

超电阻对气球模线性不稳定性影响的理论研究*

刘泰齐¹⁾²⁾ 陈少永^{1)2)†} 牟茂淋¹⁾²⁾ 唐昌建¹⁾²⁾

1) (四川大学物理学院, 成都 610065)

2) (四川大学, 高能量密度物理及技术教育部重点实验室, 成都 610065)

(2023 年 3 月 2 日收到; 2023 年 5 月 18 日收到修改稿)

在磁约束聚变等离子体中, 本文将超电阻引入气球模模型, 采用解析理论的方法研究其对气球模线性不稳定性的影响. 推导了包含超电阻、电阻和抗磁效应的非理想气球模本征方程, 分析不同条件下超电阻对气球模的作用. 结果表明, 超电阻会增强气球模的不稳定性, 其物理机制是超电阻导致的电流扩散效应使得磁力线弯曲项对气球模的稳定作用减弱; 超电阻与电阻对气球模的去稳效应存在竞争关系, 当超电阻与电阻的比值较大时, 超电阻的作用占主导, 反则反之. 超电阻的去稳效应随着环向模数增加而增强, 当环向模数大于某阈值时, 超电阻会使原本稳定的气球模变得不稳定, 且该阈值与超电阻和电阻的比值成反比. 研究结果对未来聚变堆中低碰撞率边缘等离子体中的输运改善和边缘局域模控制具有重要参考价值.

关键词: 托卡马克, 磁流体不稳定性, 气球模, 超电阻

PACS: 52.55.Fa, 52.55.Tn, 52.35.Py

DOI: 10.7498/aps.72.20230308

1 引言

磁约束等离子体中磁流体不稳定性会导致其约束性能变差, 甚至可能演变成等离子体大破裂并导致放电终止, 因此, 环形装置中磁流体不稳定性的物理机制和稳定性判据引起了研究者的广泛关注. 气球模的扰动主要集中在环形等离子体的弯曲率区, 即磁力线曲率方向与等离子体压强梯度方向相同的区域, 使得原本平滑的磁面在局部出现凸起或凹陷^[1], 采用磁流体动力学^[2-5]、动理学理论等多种方法对气球模的特性进行了较多研究.

20 世纪 70 年代以来, Lortz 等^[6-8]通过计算磁剪切 s 与归一化压强梯度 α 的不稳定边界图, 提出了第一稳定区、不稳定区和第二稳定区. 随后的研究表明, 电阻可使得气球模的稳定区减小, 而

抗磁效应则对气球模具有致稳作用. 在高约束模 (H 模) 边缘等离子体的低碰撞率和高压强梯度条件下, 电阻和抗磁等非理想效应对气球模的作用更加明显. 此外, 气球模与剥离模耦合形成所谓剥离气球模^[9], 并被广泛应用于边缘局域模 (ELM) 的物理解释, 基于非理想剥离气球模模型的非线性台基模拟成功解释了 ELM 实验. 因此, 探究各种非理想效应对边缘输运垒中气球模的作用对未来聚变堆控制 ELM 至关重要.

在上述非理想效应中, 由反常电子黏滞引起的超电阻效应对气球模的作用研究相对较少. 超电阻产生的物理机制主要包括微尺度随机磁场和撕裂模湍流两方面, 其作用将使得电流耗散且梯度变平缓^[10,11]. 已有研究发现超电阻对气球模有去稳作用^[12], 但其作用机理还有较多不清楚的地方. 另外, 在 ELM 非线性模拟中, 超电阻效应^[9,13]会促进磁重联从而限制 ELM 的径向展宽, 且可使非线性数

* 国家磁约束核聚变能发展研究专项 (批准号: 2019YFE03090400, 2019YFE03030004) 和国家自然科学基金 (批准号: 11775154, 11905152) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sychen@scu.edu.cn

值模拟更加稳定^[14]. 因此, 有必要从理论上系统探究超电阻对气球模的作用.

本文首先分析了超电阻对理想气球模线性不稳定性的影响, 然后, 研究了存在电阻时超电阻去稳非理想气球模的环向模数阈值, 最后, 在考虑抗磁效应条件下, 探讨了超电阻与电阻比值 (α_H) 对非理想气球模线性不稳定的影响. 本文的内容安排如下: 第 2 节推导了包含超电阻的非理想气球模本征方程; 第 3 节通过打靶法求解非理想气球模本征方程的本征值, 研究超电阻对气球模不稳定性的影响, 并详细分析了超电阻起作用的环向模数阈值 (n_{th}); 第 4 节对本文工作进行总结.

2 含超电阻的气球模本征方程推导

聚变装置中气球模的计算通常采用大型磁流体初值代码或数值计算上更简单的本征值方法. 本文旨在探究超电阻对气球模的作用特性和其物理机制, 因此选择物理性质更清晰且几乎全解析的本征值方法. 由流体动量方程:

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

其中, ρ_0 为离子质量密度, P 为压强, $\mathbf{J}$ 为等离子体电流. 通过在方程两端同时作用 $(\mathbf{b} \cdot \nabla \times)$ 算子, 可以得到涡量方程:

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = B_0^2 \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \left(\frac{J_{//}}{B_0} \right) + 2\mathbf{b}_0 \times \boldsymbol{\kappa}_0 \cdot \nabla P, \quad (2)$$

其中, 涡量 $U \equiv \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$, B_0 为磁轴处的平衡磁场, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{B}_0/B_0$ 为磁轴处磁场的单位矢量, $J_{//}$ 为等离子体电流的平行分量, $\boldsymbol{\kappa}_0 = \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \mathbf{b}_0$ 为平衡场的曲率. 对系统速度取一阶近似, 即只考虑垂直方向上的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 速度, 则有 $\mathbf{V} \approx \mathbf{V}_E = \mathbf{B} \times \nabla \phi / B^2 \approx \mathbf{b}_0 \times \nabla \phi / B_0$, $U \approx \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{V}_E = \nabla_{\perp}^2 \phi / B_0$, ϕ 为静电势. 下标 0 表示平衡量, 下标 // 和 $\perp$ 分别表示平行于磁场方向的分量和垂直于磁场方向的分量.

