到 EP 的共振激发的

影响, 还受到  $q_{\min}$  的影响. 这一结论与文献 [34] 中的结论一致.

同样地, 对于 KBM, 当频率满足  $|\omega| \ll |\omega_{bi}|$ , 其惯性项可简化为

$$\Lambda^2 \approx c_0 \frac{q_{\min}^2}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{(\omega - \bar{\omega}_{di})(\omega - \omega_{*pi})}{\omega_A^2}, \quad [8,25,28,33,41],$$

式中的  $\bar{\omega}_{di}$  代表热离子的平均进动频率. 由于仅考虑了捕获的和接近循环的粒子, 此处  $c_0 \approx 1.6$  [56,57]. KBM 的频率满足:

$$\omega = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_{di} + \omega_{*pi}) \pm \frac{1}{2} \left\{ (\omega_{*pi} - \bar{\omega}_{di})^2 - \frac{4\omega_A^2 \sqrt{\varepsilon}}{q_{\min}^2 c_0} \left[ \frac{n (\delta\hat{W}_{nf} + \text{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)))^2}{|k_{//n0}q_{\min}R| S^2} - k_{//n0}^2 q_{\min}^2 R^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

并且系统在满足以下情况时出现反应型不稳定性:

$$\frac{|\omega_{*pi} - \bar{\omega}_{di}|^2}{\omega_A^2} < \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{q_{\min}^2 c_0} \left[ \frac{n (\delta\hat{W}_{nf} + \text{Re}(\delta\hat{W}_{nk}(\omega_r)))^2}{|k_{//n0}q_{\min}R| S^2} - k_{//n0}^2 q_{\min}^2 R^2 \right]. \quad (13)$$

由方程 (13) 可知, 对于反应型不稳定性, 当  $k_{//n0}q_{\min}R \rightarrow 0$  时, 方程 (13) 的右侧出现最大值, 对应于不稳定性在  $q_{\min}$  为有理数时达到峰值, 当偏离有理面时, KBM 被有限的  $k_{//n0}q_{\min}R$  (代表的场线弯曲致稳效应) 迅速致稳. 因此,  $q_{\min}$  中的不稳定窗口也非常窄, 大约为  $|\Delta q_{\min}| \approx 0.02-0.04$ , 将  $q_{\min}$  的变化与  $t$  的变化对应起来,  $\Delta t$  大约 7.5 ms, 这种频谱特征正是实验上观测到的“圣诞彩灯”的现象. 此外, 对于  $T_e \gg T_i$ , 主要的驱动项来自热电子, 而来自 EP 的驱动由于其特征频率 (如进动共振频率) 远大于模的频率而忽略不计.

另外还研究了在保持电子温度  $T_i$  不变的情况下, KBM 的模频率和增长率对电子温度  $T_e$  的依赖关系, 结果如图 10 所示. 可以清楚地看出, 不稳定性驱动随着  $T_e$  的增加而增加. 这是由于较大的  $T_e$  通过 (2) 式中的  $d\beta/dr$  使得负数  $\delta\hat{W}_{nf}$  的绝对值更大, 而负的  $\delta\hat{W}_{nf}$  提供了 MHD 不稳定性的驱动. 因此, 在保持  $T_i$  不变的情况下, KBM 的增长率将随着  $T_e$  的增加而增加, 这与实验观测的 LFAM 不稳定性与电子温度成正相关的结论一致.

上述的数值结果和理论分析解释了实验观测结果: 1) 理论预测的 KBM 与实验观测的 LFAM 对  $T_e$  的依赖关系一致; 2) 与 KBM 相比, BAE 在时间上偏离有理  $q_{\min}$  值的程度更大. 为进一步解释

这种偏差及其对径向模结构的影响, 需要对低频 SAW 的全局模型进行数值研究.

