

封面文章

基于量子 Fisher 信息测量的实验多体纠缠刻画*

刘 然¹⁾²⁾ 吴 泽¹⁾²⁾ 李 宇 晨¹⁾²⁾ 陈 昱 全¹⁾²⁾ 彭 新 华^{1)2)3)†}

1) (中国科学技术大学近代物理系, 中国科学院微观磁共振重点实验室, 合肥 230026)

2) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息与量子科技创新研究院, 合肥 230026)

3) (中国科学技术大学, 合肥国家实验室, 合肥 230088)

(2023 年 3 月 10 日收到; 2023 年 4 月 25 日收到修改稿)

量子 Fisher 信息在量子度量与量子信息领域的研究中至关重要, 然而在实验中的提取却十分棘手, 尤其是对于大尺度的量子系统. 这里我们发展了利用测量量子态间重叠的方式来高效提取量子 Fisher 信息的方法, 对于纯态而言, 这种方法只需要在量子系统中引入一个额外的辅助比特并施加单次测量即可实现. 相对于以往的量子 Fisher 信息提取方法, 需要更少由测量带来的时间资源消耗, 因此高效且具有扩展性. 我们将这种方法应用于经历量子相变的三体相互作用系统中多体纠缠的刻画, 并使用核磁共振量子模拟器实验展示了该方案的可行性.

关键词: 量子 Fisher 信息, 多体纠缠, 量子态重叠**PACS:** 03.65.-w, 03.67.Mn, 76.60.-k**DOI:** 10.7498/aps.72.20230356

1 引 言

量子 Fisher 信息 (quantum Fisher information, QFI) 是量子度量学中衡量测量精度极限的重要指标. 对于一个编码待测参数 θ 的量子态 ρ , 其量子 Fisher 信息 F_Q 决定了可以对 θ 估计的精度极限 $(\Delta\theta)^2 \geq 1/F_Q$, 也就是所谓的克拉美罗界限^[1-5]. 对真实量子系统的 QFI 提取也是具有重要意义, 一方面可以利用获取的 QFI 指导量子态 ρ 的设计与优化, 从而提高量子系统的量子度量能力^[6-11], 另一方面利用 QFI 与量子多体纠缠的关系, 可以获得量子态纠缠结构信息^[12-17].

尽管 QFI 在量子度量和量子信息领域有重要的应用, 然而将其从真实量子系统中提取出来并非

易事. 量子态层析是一种常用的获取系统完备信息的方式, 但量子系统的希尔伯特空间维度随着系统呈指数增长的趋势, 即所谓的“指数灾难”问题, 所以对于较大尺度的量子体系这种方法将需要巨大的测量次数与时间资源消耗, 不具有可扩展性. 为了提高 QFI 的提取效率, 文献^[18,19]中给出的基于随机测量的 QFI 提取方法, 相比于量子态层析的方式在一定程度上减少了所需的实验测量次数, 但仍随着系统尺度呈指数增大的趋势. 此外类似于测量交错时序关联 (out-of-time-order correlations)^[20], 纯度损失^[7]的方法也需要足够多的测量才能获取到尽可能精确的 QFI 或其下界的信息.

本工作发展了一种利用测量参数空间近邻量子态间态重叠的 QFI 提取方法, 并设计了实验可行的测量方案. 对于纯态而言, 这种方法理论上可以

* 国家重点研发计划 (批准号: 2018 YFA0306600)、国家自然科学基金 (批准号: 11927811, 1192780017)、科技创新 2030-“量子通信与量子计算机”重大项目 (批准号: 2021 ZD0303205) 和量子通信与量子计算机重大项目安徽省引导性项目 (批准号: AHY050000) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xhpeng@ustc.edu.cn

通过引入单个额外的辅助量子比特, 并对其施加单次测量即可获取系统的 QFI, 极大程度地提高了 QFI 的提取效率. 进一步在核磁共振量子体系中对这种方法的可行性进行展示, 在实验上高效地提取了经历热平衡相变的三体相互作用系统中的 QFI, 并用于该系统中多体纠缠的刻画, 从而用这种方法实现了对真实量子系统中纠缠结构的高效表征.