已知垂直方向上的 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 速度, 所以压强演化方程为

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{B_0} \mathbf{b}_0 \times \nabla \phi \cdot \nabla P. \quad (3)$$

由修正的欧姆定律^[15], $E_{//} = \eta J_{//} - \eta_H \nabla_{\perp}^2 J_{//} = -\nabla \phi - \frac{\partial A_{//}}{\partial t}$, η 为电阻率, η_H 为超电阻率, 因为磁矢势 $A_{//} = \Psi B_0$, Ψ 为磁通, 得磁场的演化方程:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{B_0} \nabla_{//} \phi + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla_{\perp}^2 \Psi - \frac{\eta_H}{\mu_0} \nabla_{\perp}^4 \Psi. \quad (4)$$

所以, 随时间的演化的扰动量涡量 u_1 、压强 P_1 、磁通 Ψ_1 , 线性三场约化磁流体动力学方程如下:

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = B_0^2 \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \left(\frac{J_{//,1}}{B_0} \right) + 2\mathbf{b}_0 \times \boldsymbol{\kappa}_0 \cdot \nabla P_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{B_0} \mathbf{b}_0 \times \nabla \phi_1 \cdot \nabla P_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{1}{B_0} \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \phi_1 + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla_{\perp}^2 \Psi_1 - \frac{\eta_H}{\mu_0} \nabla_{\perp}^4 \Psi_1, \quad (7)$$

其中, $u_1 = -\frac{1}{B_0} \nabla_{\perp}^2 (\phi_1 + \frac{P_1}{n_0 e})$, 扰动平行电流 $J_{//,1} = -B_0 \nabla_{\perp}^2 \frac{\psi_1}{\mu_0}$, B_0 为磁轴处平衡磁场的大小, ϕ_1 为扰动静电势, n_0 和 e 分别为离子的数密度和所带电量, μ_0 为真空磁导率, 下标 1 表示扰动量. 模拟中, 所有长度量均用托卡马克大半径 R_0 归一化, 时间均采用阿尔芬 (Alfvén) 时间 $\tau_A = R_0/V_A = R_0/[B_0/(\mu_0 \rho_0)^{1/2}]$ 归一化, 电流密度采用 $-B_0/(\mu_0 R_0)$ 归一化, 压强采用 $B_0^2/2\mu_0$ 归一化, 电阻采用 $\mu_0 R_0 V_A$ 归一化.

三场模型已经被广泛应用于 BOUT++ 代码对边缘局域模崩塌的非线性模拟^[14–17] 和对气球模压缩效应的线性研究^[15], 因此, 三场模型足以用来研究气球模不稳定性的线性特征. 本文采用 Miller 的平衡模型^[18,19], 超电阻导致的电流扩散可能会对平衡产生影响, 但其作用时间尺度远大于气球模不稳定性增长的时间尺度, 因此文中不考虑超电阻对平衡的影响. 在柱坐标系下, 一个大环径比、低比压 β 和同心圆截面的轴对称托卡马克几何位形 $\mathbf{x}(r, \theta, \varsigma) = [R, \phi, Z]$ 可表示为

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad \phi = -\varsigma, \quad Z = r \sin \theta, \quad (8)$$

雅可比为

$$\sqrt{g} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varsigma}, \quad (9)$$

根据文献^[18], 把柱坐标转换成直线坐标的形式 $\vec{x}(\psi, \Theta, \varsigma) = [R, \phi, Z]$, 其中 ψ 为极向磁通, ς 为环向角, Θ 是引入的使磁力线在磁面上为直线的极向坐标. 此时直线坐标的雅可比为

$$\sqrt{g_r} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varsigma} = \sqrt{g} / \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{f(\psi)}{2\pi q} \int \frac{dl_p}{R |\nabla r|}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = 2\pi\sqrt{g}/\left(R^2 \int \frac{dl_p}{R|\nabla r|}\right), \quad (12)$$

q 是安全因子, dl_p 是微分极向弧长, $f(\psi) = RB_\phi$, B_ϕ 是环向磁场.

由 (8) 式可得,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} &= (\cos\theta, 0, \sin\theta), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} &= (-r\sin\theta, 0, r\cos\theta), \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varsigma} &= (0, -1, 0), \end{aligned} \quad (13)$$

把 (13) 式代入 (9) 式得:

$$\sqrt{g} = r, \quad (14)$$

再把 (11)–(14) 式代入 (10) 式, 求出

$$\sqrt{g_{\text{f}}} = \frac{Rq}{B}. \quad (15)$$

假定扰动量都具有 $\tilde{f}(r, t) = f_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ 的形式, $\mathbf{k} = k_\perp \mathbf{e}_\perp + k_\parallel \mathbf{e}_\parallel$, 则有 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$, 代入 (5)–(7) 式可得,

$$\omega k_\perp^2 \left(\phi_1 + \frac{P_1}{en_0} \right) = k_{//} k_\perp^2 \Psi_1 + \mathbf{b}_0 \times \boldsymbol{\kappa}_0 \cdot \mathbf{k} P_1, \quad (16)$$

$$\omega P_1 = -\mathbf{b}_0 \times \nabla P_0 \cdot \mathbf{k} \phi_1, \quad (17)$$

$$\omega \Psi_1 = k_{//} \phi_1 - i\eta k_\perp^2 \Psi_1 - i\eta_H k_\perp^4 \Psi_1, \quad (18)$$

将 (17) 式和 (18) 式代入 (16) 式, 等式两边都有因子 ϕ_1 , 方便起见, 后文用 ϕ 代替 ϕ_1 , 得

$$\begin{aligned} k_{//} k_\perp^2 \frac{k_{//}}{\omega + i\eta k_\perp^2 + i\eta_H k_\perp^4} \phi - \omega k_\perp^2 \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \phi \\ - \mathbf{b}_0 \times \boldsymbol{\kappa}_0 \cdot \mathbf{k} \frac{1}{\delta_i} \frac{\omega_{*i}}{\omega} \phi = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

其中离子抗磁频率 $\omega_{*i} = \mathbf{b}_0 \times \nabla P_0 \cdot \mathbf{k} / (en_0)$, $\delta_i = 1/(en_0)$, $k_\perp$ 和 $k_{//}$ 分别表示垂直和平行波数. 通过标准气球模转换方法^[1]可得:

$$k_{//} = \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{k} = \frac{-i}{B\sqrt{g_f}} \left(q \frac{\partial}{\partial \varsigma} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) = \frac{-i}{B\sqrt{g_f}} \frac{\partial}{\partial \Theta}, \quad (20)$$

$$\mathbf{k}_\perp = k_n \hat{\mathbf{n}} + k_\tau \hat{\boldsymbol{\tau}} = \left(\frac{nB}{|\nabla \Psi|} \right) \Lambda \hat{\mathbf{n}} + \frac{nB}{|\nabla \Psi|} \hat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (21)$$