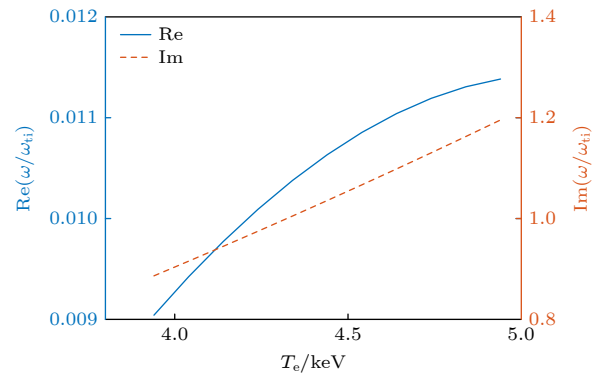


图 10 模频率 ( $\text{Re}(\omega/\omega_i)$ ) 和增长率 ( $\text{Im}(\omega/\omega_i)$ ) 对  $T_e$  的依赖关系, 其中  $T_i = 2.45$  keV

Fig. 10. Dependence of mode frequency and growth rate on  $T_e$ . Here,  $T_i = 2.45$  keV.

### 3.2 全局数值结果和分析

本节将应用方程 (8) 来研究“经典”高能离子分布下的全局低频 SAW 的稳定性.

图 11 所示为 KBM (三角形标记) 和 BAE (带标记的线) 的频率 (蓝色标记) 和增长率 (红色标记) 与径向模方程数  $L$  的关系. 结果表明: 1) 对于 BAE 和 KBM, 基本征态 ( $L = 0$ ) 最不稳定; 2) 对于 BAE, 等离子体框架下的频率和增长率为

(80.7 + 15.2i) kHz, 增长率与实频之比为  $\gamma/\omega_r \approx 0.19$ , 这是 EP 激发的临界不稳定带隙模的典型特征; 对于 KBM, 等离子体框架下的频率和增长率为  $(-3.2 + 5.7i)$  kHz,  $\gamma/\omega_r \approx 1.8$ ; 这是反应型不稳定性的典型特征. 这一数值结果与文献 [40] 中报道的模拟结果一致.

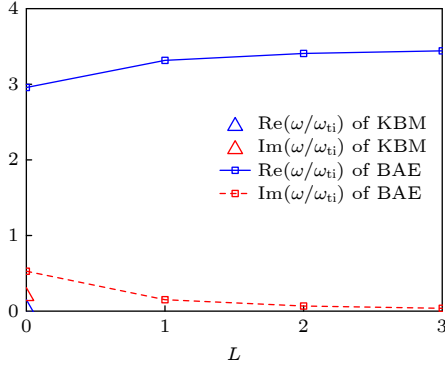


图 11 KBM(三角形标记) 和 BAE(带标记的曲线) 的频率 (蓝色标记) 和增长率 (红色标记) 与径向模数  $L$  的依赖关系  
Fig. 11. Dependence of the real frequencies (blue markers) and growth rates (red markers) of the KBM (triangle markers) and BAE (line with markers) on the radial mode number  $L$ .

相应地, 图 12 为  $L = 0$  的 BAE 的径向模结构  $\delta\phi_m(r)$ . 可以看出, 当  $L = 0$  时, BAE 的径向本征函数  $\delta\phi_m$  具有与实验测量的径向模结构相似的高斯型. 在这种情况下, 理论上预测的  $\delta\phi_m$  的径向宽度为  $w = 0.2107$ , 与高能离子压强的特征度相当, 即  $L_{P_{e,cl}} = 0.1773$ , 这一点与图 3 的分析一致. 此处值得注意的是, 由 EP 分布决定, BAE 的本征函数在最大高能粒子压强梯度的径向位置处出现峰值, 这导致与  $q_{min}$  的径向位置出现较大的偏差. 由此可以预期, KBM 的本征函数应该在不稳定性驱动最大的  $q_{min}$  有理值处达到峰值.

最后, 采用局域理论模型 (当 EP 由“弛豫”分布给出时) 与全局理论模型 (当 EP 由“经典”分布给出时) 分别计算的模数为  $(m, n) = (8, 6)$  的 LFAM, BAAE 及 BAE 的频率汇总至表 1 中, 通过对比发现: 两种模型下得到的 LFAM 和 BAE 均为不稳定性模, 而 BAAE 为稳定性模; 并且两种模型下计算得到低频 SAW 的归一化角频率结果非常接近. 这里需要说明的是, 角频率前的负号 (“-”) 代表模式沿着热电子逆磁漂移方向传播. 对于 LFAM, 由于其本质是与 EP 驱动无关的反应型不稳定的 KBM, 因此, 只要满足 (13) 式的反应

型不稳定性条件, LFAM 就可以在沿着热离子或者热电子逆磁漂移方向上进行传播. 这一结论与文献 [33] 中的实验观测 (对六炮具有相似放电条件的不同环向模数 ( $n = 5-11$ ) LFAM 频率的统计分析发现, 在零频附近既有沿热电子逆磁漂移方向传播的模, 又有沿热离子逆磁漂移方向传播的模) 一致.