2 基于量子态重叠的量子 Fisher 信息提取原理

2.1 量子 Fisher 信息与量子态重叠关系

考虑标准的量子参数估计过程, 对初始的量子态 ρ 在么正的参数化过程 $U_\theta = e^{-i\theta H}$ 编码关于 θ 的信息, 得到末态 $\rho_\theta = U_\theta^\dagger \rho U_\theta$, 其中 H 被称为生成元. ρ_θ 的 QFI 是衡量量子态对参数测量精度极限的一个重要指标, 可以表达为^[1,2,21]

$$F(\rho_\theta) = 2 \sum_{i,j, (\lambda_i + \lambda_j \neq 0)} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2, \quad (1)$$

其中 $\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 是 ρ 的本征谱分解. 当该量子态为纯态 $|\psi\rangle$ 时, QFI 可以进一步简化为

$$F(|\psi_\theta\rangle) = 4(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2), \quad (2)$$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 代表关于 $|\psi\rangle$ 求期望值. 从几何学的角度讲, 对于趋于无穷小的 δ 取值, QFI 与 ρ_θ 和 $\rho_{\theta+\delta}$ 在参数 θ 空间上的统计距离密切相关^[22,23], 其中 $\rho_{\theta+\delta}$ 代表与 ρ_θ 在参数空间上近邻的一个量子态. 直觉上讲, 这个量可以理解成对量子态 ρ_θ 与其近邻态 $\rho_{\theta+\delta}$ 的刻画能力: 相同的 δ 设定下, 更大的 QFI 对应量子态对参数空间上微扰 δ 更灵敏的响应, 从而具有更高的对 θ 的测量精度. 基于这种理解, 可以尝试用量子态间的重叠 $\mathcal{D}$ 来衡量其统计距离的大小, 进而建立与 QFI 的关系.

对于一般情况下混态的量子态间的重叠 $\mathcal{D} = \text{Tr}(\rho\rho_\delta)$, 当把量子态中的微扰 δ 与参数化过程的演化关联起来时, 即 $\rho = U_\theta \rho_0 U_\theta^\dagger$, $\rho_\delta = U_{\theta+\delta} \rho_0 U_{\theta+\delta}^\dagger$, 其中 $U_\delta = e^{-i\delta H}$. 对 $\mathcal{D}$ 进行泰勒展开, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{Tr}(\rho\rho_\delta) = \text{Tr} \left(\sum_{i=1} \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| e^{-i\delta H} \sum_{j=1} \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| e^{-i\delta H} \right) \\ &= \sum_k \langle \psi_k | \sum_{i=1} \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| e^{-i\delta H} \sum_{j=1} \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| e^{i\delta H} | \psi_k \rangle \\ &\approx \sum_i \lambda_i^2 - \delta^2 \left(\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2 + \sum_i \lambda_i^2 \langle \psi_i | H^2 | \psi_i \rangle \right). \end{aligned} \quad (3)$$

利用

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i^2 \langle \psi_i | H^2 | \psi_i \rangle &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \lambda_i^2 \langle \psi_i | H^2 | \psi_i \rangle + \sum_j \lambda_j^2 \langle \psi_j | H^2 | \psi_j \rangle \right), \\ \langle \psi_i | H^2 | \psi_i \rangle &= \langle \psi_i | H \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| H | \psi_i \rangle = \sum_j |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

可以得到

$$\mathcal{D} \approx \sum_i \lambda_i^2 + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \delta^2 |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2 - \frac{\delta^2}{2} \sum_{i,j} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2 = \sum_i \lambda_i^2 - \frac{\delta^2}{4} \left(2 \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 |\langle \psi_i | H | \psi_j \rangle|^2 \right). \quad (5)$$

参考 (1) 式, 结合混态中 $\lambda_i + \lambda_j \leq 1$ 的条件, 可以得到:

$$F_Q(\rho) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} 4 \frac{\sum_i \lambda_i^2 - \mathcal{D}}{\delta^2}, \quad (6)$$

其中 $\sum_i \lambda_i^2$ 代表量子态的纯度 $\text{Tr}(\rho^2)$, 在么正过程中保持不变. (6) 式意味着从参数空间近邻量子态的重叠中可以提取到 QFI 的下界.