把 (15) 式、(20) 式和 (21) 式代入 (19) 式, 可得非理想气球模本征方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{f^2(\Theta)}{1 + i\frac{\eta}{\omega} \left(\frac{nq}{r} \right)^2 f^2(\Theta) + i\frac{\eta_H}{\omega} \left(\frac{nq}{r} \right)^4 [f^2(\Theta)]^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \phi \right) \\ + (Rq\omega)^2 f^2(\Theta) \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \phi + \alpha g(\Theta) \phi = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $f^2(\Theta) = 1 + \Lambda^2$, $g(\Theta) = -R(\kappa_n - \kappa_g \Lambda)$, 磁剪切沿磁力线方向的积分 $\Lambda = \nabla \Psi \cdot \nabla(q\Theta - \zeta)/B = s\Theta - \alpha \sin(\Theta)$.

方程中, 第 1 项为对气球模起稳定作用的磁力线弯曲项; 第 2 项为抗磁效应项, 该项可以稳定高 n 气球模; 第 3 项为气球模不稳定性的驱动项, 该项中包含了正交和测地曲率, 在 $\Theta = \pi$ 时为好曲率, 对气球模起致稳作用, 在 $\Theta = 0$ 时为坏曲率, 对气球模起去稳作用. 可以看到, (22) 式是一个二阶的偏微分方程, 由于 Θ 的取值范围在负无穷到正无穷之间, 且边界条件需要满足在 Θ 趋近于正负无穷时, Φ 的取值是零, 因此该偏微分方程的边界条件应该为

$$\phi(\pm\infty) = 0, \quad \phi(0) = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \Theta} \right|_{\pm\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \Theta} \right|_0 = 0. \quad (23)$$

对 (22) 式求解, 可以令

$$A = \frac{f^2(\Theta)}{1 + i\frac{\eta}{\omega} \left(\frac{nq}{r} \right)^2 f^2(\Theta) + i\frac{\eta_H}{\omega} \left(\frac{nq}{r} \right)^4 [f^2(\Theta)]^2},$$

$$B = (Rq\omega)^2 f^2(\Theta) \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) + \alpha g(\Theta),$$

$$C = \frac{\partial A}{\partial \Theta},$$

因此, (22) 式可以转化为二阶常微分方程

$$\frac{d^2}{d\Theta^2} \phi + \frac{C}{A} \frac{d}{d\Theta} \phi + \frac{B}{A} \phi = 0. \quad (24)$$

因此可对 (24) 式进行求解. 结合本征方程 (22) 式和边界条件 (23) 式, 通过打靶法来求解包含超电阻的非理想气球模本征方程, 以研究超电阻对气球模不稳定性的作用. 该模型虽然不能纯解析地解决气球模特征, 但可以研究托卡马克边缘输运垒中的气球模.

数值求解 (24) 式时选取一个与 JET 装置参数相近的平衡, 大环半径 $R = 3.52$ m, 小环半径 $r = 1.24$ m, 安全因子 $q = 2.35$, 环向磁场为 $B = 4.2$ T, 等离子体电流 $I = 2.5$ MA. 由斯必泽模型可知, 电阻与温度的 $3/2$ 次方呈反比, 目前等离子体被加热

的温度为 1 keV 量级, 因此电阻可以达到 10^{-8} 量级, 随着装置水平的发展, 将来实验堆中托卡马克温度更高, 达到 10 keV 量级时, 电阻将达到 10^{-9} — 10^{-10} 量级, 超电阻数值也会更小. 当 $s = 2.59$, $\alpha = 0.46$, $n = 35$, $\eta = 10^{-7}$, $\eta_H = 9 \times 10^{-15}$ 时, 求解 (24) 式可得归一化增长率 $\gamma = 0.03684$, 本征函数解如图 1 所示, 由于本征函数关于 $\Theta = 0$ 对称, 所以图 1 仅给出 Θ 为正时的本征函数.

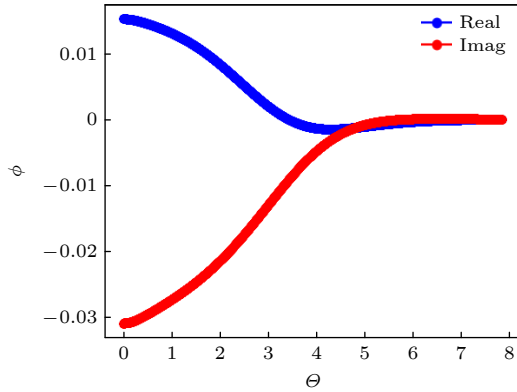


图 1 考虑超电阻的非理想气球模本征方程函数解 ($R = 3.52$ m, $r = 1.24$ m, $q = 2.35$, $s = 2.59$, $\alpha = 0.46$, $n = 35$, $\eta = 10^{-7}$, $\eta_H = 9 \times 10^{-15}$)

Fig. 1. Eigen-functions of the ballooning model with hyper-resistivity ($R = 3.52$ m, $r = 1.24$ m, $q = 2.35$, $s = 2.59$, $\alpha = 0.46$, $n = 35$, $\eta = 10^{-7}$, $\eta_H = 9 \times 10^{-15}$).

3 数值计算结果与分析

使用与图 1 相同的参数, 在不考虑抗磁效应和电阻效应情况下, 超电阻不同时对气球模归一化线性增长率的影响如图 2 所示. 由图 2 可知, 超电阻对气球模线性增长率的影响随着环向模数 n 的增大而增强, 气球模线性增长率随着超电阻的增大而变大. 因此, 超电阻对气球模不稳定性有去稳作用, 且随着环向模数增大而增强. 由本征方程式 (22) 可知, 超电阻在第 1 项, 即磁力线弯曲项中, 且该项包含环向模数. 因为磁力线弯曲项对气球模起稳定作用, 且随着超电阻的增大, 磁力线弯曲项减小, 所以此时气球模的增长率增大. 在低碰撞率的磁约束等离子体中, 由于磁力线冻结在等离子体中, 那么等离子体扰动会造成磁力线弯曲, 然而弯曲磁力线需要对其做功, 因此磁力线弯曲对气球模不稳定性具有抑制作用. 但由于超电阻造成的电流扩散效应, 使得磁力线与等离子体具有相对运动, 进而减弱磁力线弯曲项对气球模的稳定作用. 对于高环向

模数的气球模, 超电阻项更大, 因此其对气球模的去稳作用更强.