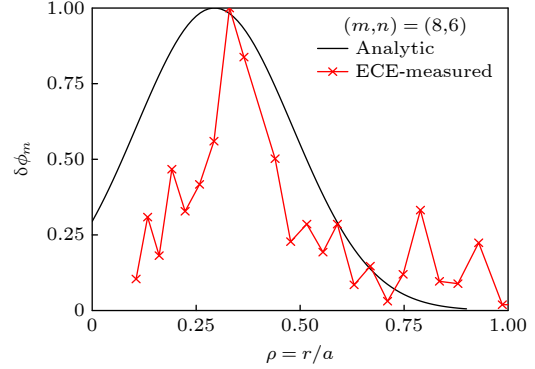


图 12  $L = 0$  的 BAE 的径向模结构  $\delta\phi_m(r)$ . 图中还给出了 BAE 模结构的近似实验测量结果, 如带“x”的红线所示  
Fig. 12. Radial mode structure  $\delta\phi_m(r)$  for the  $L = 0$  BAE. The approximate experimental measurement of the mode structure of BAE is also shown.

表 1 采用局域模型与全局模型计算  $(m, n) = (8, 6)$  低频 SAW 频率 ( $\omega/\omega_{ci}$ ) 的对比

Table 1. Comparison of the low-frequency SAW frequencies ( $\omega/\omega_{ci}$ ) with  $(m, n) = (8, 6)$  calculated by local and the global models.

模式	局域模型	全局模型
LFAM	0.224 + 0.704i	-0.111 + 0.197i
BAAE	0.824 - 0.908i	0.971 - 0.734i
BAE	2.537 + 0.251i	2.807 + 0.527i

## 4 结 论

本文研究了 DIII-D 反磁剪切托卡马克实验中低频剪切 Alfvén 波 (SAW) 的线性特性. 通过分析实验平衡分布, 基于广义的鱼骨模色散关系 (GFLDR) 的统一理论框架, 讨论了弱和/或零磁剪切低频 SAW 的局域和全局模型. 通过数值和理论分析, 描述了模的频率、增长率和极化性质对安全因子最小值 ( $q_{min}$ ) 的依赖关系以及低频 SAW 在不同粒子分布下的失稳机制. 研究结果表明, 在 DIII-D 实验中观察到的 LFAM 和 BAE 分别是反应型和耗散型不稳定模, 且以阿尔芬波的极化为主. 由于不同的失稳机制, 相比于局域在有理  $q_{min}$

面的 LFAM, BAE 的本征函数在空间上位于高能量离子驱动最强的径向位置, 导致偏离  $q_{\min}$  的径向位置.

此外, 本文的理论分析解释了许多实验观察结果, 总结如下.

1) 基于 GFLDR 理论, 成功解释了 BAE 和 LFAM 两个不稳定频率范围的时间模式, 这两个不稳定频谱都出现在  $q_{\min}$  的有理值附近, 但具有明显不同的不稳定性性质.

2) 理论上 KBM 的频率与实验中 LFAM 的频率符合得很好; 即使在没有高能粒子 (EP) 的情况下 KBM 也可能是不稳定的; 对于 BAE 而言, 其频率的理论预测值与实验值的范围也相同; 该理论还证明了 BAAE 是稳定的, 即 BAAE 与 DIII-D 中观测的不稳定的低频模无关.

3) 对于 LFAM 和 BAE 而言, 其共同特征是: 环向模数较大的不稳定模的持续时间都比环向模数较低的环模的持续时间短, 随着  $n$  的增加, 图 9 中较窄的增长率曲线成功地解释了这一特征.

4) 理论上成功预测了实验上观测的单个不稳定的 BAE 比不稳定的 LFAM 跨越的频率范围要大得多的特征. 除此之外, 实验上不稳定的 LFAM 持续时间很短, 大约只有几毫秒, 这与理论上得到的 KBM 增长率对  $q_{\min}$  的强烈依赖是一致的; 而不稳定的 BAE 比 LFAM 持续的时间更长, 这与理论上得到的 BAE 增长率对  $q_{\min}$  的依赖性较弱是一致的.

5) 实验中的 LFAM 出现在  $q_{\min}$  为有理值时; 而 BAE 虽也出现在接近有理值时, 但出现的时间不如 LFAM 精确. 理论对稳定性的预测重现了这一特征: 即 KBM 的增长率在有理  $q_{\min}$  值处急剧增加, 而 BAE 增长率的峰值相对有理  $q_{\min}$  值略有偏离.

6) 在实验上, BAE 的径向本征函数具有近似

的高斯分布, 这与理论预测的  $L = 0$  的径向谐波最不稳定是一致的. 此外, 实验中 LFAM 在含氢等离子体中比在纯氦等离子体中更不稳定<sup>[35]</sup>; 这一特征可通过方程 (13) 得知: 在含氢的等离子体中, 较大的  $\omega_A (\propto 1/m_i)$  会降低不稳定性阈值.

感谢 Fulvio Zonca 教授 (意大利国家新技术、能源和可持续经济发展研究机构非线性等离子体中心) 和 William Walter Heidbink 教授 (加州大学欧文分校物理与天文学系) 对本工作提供的技术指导和支持, 感谢 DIII-D 团队提供的实验数据, 感谢杨磊博士 (中国工程物理研究院) 和邹云鹏博士 (核工业西南物理研究院) 的有益讨论. 同时, 作者也非常感谢意大利 ENEA 非线性等离子体中心 (Center for Nonlinear Plasma Science, CNPS) 为本工作的开展提供的富有启发性的学术讨论氛围和宝贵的科学引导.

## 附录 A $A_n^2$ 和 $S_f$ 的表达式

广义惯性项  $A_n^2$  和极化  $S_f$  的详细推导请见文献 [8]. 这里只列出结果. 在低  $\beta$  ( $\beta = 8\pi P/B_0^2 \approx \varepsilon^2$ ) 轴对称托卡马克等离子体中,

$$A_n^2 = I_\phi \left[ \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right) + A_{\text{cir}}^2 + A_{\text{tra}}^2 \right], \quad (\text{A1})$$

式中,  $A_{\text{cir}}^2$  和  $A_{\text{tra}}^2$  分别表示修正的通行离子和捕获离子的响应;  $I_\phi$  描述了受捕获热粒子的进动共振影响下平行电场的非零的“笛状”分量 ( $\delta E_{\parallel}$ )<sup>[8,28]</sup>;  $\omega_A = v_A/qR$  为 Alfvén 频率, 其中  $v_A$  是 Alfvén 速度,  $\omega_{*ps} = (T_s c/e_s B)(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \cdot (\nabla n_s/n_s + \nabla T_s/T_s) \equiv \omega_{*ns} + \omega_{*Ts}$  是由于密度和温度梯度引起的热粒子逆磁漂移频率. 这里的下标“s”为粒子种类“species”的英文缩写,  $s = i, e$ ,  $n_s$  和  $T_s$  分别为粒子“s”的密度和温度,  $e_s$  为“s”粒子的电荷量,  $c$  为光速.

对于  $A_n^2$ , 方程 (A1) 中涉及的各项表示为<sup>[8]</sup>

$$A_{\text{cir}}^2 = q^2 \frac{\omega \omega_{ii}}{\omega_A^2} \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} \right) \left( F\left(\frac{\omega}{\omega_{ii}}\right) + \Delta F\left(\frac{\omega}{\omega_{ii}}\right) \right) - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \left( G\left(\frac{\omega}{\omega_{ii}}\right) + \Delta G\left(\frac{\omega}{\omega_{ii}}\right) \right) + \frac{\omega \omega_{ii}}{4\bar{\omega}_{di}^2} \left( N_1\left(\frac{\omega}{\omega_{ii}}\right) + \Delta N_1\left(\frac{\omega}{\omega_{ii}}\right) \right) S_f(\omega, \bar{\omega}_{Di}, \omega_{bi}, \omega_{ii}) \right], \quad (\text{A2})$$