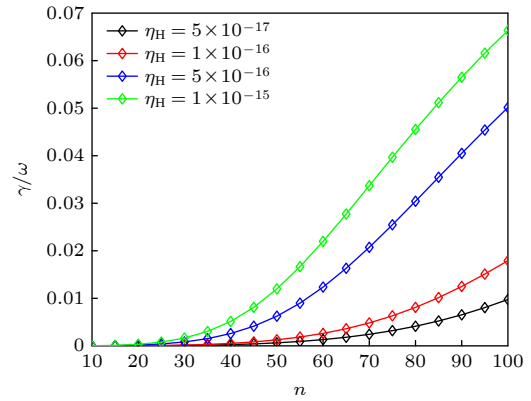


图 2 超电阻对理想气球模线性增长率的影响, 其中横坐标 n 表示环向模数, 纵坐标为归一化气球模线性增长率

Fig. 2. Effect of hyper-resistivity on the linear growth rate of ideal ballooning modes, where the x -coordinate represents the toroidal mode number, and the y -coordinate is the linear growth rate of ballooning modes.

同时考虑电阻和超电阻对气球模的作用. 先保持 α_H 不变, 改变电阻大小, 分析气球模线性增长率变化情况. 由于超电阻和电阻对气球模的作用机理和效果有相似之处, 所以考虑存在电阻效应时, 超电阻效应对气球模归一化线性增长率的影响. 由图 3 可以看出, 当超电阻为 0 时, 气球模线性增长率随着环向模数增大而变大; 且在环向模数相同时, 电阻越大, 气球模增长率也越大; 在此条件下, 加上超电阻后气球模增长率会进一步增大. 加上超

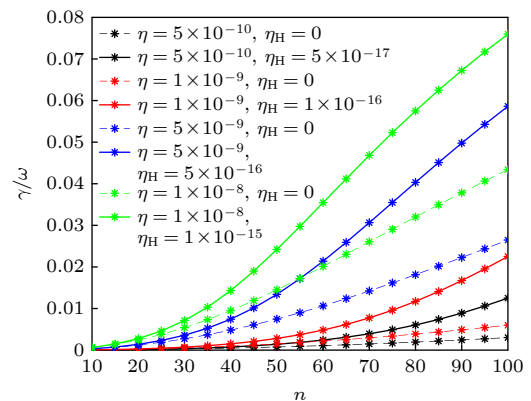


图 3 不同电阻和超电阻条件下气球模线性增长率随环向模数的变化, 其中超电阻和电阻的比值 $\alpha_H = 10^{-7}$ 保持不变

Fig. 3. Linear growth rate of ballooning modes varies with toroidal mode number under different resistivity and hyper-resistivity, the ratio of hyper-resistivity to resistivity remain unchanged, where $\alpha_H = 10^{-7}$.

电阻使气球模增长率变化的增大值在保持 α_H 不变且增长率足够大的情况下几乎不变. 这说明, α_H 对气球模不稳定特性起着关键作用.

对比图4青色实线和红色虚线可以发现,当环向模数低于50时,考虑电阻时的气球模线性增长率大于考虑超电阻时的气球模线性增长率,当环向模数高于50时,考虑超电阻的气球模线性增长率大于考虑电阻的气球模线性增长率. 分析其他曲线,也有类似情况,对于在一定大小范围内的电阻和超电阻,环向模数较低时,电阻对气球模不稳定性的影响比超电阻强,但环向模数增大后,相同的超电阻对气球模不稳定性的影响会强于此电阻. 由(22)式可以看出,超电阻项与环向模数 n 的4次方成正比,而电阻项与 n 的平方成正比,因此,电阻在环向模数较低的时候对气球模不稳定性影响更强,而超电阻在环向模数较大时对气球模不稳定性的影响会更强.

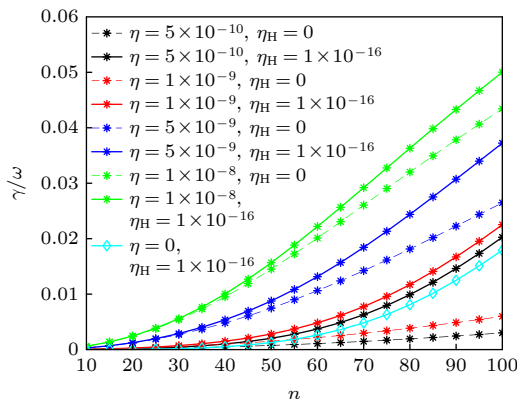


图4 保持超电阻大小不变($\eta_H = 10^{-16}$),不同电阻条件下气球模线性增长率随环向模数的变化

Fig. 4. The linear growth rate of the ballooning mode varies with the toroidal mode number under different resistivity conditions, keeping the values of the hyper-resistivity unchanged, where $\eta_H = 10^{-16}$.

通过文献[14, 20]可知超电阻与电阻比值参数范围为 10^{-6} — 10^{-4} ,因此,选取一个较小的超电阻($\eta_H = 10^{-16}$),保持其值不变,只改变电阻值,研究气球模归一化线性增长率变化情况. 由图4分析可知,考虑电阻和超电阻的气球模线性增长率(除青色外的其他实线)都比只考虑电阻的气球模线性增长率(青色实线)高,加上超电阻后气球模线性增长率也会增大,虽然加上的是固定值的超电阻,但增长率的增长值却有明显变化,确切来说, α_H 减小,增长率增长值也变小.

结果表明电阻和超电阻对气球模不稳定性均具有去稳作用,且它们的作用效果相似. 当同时考虑电阻效应和超电阻效应的时候,它们对气球模归一化线性增长率的影响比单独考虑电阻效应或者超电阻效应时大,但却比两者增长率的小. 这说明电阻和超电阻虽然都对气球模不稳定性有去稳作用,但两者之间存在竞争关系. 在保持 α_H 不变时,不同电阻情况下,加上超电阻导致的气球模线性增长率与不加超电阻时的差值在增长率足够大时基本不变. 而当保持超电阻值不变时,不同电阻情况下,加上超电阻导致的气球模线性增长率与不加时的差值有明显变化,由此分析,超电阻与电阻的相对大小决定超电阻对气球模不稳定性的去稳效果强弱.