$$A_{\text{tra}}^2 = \frac{\omega^2 \omega_{bi}^2}{\omega_A^2 \bar{\omega}_{di}^2} \frac{q^2}{\sqrt{2\varepsilon}} [P_3 + (P_2 - P_3) S_f(\omega, \bar{\omega}_{di}, \omega_{bi}, \omega_{ii})], \quad (\text{A3})$$

$$I_\phi = 1 + \frac{\sqrt{2\varepsilon}(L(\omega/\bar{\omega}_{di}) + \tau^{-1}L(\omega/\bar{\omega}_{De}))}{1 + \tau \omega_{*ni}/\omega + \sqrt{2\varepsilon}\tau[1 - \omega_{*ni}/\omega - M(\omega/\bar{\omega}_{di}) - \tau^{-1}M(\omega/\bar{\omega}_{De})]}. \quad (\text{A4})$$

此外,  $S_f \equiv (i\delta E_{\parallel}/k_{\parallel})_{\text{a.c.}}/\delta\phi_{\text{d.c.}}$  的表达方程<sup>[8]</sup>为

$$S_f = - \frac{N_1(\omega/\omega_{ii}) + \Delta N_1(\omega/\omega_{ii}) + \sqrt{2\varepsilon}P_2}{1 + \frac{1}{\tau} + D_1(\omega/\omega_{ii}) + \Delta D_1(\omega/\omega_{ii}) + \sqrt{2\varepsilon}(P_1 - P_2)}, \quad (\text{A5})$$

式中的函数  $F(x)$ ,  $\Delta F(x)$ ,  $G(x)$ ,  $\Delta G(x)$ ,  $N_1(x)$ ,  $\Delta N_1(x)$ ,  $D_1(x)$ ,  $\Delta D_1(x)$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $L(\omega/\bar{\omega}_{Ds})$  及  $M(\omega/\bar{\omega}_{Ds})$ ,  $x = \omega/\omega_{ii}$

均为等离子体色散函数  $Z(x)$  的函数, 它们的定义如下:

$$\begin{aligned}
 Z(x) &= \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{y-x} dy, \\
 F(x) &= x(x^2 + 3/2) + (x^4 + x^2 + 1/2)Z(x), \\
 \Delta F(x) &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-y} \ln \left( \frac{x + \sqrt{2\varepsilon y}}{x - \sqrt{2\varepsilon y}} \right) \frac{y^2}{4} dy, \\
 G(x) &= x(x^4 + x^2 + 2) + (x^6 + x^4/2 + x^2 + 3/4)Z(x), \\
 \Delta G(x) &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-y} \ln \left( \frac{x + \sqrt{2\varepsilon y}}{x - \sqrt{2\varepsilon y}} \right) \frac{y^2}{4} \left( y - \frac{3}{2} \right) dy, \\
 N_1(x) &= 2 \frac{\bar{\omega}_{Di}}{\omega_{ti}} \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} \right) [x + (1/2 + x^2)Z(x)] - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} [x(1/2 + x^2) + (1/4 + x^4)Z(x)] \right\}, \\
 \Delta N_1(x) &= \frac{\bar{\omega}_{Di}/\omega_{ti}}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} y e^{-y} \ln \left( \frac{x + \sqrt{2\varepsilon y}}{x - \sqrt{2\varepsilon y}} \right) \left[ 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \left( y - \frac{3}{2} \right) \right] dy, \\
 D_1(x) &= x \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} \right) Z(x) - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} [x + (x^2 - 1/2)Z(x)], \\
 \Delta D_1(x) &= \frac{\bar{\omega}_{Di}/\omega_{ti}}{\pi^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-y} \ln \left( \frac{x + \sqrt{2\varepsilon y}}{x - \sqrt{2\varepsilon y}} \right) \left[ 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \left( y - \frac{3}{2} \right) \right] dy, \\
 P_1 &= -2 \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{Di}^2} \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \right) G_2 - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} G_4 \right], \\
 P_2 &= -2 \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Di}} \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \right) G_4 - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} G_6 \right], \\
 P_3 &= -2 \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \right) G_6 - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} G_8 \right], \\
 G_n &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} x^n}{(\omega/\bar{\omega}_{Di} - x^2)^2 - (\omega_{bi}/\bar{\omega}_{Di})^2 x^2} dx, \\
 M \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \right) &= -2 \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \right) \left[ 1 + \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}} Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} + \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \right)^{3/2} Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}} \right) \right] \right\}, \\
 L \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \right) &= -2 \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_{*ni}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \right) \left[ \frac{1}{2} + \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} + \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \right)^{3/2} Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\omega_{*ti}}{\omega} \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} + \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}} \right)^{5/2} Z \left( \sqrt{\frac{\omega}{\bar{\omega}_{Ds}}} \right) \right] \right\}. \tag{A6}
 \end{aligned}$$