而且在考虑电阻效应的情况下,当环向模数较小时,有无超电阻对气球模归一化线性增长率几乎没有影响,但随着环向模数逐渐增大时,超电阻才开始对气球模归一化线性增长率有影响. 这说明在环向模数较低时,超电阻效应对气球模不稳定性的去稳作用被电阻效应掩盖,进一步表明电阻效应与超电阻效应之间具有竞争关系.

为了研究超电阻效应与电阻效应之间的竞争关系,保持电阻($\eta = 10^{-8}$)不变,改变超电阻值,使 α_H 改变,气球模线性增长率随环向模数变化如图5所示. 可以看出,虽然在环向模数较低时,超电阻对气球模线性增长率没有影响,但随着环向模数增大,超电阻将使气球模增长率变大,即超电

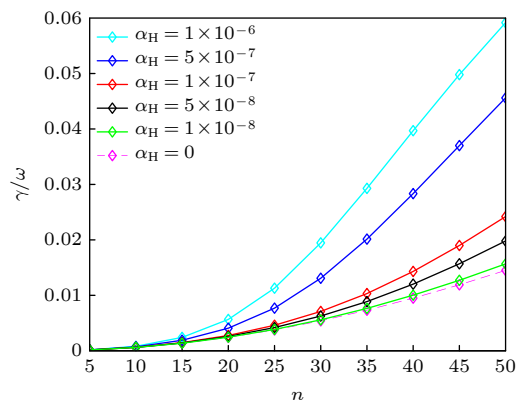


图5 不同 α_H 条件下,气球模线性增长率随环向模数的变化情况,其中电阻 $\eta = 10^{-8}$ 保持不变

Fig. 5. The linear growth rate of the ballooning mode varies with the toroidal mode number under different ratio of the hyper-resistivity to the resistivity, where the value of resistivity is a constant.

阻对气球模不稳定性起作用存在一个环向模数阈值 (n_{th}). 当 α_H 较大的时候, 超电阻对气球模归一化线性增长率的影响在环向模数较低时就能显现; 相反, 当 α_H 很小时, 超电阻对低环向模数气球模几乎没有作用, 仅对高环向模数气球模有较小的去稳作用. 这说明 α_H 越大, 超电阻对气球模不稳定性起作用的 n_{th} 越小.

超电阻对气球模起作用的环向模数 n_{th} 随 α_H 的变化关系如图 6 所示. 考虑不同电阻情况下, 每个 α_H 都有一个对应的环向模数 n_{th} 与之对应, 由模拟结果可以看出, α_H 越大, 超电阻对气球模归一化线性增长率起作用的环向模数 n_{th} 就越小, α_H 与 n_{th} 之间呈现反比关系, α_H 越大, 超电阻对气球模线性不稳定性起作用的阈值越小. 改变电阻值, 这个趋势基本保持不变.

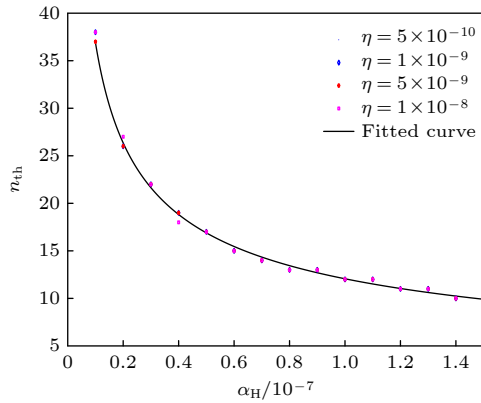


图 6 不同电阻条件下, 超电阻对气球模线性增长率起作用的环向模数阈值与超电阻和电阻比值之间的关系, 横坐标为超电阻与电阻的比值 α_H , 纵坐标为环向模数阈值 n_{th} . Fig. 6. The threshold value of toroidal mode number varies with the ratio of hyper-resistivity to resistivity when the hyper-resistivity plays a role in the linear growth rate of the ballooning mode by changing the resistivity values. The x -coordinate is the ratio of the hyper-resistivity to the resistivity, and the y -coordinate is the threshold value of toroidal mode number.

研究非理想气球模时, 因压强梯度产生的抗磁漂移不可或缺, 所以为了契合实际, 考虑抗磁效应, 研究此时超电阻对气球模线性增长率的影响.

同时考虑超电阻效应和抗磁效应后, 探究此时超电阻对气球模线性不稳定性的影响如图 7 所示. 结果表明加入抗磁效应后, 超电阻对气球模线性增长率依然会随着超电阻的变大而增大, 在低环向模数至中环向模数时, 随着环向模数增大, 气球模线性增长率也随之变大, 但与无抗磁效应的情况相比, 超电阻对气球模线性增长率的作用明显下降.

在环向模数较高时, 气球模线性增长率下降得尤为明显, 结果表明对于高 n 模, 抗磁效应对气球模的稳定作用更加明显, 这与文献 [14] 模拟结果一致. 由 (22) 式可知, 抗磁效应在高 n 模区间起稳定作用, 是因为抗磁漂移直接作用在交换模驱动项 [21], 从而使气球模变得稳定.

考虑抗磁效应以后电阻和超电阻对气球模增长率的影响如图 8 所示, 由于抗磁效应对气球模的有稳定作用, 加入抗磁效应后增长率整体有减小. 图中 α_H 保持不变, 考虑超电阻后气球模增长率的增大值基本不变, 这说明抗磁效应作用下, 依然满足 α_H 不变, 气球模线性增长率的增大值几乎不变.

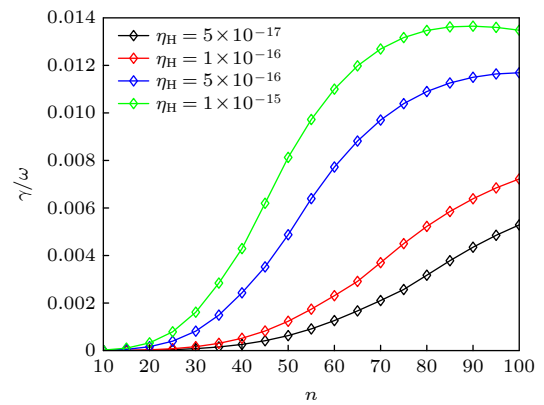


图 7 考虑抗磁效应条件下, 超电阻对气球模线性增长率的影响

Fig. 7. Effect of hyper-resistivity on the linear growth rate of ideal ballooning modes with diamagnetic effect.

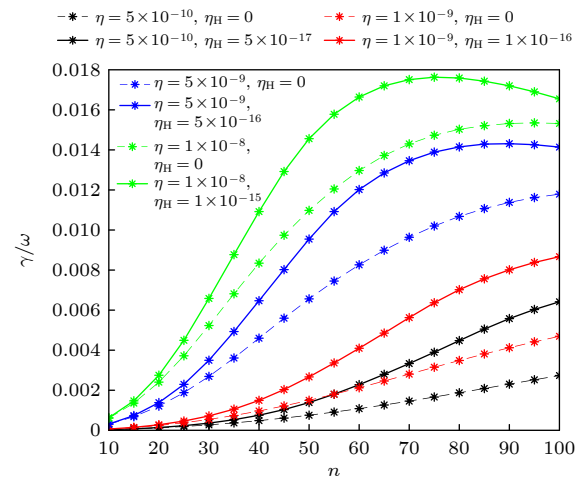


图 8 同时考虑抗磁效应、电阻和超电阻条件下, 气球模线性增长率随环向模数的变化, 其中 $\alpha_H = 10^{-7}$ 保持不变

Fig. 8. With diamagnetic effect, the linear growth rate of ballooning modes varies with toroidal mode number under different resistivity and hyper-resistivity, keeping the ratio of hyper-resistivity to resistivity unchanged, where $\alpha_H = 10^{-7}$.

总之, 虽然逆磁效应对高 n 模气球模有稳定作用, 但其不改变电阻和超电阻对气球模线性不稳定性的作用规律.

当 ($\eta_H = 10^{-16}$) 保持不变, 改变电阻值并且考虑抗磁效应, 气球的线性增长率如图 9 所示. 由图 9 可知, 加入抗磁效应后气球模线性增长率减小; 减小电阻, 考虑超电阻和不考虑超电阻的气球模线性增长率的增大值增大, 说明考虑抗磁效应时, α_H 变大, 气球模线性增长率的增大值变大, 即抗磁效应不改变图 4 得出的结论.

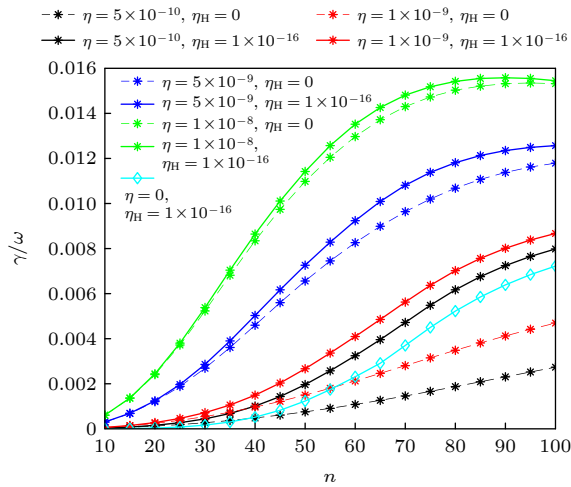


图 9 同时考虑抗磁、电阻和超电阻效应条件下, 气球模线性增长率随环向模数的变化, 其中超电阻大小 ($\eta_H = 10^{-16}$) 保持不变

Fig. 9. With diamagnetic effect, the linear growth rate of the ballooning mode varies with the toroidal mode number under different resistivity conditions, keeping the values of hyper-resistivity unchanged, where $\eta_H = 10^{-16}$.

在图 10 中, 黑色线条表示加入抗磁效应的环向模数阈值与超电阻和电阻比值关系曲线, 橙色线条表示没有抗磁效应的关系曲线, 改变电阻大小, α_H 对气球模起作用的阈值随着比值的增大而增大, 与不加抗磁效应的橙色线条相比并无太大区别, 说明抗磁效应对气球模不稳定性具有致稳作用, 但超电阻与电阻在磁力线弯曲项, 因此抗磁效应对超电阻的阈值没有影响. 总之, 抗磁效应对气球模有稳定作用, 但其对超电阻和电阻效应在气球模不稳定性中的作用规律没有影响.

由于气球模稳定强烈依赖于磁剪切, 因此, 此处将探究不同磁剪切对气球模线性增长率的影响, 取参数 $\alpha = 0.46, n = 50, \eta = 10^{-8}, \eta_H = 1 \times 10^{-15}$,

结果如图 11 所示. 模拟计算结果表明, 磁剪切会影响超电阻对气球模的作用. 由图 11 可知, 随着磁剪切增大, 气球模线性增长率先快速增大, 达到某值后又迅速减小, 到达另一临界值后又开始缓慢增大, 呈现一个非线性的变化. 当磁剪切取值在 0.1—0.2 时, 理想气球模处于第 2 稳定区; 随着磁剪切增大, 在 0.2—1.1 时, 理想气球模处于不稳定区; 磁剪切继续增大, 大于 1.1 时, 理想气球模处于第 1 稳定区. 当气球模处于第 1 稳定区时, 线性增长率随磁剪切增大, 表明磁剪切增强了超电阻的去稳作用. 由 (22) 式的磁力线弯曲项中的系数, 即 (24) 式中的磁力线弯曲因子表达式:

$$A = \frac{f^2(\theta)}{1 + i \frac{\eta}{\omega} \left(\frac{nq}{r} \right)^2 f^2(\theta) + i \frac{\eta_H}{\omega} \left(\frac{nq}{r} \right)^4 [f^2(\theta)]^2}, \quad (25)$$

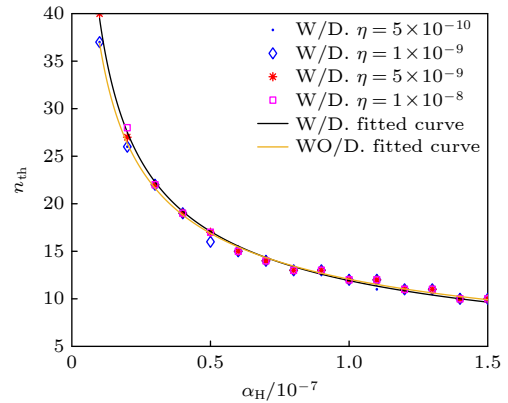


图 10 考虑抗磁效应时, 环向模数阈值随超电阻与电阻比值的变化的变化

Fig. 10. With diamagnetic effect, the threshold value of toroidal mode number varies with the ratio of hyper-resistivity to resistivity.