这里, 对深捕获粒子而言, 其磁漂移轨道的进动频率为  $\bar{\omega}_{ds} = \bar{\omega}_{Ds} m_s v^2 / 2T_s$ ,  $\bar{\omega}_{Ds} = (nq/r)T_s / m_s R \omega_{cs}$ ,  $\omega_{cs} = e_s B / m_s c$ ; 深捕获离子的反弹频率为  $\omega_{bi} \equiv (r/R)^{1/2} (T_i/m_i)^{1/2} / (qR) \approx \varepsilon^{1/2} \omega_{ti}$ , 其中,  $\omega_{ti} = (2T_i/m_i)^{1/2} / qR$ ,  $\tau \equiv T_e/T_i$ .

### 参考文献

[1] Chen L, Zonca F 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 015008  
 [2] Heidbrink W W, Strait E J, Chu M S, et al. 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 855  
 [3] Turnbull A D, Strait E J, Heidbrink W W, et al. 1993 *Phys. Fluids B* **5** 2546  
 [4] Chen L, Zonca F 2007 *Nucl. Fusion* **47** S727  
 [5] Zonca F, Chen L, Santoro R A 1996 *Plasma Phys. Control. Fusion* **38** 2011  
 [6] Zonca F, Chen L, Dong J Q, et al. 1999 *Phys. Plasmas* **6** 1917

[7] Zonca F, Biancalani A, Chavdarovski I, et al. 2010 *J. Phys. Conf. Ser.* **260** 012022  
 [8] Chavdarovski I, Zonca F 2009 *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 115001  
 [9] Lauber P, Brudgam M, Curran D, et al. 2009 *Plasma Phys. Control. Fusion* **51** 124009  
 [10] Zonca F, Chen L, Falessi M V, et al. 2021 *J. Phys. Conf. Ser.* **1785** 012005  
 [11] Cheng C 1982 *Phys. Fluids* **25** 1020  
 [12] Tang W, Connor J, Hastie R 1980 *Nucl. Fusion* **20** 1439  
 [13] Biglari H, Chen L 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3681  
 [14] Zonca F, Chen L, Botrugno A, et al. 2009 *Nucl. Fusion* **49** 085009  
 [15] Gorelenkov N, Berk H, Fredrickson E, et al. 2007 *Phys. Lett. A* **370** 70  
 [16] Gorelenkov N N, Zeeland M A V, Berk H L, et al. 2009 *Phys. Plasmas* **16** 056107  
 [17] Cheng C Z, Chen L, Chance M S 1985 *Ann. Phys.* **161** 21  
 [18] Kimura H, Kusama Y, Saigusa M, et al. 1998 *Nucl. Fusion* **38**