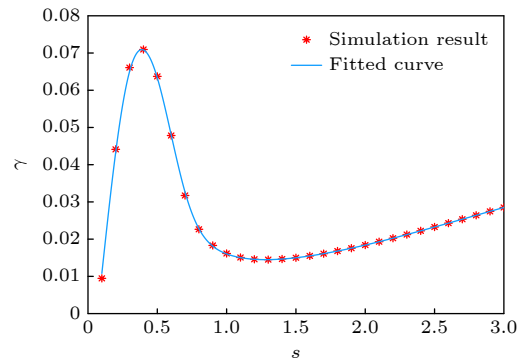


图 11 气球模线性增长率随磁剪切的变化关系 (取参数 $\alpha = 0.46, n = 50, \eta = 10^{-8}, \eta_H = 1 \times 10^{-15}$)

Fig. 11. Linear growth rate of ballooning modes varies with the growth of magnetic shear, with $\alpha = 0.46, n = 50, \eta = 10^{-8}, \eta_H = 1 \times 10^{-15}$.

可知, 磁剪切相关的量 $f^2(\Theta) = 1 + [s\Theta - \alpha \sin(\Theta)]^2$ 出现在 (25) 式分母的第 2 项和第 3 项, 其中, 超电阻与磁剪切均出现第 3 项中, 第 3 项会随着超电阻和磁剪切的增大而变大, 进而减小磁力线弯曲项的稳定作用. 上述结果表明, 磁剪切会增强超电阻对气球模的去稳作用, 其物理机制是磁剪切较大时, 超电阻导致的磁场扩散效应更强, 从而降低磁力线弯曲对气球模的稳定作用.

不同磁剪切条件下, 超电阻起作用的环向模数阈值与超电阻和电阻的比值的关系统如图 12 所示. 由图 12 可以看出, 虽然磁剪切增大会减小阈值, 但并不影响文中阈值与超电阻、电阻比值呈反比关系的结论. 由 (24) 式可知, 磁力线弯曲项中电阻与超电阻项对磁剪切的依赖不同, 其中, 超电阻项正比于 $f^4(\Theta)$, 而电阻项与 $f^2(\Theta)$ 成正比, 因此磁剪切改变了超电阻与电阻的竞争关系, 使得超电阻的去稳作用更强, 所以图 12 中呈现随着磁剪切的增大, 阈值减小.

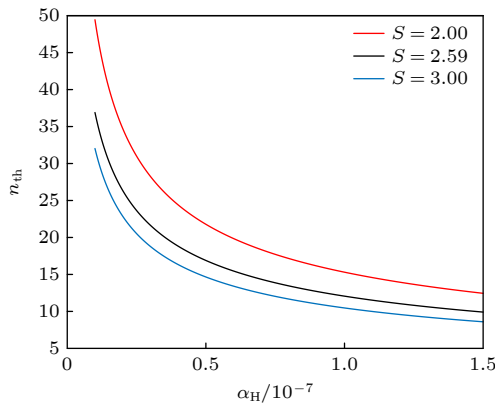


图 12 不同磁剪切条件下, 环向模数阈值随超电阻与电阻比值的变化的关系

Fig. 12. With different magnetic shear, the threshold value of toroidal mode number varies with the ratio of hyper-resistivity to resistivity.

4 结 论

本文采用本征值方法研究了超电阻对气球模线性不稳定性的影响. 首先, 从线性三场约化磁流体动力学方程出发, 在磁场演化方程中加入超电阻项, 通过标准气球模转换方法推导出非理想气球模的本征方程. 然后, 采用打靶法求解包含超电阻项的气球模本征方程得到其线性增长率, 分析了不同参数条件下超电阻对气球模不稳定性的作用.

数值计算结果表明, 在不考虑电阻效应和抗磁效应的情况下, 超电阻对气球模不稳定性具有去稳作用, 其物理机制是超电阻导致的电流扩散效应使得磁力线弯曲项对气球模的稳定作用减弱, 该去稳作用随环向模数变大而增强.

考虑电阻效应时, 电阻与超电阻对气球模的作用有较多相似之处, 电阻在环向模数较低时对气球模不稳定性影响更强, 而超电阻在环向模数较大时对气球模不稳定性的影响会更强, 且它们是竞争关系. 从对气球模的作用机理角度分析, 电阻效应和超电阻效应都使得磁力线弯曲项对气球模的稳定作用减弱. 但电阻和超电阻共同存在时, 气球模归一化线性增长率低于两者单独存在时气球模线性增长率之和. 因此, 电阻效应和超电阻效应存在竞争关系, 即考虑电阻效应时超电阻效应对气球模的去稳作用减弱了, 反之亦然.

当同时考虑电阻效应和超电阻效应时, 超电阻效应对气球模的去稳作用存在一个环向模数阈值, 即当环向模数大于该阈值超电阻才会使气球模变得不稳定. 详细研究发现该阈值和超电阻与电阻的比值成反比, 与其绝对值无关. 此外, 计算结果表明抗磁效应对非理想气球模有稳定作用, 但其不改变本文得出的超电阻和电阻对非理想气球模不稳定性的作用规律. 磁剪切却改变了超电阻与电阻的竞争关系, 使得超电阻的去稳作用更强.