- 1303
- [19] Sharapov S E, Testa D, Alper B, et al. 2001 *Phys. Lett. A* **289** 127
- [20] Zonca F, Chen L 2014 *Phys. Plasmas* **21** 072120
- [21] Zonca F, Chen L 2014 *Phys. Plasmas* **21** 072121
- [22] Lu Z X, Zonca F, Cardinali A 2012 *Phys. Plasmas* **19** 042104
- [23] Berk H L, Pfirsch D 1980 *J. Math. Phys.* **21** 2054
- [24] Connor J, Hastie R, Taylor J 1979 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **365** 1
- [25] Zonca F, Buratti P, Cardinali A, et al. 2007 *Nucl. Fusion* **47** 1588
- [26] Chen W, Ding X T, Yang Q W, et al. 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 185004
- [27] Ma R, Qiu Z, Li Y, et al. 2021 *Nucl. Fusion* **61** 036014
- [28] Chavdarovski I, Zonca F 2014 *Phys. Plasmas* **21** 052506
- [29] Falessi M V, Carlevaro N, Fusco V, et al. 2019 *Phys. Plasmas* **26** 082502
- [30] Falessi M V, Carlevaro N, Fusco V, et al. 2020 *J. Plasma Phys.* **86** 845860501
- [31] Sharapov S, Alper B, Berk H, et al. 2013 *Nucl. Fusion* **53** 104022
- [32] Gorelenkov N, Pinches S, Toi K 2014 *Nucl. Fusion* **54** 125001
- [33] Heidbrink W, Zeeland M V, Austin M, et al. 2021 *Nucl. Fusion* **61** 016029
- [34] Heidbrink W, Zeeland M V, Austin M, et al. 2021 *Nucl. Fusion* **61** 066031
- [35] Heidbrink W, Choi G, Zeeland M V, et al. 2021 *Nucl. Fusion* **61** 106021
- [36] Curran D, Lauber P, Carthy P J M, et al. 2012 *Plasma Phys. Control. Fusion* **54** 055001
- [37] Lauber P 2013 *Phys. Rep.* **533** 33
- [38] Fasoli A, Brunner S, Cooper W, et al. 2016 *Nat. Phys.* **12** 411
- [39] Bierwage A, Lauber P 2017 *Nucl. Fusion* **57** 116063
- [40] Choi G, Liu P, Wei X, et al. 2021 *Nucl. Fusion* **61** 066007
- [41] Chen L, Hasegawa A 1991 *J. Geophys. Res.* **96** 1503
- [42] Varela J, Spong D, Garcia L, et al. 2018 *Nucl. Fusion* **58** 076017
- [43] Tsai S, Chen L 1993 *Phys. Fluids B* **5** 3284
- [44] Chen L 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1519
- [45] Zonca F, Chen L 2000 *Phys. Plasmas* **7** 4600
- [46] Zonca F, Briguglio S, Chen L, et al. 2002 *Phys. Plasmas* **9** 4939
- [47] Ma R, Chen L, Zonca F, et al. 2022 *Plasma Phys. Control. Fusion* **64** 035019
- [48] Ma R, Heidbrink W, Chen L, et al. 2023 *Phys. Plasmas* **30** 042105
- [49] Lao L L, John H St, Stambaugh R D, et al. 1985 *Nucl. Fusion* **25** 1611
- [50] Pankin A, McCune D, Andre R, et al. 2004 *Comput. Phys. Commun.* **159** 157
- [51] Chen L, Zonca F 2017 *Phys. Plasmas* **24** 072511
- [52] Connor J W, Hastie R J, Taylor J B 1978 *Phys. Rev. Lett.* **40** 396
- [53] Chen L, White R B, Rosenbluth M 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 1122
- [54] Hasegawa A 1968 *Phys. Rev.* **169** 204
- [55] O'Neil T, Malmberg J 1968 *Phys. Fluids* **11** 1754
- [56] Rosenbluth M N, Hinton F L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 724
- [57] Graves J P, Hastie R J, Hopcraft K I 2000 *Plasma Phys. Control. Fusion* **42** 1049

SPECIAL TOPIC—Energetic particles in magnetic confinement fusion plasma

**Theoretical studies of low-frequency shear Alfvén waves in reversed shear tokamak plasmas\***Ma Rui-Rui<sup>1)†</sup> Chen Liu<sup>2)3)</sup> Qiu Zhi-Yong<sup>2)</sup>1) (*Southwestern Institute of Physics, Chengdu 610041, China*)2) (*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)3) (*Department of Physics and Astronomy, University of California, Irvine, California 92697-4574, USA*)

( Received 21 February 2023; revised manuscript received 14 June 2023 )

**Abstract**

The low-frequency Alfvénic fluctuations in the kinetic thermal-ion gap frequency range have aroused the interest of researchers since they can interact with background thermal particles and/or energetic particles. In the theoretical framework of the general fishbone-like dispersion relation (GFLDR), we theoretically investigate and delineate the linear wave properties of the low-frequency shear Alfvén wave excited by energetic and/or thermal particles observed in tokamak experiments with reversed magnetic shear. These low-frequency shear Alfvén waves are closely related to the dedicated experiment on energetic ion-driven low-frequency instabilities conducted on DIII-D in 2019. Therefore, adopting the representative experimental equilibrium parameters of DIII-D, in this work we demonstrate that the experimentally observed low-frequency modes and beta-induced Alfvén eigenmodes (BAEs) are, respectively, the reactive-type unstable mode and dissipative-type unstable mode, each with dominant Alfvénic polarization, thus the former being more precisely called low-frequency Alfvén modes (LFAMs). More specifically, due to diamagnetic and trapped particle effects, the LFAM can be coupled with the beta-induced Alfvén-acoustic mode (BAAE) in the low-frequency range (frequency much less than the thermal-ion transit frequency and/or bounce frequency), or with the BAE in the high frequency range (frequency higher than or comparable to the thermal-ion transit frequency), resulting in reactive-type instabilities. Moreover, due to different instability mechanisms, the maximal drive of BAEs occurs in comparison with LFAMs, when the minimum of the safety factor ( $q_{\min}$ ) deviates from a rational number. Meanwhile, the BAE eigenfunction peaks at the radial position of the maximum energetic particle pressure gradient, resulting in a large deviation from the  $q_{\min}$  surface. The ascending frequency spectrum patterns of the experimentally observed BAEs and LFAMs can be theoretically reproduced by varying  $q_{\min}$ , and they can also be well explained based on the GFLDR. In particular, it is confirmed that the stability of the BAAE is not affected by energetic ions, which is consistent with the first-principle-based theory predictions and simulation results. The present analysis illustrates the solid predictive capability of the GFLDR and its practical applications in enhancing the ability to explain experimental and numerical simulation results.

**Keywords:** low frequency shear Alfvén waves, energetic particles, instabilities, gyrokinetic**PACS:** 52.35.Bj, 52.55.Pi, 52.35.Py, 52.30.Gz**DOI:** 10.7498/aps.72.20230255

\* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant Nos. 2022YFE03040002, 2018YFE0304103), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12261131622, 12175053), and the Natural Science Foundation of Sichuan Province, China (Grant No. 2022NSFSC1814).

† Corresponding author. E-mail: [rrma@swip.ac.cn](mailto:rrma@swip.ac.cn)



反磁剪切托卡马克等离子体中低频剪切阿尔芬波的理论研究

马瑞瑞 陈骝 仇志勇

Theoretical studies of low-frequency shear Alfvén waves in reversed shear tokamak plasmas

Ma Rui-Rui Chen Liu Qiu Zhi-Yong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 215207 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230255

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230255>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

中国环流器2号A托卡马克弹丸注入放电中空电流与反磁剪切位形

Hollow current and reversed magnetic shear configurations in pellet injection discharges on Huanliuqi 2A tokamak

物理学报. 2021, 70(18): 185201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210641>

剪切振动下湿颗粒的力学谱

Wet granular matter mechanical spectroscopy under low-frequency shear

物理学报. 2018, 67(20): 206402 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180966>

磁场对激光驱动Kelvin-Helmholtz不稳定性影响的二维数值研究

Two-dimensional numerical study of effect of magnetic field on laser-driven Kelvin-Helmholtz instability

物理学报. 2020, 69(24): 244701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201167>

变声速弹性沉积层下压缩波与剪切波的耦合影响

Compressional-shear wave coupling induced by velocity gradient in elastic medium

物理学报. 2018, 67(23): 234303 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181600>

基本非线性波与调制不稳定性的精确对应

Quantitative relations between fundamental nonlinear waves and modulation instability

物理学报. 2020, 69(1): 010501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191385>

正三角型三芯光纤中等腰对称平面波的调制不稳定性分析

Modulation instabilities in equilateral three-core optical fibers for isosceles-triangle symmetric continuous waves

物理学报. 2018, 67(5): 054203 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171650>