参考文献

- [1] La Haye R J 2006 *Phys. Plasmas* **13** 055501
- [2] Connor J W, Hastie R J, Taylor J B 1978 *Phys. Rev. Lett.* **40** 396
- [3] Glenn Bateman, Nelson D B 1978 *Phys. Rev. Lett.* **41** 1804
- [4] Strauss H R 1981 *Phys. Fluids* **24** 2004
- [5] Dark J F, Antonsen Jr T M 1985 *Phys. Fluids* **28** 544
- [6] Lortz D, Nührenberg J 1978 *Phys. Lett. A* **68** 49
- [7] Coppi B, Ferreira A, Ramos J 1980 *Phys. Rev. Lett.* **44** 990
- [8] Strauss H R, Park W, Monticello D A, White R B 1980 *Nucl. Fusion* **20** 638
- [9] Snyder P B, Wilson H R, Ferron J R, Lao L L, Leonard A W, Osborne T H, Turnbull A D, Mossessian D, Murakami M, Xu X Q 2002 *Phys. Plasmas* **9** 2037
- [10] Strauss H R 1986 *Phys. Fluids* **29** 3668
- [11] Kaw P K, Valeo E J, Rutherford P H 1979 *Phys. Rev. Lett.* **43** 1398
- [12] Wu N, Chen S Y, Mou M L, Tang C J 2018 *Phys. Plasmas* **25** 092305
- [13] Connor J W, Hastie R J, Wilson H R 1998 *Phys. Plasmas* **5** 2687
- [14] Xu X Q, Dudson B, Snyder P B, Umansky M V, Wilson H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 175005

- [15] Rhee T, Park G Y, Jhang H, Kim S S, Singh R 2017 *Phys. Plasmas* **24** 072504
- [16] Rhee T, Kim S S, Jhang H, Park G Y, Singh R 2015 *Nucl. Fusion* **55** 032004
- [17] Jhang H, Kaang H H, Kim S S, Rhee T, Singh R, Hahm T S 2017 *Nucl. Fusion* **57** 022006
- [18] Miller R L, Chu M S, Greene J M, Lin-Liu Y R, Waltz R E 1998 *Phys. Plasmas* **5** 973
- [19] Mou M L, Jhang H, Rhee T, Chen S Y, Tang C J 2018 *Phys. Plasmas* **25** 082518
- [20] Xia T Y, Xu X Q, Dudson B D, Li J 2012 *Contrib. Plasma Phys.* **52** 353
- [21] Tang W M, Dewar R L, Manickam J 1982 *Nucl. Fusion* **22** 1079

Theoretical study of effect of hyper-resistivity on linear stability of ballooning mode^{*}

Liu Tai-Qi¹⁾²⁾ Chen Shao-Yong^{1)2)†} Mou Mao-Lin¹⁾²⁾ Tang Chang-Jian¹⁾²⁾

1) (College of Physics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

2) (Key Laboratory of High Energy Density Physics and Technology of Ministry of Education, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 2 March 2023; revised manuscript received 18 May 2023)

Abstract

The coupling of ballooning mode and peeling mode forms the so-called peeling-ballooning mode, which is widely used in the physical explanation of the edge localized mode (ELM). The nonlinear platform simulation based on the non-ideal peeling-ballooning mode model successfully explained the ELM experimental results. Therefore, exploring the influences of various non-ideal effects on the ballooning mode in the edge transport barrier is very important in controlling the ELM in the future fusion reactors. Among the reports on non-ideal effects, there are few reports involving the effect of hyper-resistivity caused by anomalous electron viscosity on ballooning mode. It has been found that the hyper-resistivity has a destabilizing effect on the ballooning mode, but the associated physical mechanism is still unclear. Therefore, it is necessary to systematically explore the influence of hyper-resistivity on the ballooning mode theoretically by introducing hyper-resistivity into the ballooning mode model. The linear growth rate of ideal and non-ideal ballooning mode are solved by the shooting method for the derived eigenvalue equation of non-ideal ballooning mode containing hyper-resistivity, finite resistivity and diamagnetic drift effects, and the dependence of ballooning mode on hyper-resistivity is also explored under different conditions. The results show that the hyper-resistivity may destabilize the ballooning mode, and the physical mechanism is that the current diffusion effect caused by the hyper-resistivity weakens the stabilizing effect of the magnetic field line bending on the ballooning mode. When both the resistivity and hyper-resistivity are considered, they are in a competitive relationship. When the ratio of hyper-resistivity to resistivity is relatively high, hyper-resistivity plays a dominant role, and the destabilizing effect of resistivity will be shielded by hyper-resistivity, and vice versa. The destabilization effect of hyper-resistivity on ballooning modes is enhanced with the increase of the toroidal mode number. The hyper-resistivity will destabilize the original stable modes once the toroidal mode number exceeds a certain threshold. Further studies show that the threshold is inversely proportional to the ratio of hyper-resistivity to resistivity. The research results have important reference value for the control of edge localized modes in low-collisionality edge plasma in future fusion reactors.

Keywords: tokamak, magnetohydrodynamic instability, ballooning modes, hyper-resistivity

PACS: 52.55.Fa, 52.55.Tn, 52.35.Py

DOI: 10.7498/aps.72.20230308

^{*} Project supported by the National Magnetic Confinement Fusion Energy R&D Program of China (Grant Nos. 2019YFE03090400, 2019YFE03030004) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11775154, 11905152).

[†] Corresponding author. E-mail: syichen@scu.edu.cn

超电阻对气球模线性不稳定性影响的理论研究

刘泰齐 陈少永 牟茂淋 唐昌建

Theoretical study of effect of hyper-resistivity on linear stability of ballooning mode

Liu Tai-Qi Chen Shao-Yong Mou Mao-Lin Tang Chang-Jian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 145201 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230308

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230308>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

黏性各向异性磁流体Kelvin-Helmholtz不稳定性: 二维数值研究

Kelvin-Helmholtz instability in anisotropic viscous magnetized fluid

物理学报. 2019, 68(3): 035201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181747>

可压流体Rayleigh-Taylor不稳定性的离散Boltzmann模拟

Discrete Boltzmann simulation of Rayleigh-Taylor instability in compressible flows

物理学报. 2018, 67(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171952>

中国聚变工程试验堆上新经典撕裂模和纵场波纹扰动叠加效应对alpha粒子损失影响的数值模拟

Numerical simulation of synergistic effect of neoclassical tearing mode and toroidal field ripple on alpha particle loss in China Fusion Engineering Testing Reactor

物理学报. 2021, 70(11): 115201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201972>

托卡马克无碰撞捕获电子模在时空表象中的群速度

Group velocity in spatiotemporal representation of collisionless trapped electron mode in tokamak

物理学报. 2021, 70(11): 115203 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202003>

磁场对激光驱动Rayleigh-Taylor不稳定性影响的数值研究

Numerical study of effect of magnetic field on laser-driven Rayleigh-Taylor instability

物理学报. 2022, 71(15): 154701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220362>

磁场对激光驱动Kelvin-Helmholtz不稳定性影响的二维数值研究

Two-dimensional numerical study of effect of magnetic field on laser-driven Kelvin-Helmholtz instability

物理学报. 2020, 69(24): 244701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201167>