对于纯态而言, 两个量子态的重叠与保真度 (fidelity) 相等, 即 $\mathcal{D} = |\langle \psi | \psi_\delta \rangle|^2$. 相同的 δ 设定下, $\mathcal{D}$ 从 1 衰减越多说明量子态对微扰展现出更高的灵敏度. 利用泰勒级数:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= |\langle \psi | \psi_\delta \rangle|^2 = |\langle \psi_0 | e^{-i\delta H} | \psi_0 \rangle|^2 \\ &\approx \left(1 - i\delta \langle H \rangle - \frac{\delta^2}{2} \langle H^2 \rangle \right) \left(1 + i\delta \langle H \rangle - \frac{\delta^2}{2} \langle H^2 \rangle \right) \\ &= 1 - \frac{\delta^2}{4} \times 4\Delta^2 H = 1 - \frac{\delta^2}{4} \times F_Q(|\psi_0\rangle). \end{aligned} \quad (7)$$

从而可以得到 [24]:

$$F_Q(|\psi\rangle) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 4 \frac{1 - \mathcal{D}}{\delta^2}. \quad (8)$$

这说明理论上从参数空间近邻的纯态量子态重叠中可以提取到准确的 QFI.

2.2 测量量子态重叠的量子线路

从上述的推导可知, 如果能够设计实验测量出参数空间近邻量子态间的 $\mathcal{D}$, 那么就可以间接得到 QFI. 首先从一般形式的混态出发, 对系统额外引入一个初始状态为 $|0\rangle$ 的辅助量子比特 A 与待测系统 S 的复制 [25], 在图 1(a) 中的量子线路下, 系统初始状态为 $|0\rangle\langle 0| \otimes \rho \otimes \rho$, 经过 Hadamard 门、

控制交换门等作用, 系统处于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0| \otimes \rho \otimes \rho_\delta + |1\rangle\langle 1| \otimes (S\rho \otimes \rho_\delta S^\dagger) \\ &+ |0\rangle\langle 1| \otimes (\rho \otimes \rho_\delta S^\dagger) + |1\rangle\langle 0| \otimes (S\rho \otimes \rho_\delta)]. \end{aligned} \quad (9)$$

计算辅助比特的偏移密度矩阵, 有

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho \otimes \rho_\delta S^\dagger) \\ \frac{1}{2} \text{Tr}(S\rho \otimes \rho_\delta) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

如果对辅助比特在观测算符

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

下进行测量, 可以得到 $\text{Tr}(S\rho \otimes \rho_\delta)$ 的信息. 对于 $\rho = \sum_{ij} a_{ij} |i\rangle\langle j|$, $\rho_\delta = \sum_{ij} a_{ij}^\delta |i\rangle\langle j|$, 其中 $|i\rangle, |j\rangle$ 是计算基矢, 有

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(S\rho \otimes \rho_\delta) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_{ijmn} a_{ij} a_{mn}^\delta S|i\rangle\langle m| \langle j| \langle n| \right) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_{ijmn} a_{ij} a_{mn}^\delta |m\rangle\langle i| \langle j| \langle n| \right) \\ &= \sum_{ijmn} a_{ij} a_{mn}^\delta \delta_{mj} \delta_{in} = \sum_{ij} a_{ij} a_{ji}^\delta \equiv \text{Tr}(\rho \rho_\delta). \end{aligned} \quad (12)$$

通过对辅助比特的测量得到了量子态重叠, 并基于 (6) 式可以得到 QFI 的下界.

对于纯态情况, 该线路同样适用, 并且基于 (8) 式得到准确的 QFI 值. 实际上, 纯态情形下, 线路可以进一步简化成图 1(b) 的形式 [26,27]. 对于处于 $|\psi\rangle$ 状态的量子系统 S , 同样与一个初始为 $|0\rangle$ 量子辅助比特 A 耦合. 经过 A 上的 Hadamard 门操作, 整个系统处于 $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \otimes |\psi\rangle$. 在 $e^{-i\delta|0\rangle\langle 0| \otimes H}$ 的么正操作下可以实现一种等效的控制演化: 当辅助比特 A 处于 $|0\rangle$ 时, 在系统 S 上的等效演化为 $U_\delta|\psi\rangle = |\psi_\delta\rangle$; 当 A 处于 $|1\rangle$ 时, 在系统 S 上不演化. 这样对于初始处于叠加态的 A , 可以实现在系统 S 上得到两个演化分支, 整个系统的量子态为 $(|0\rangle \otimes |\psi_\delta\rangle + |1\rangle \otimes |\psi\rangle)/\sqrt{2}$. 计算子系统 A 的偏移密度矩阵可以得到:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \langle \psi | \psi_\delta \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \psi_\delta | \psi \rangle & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

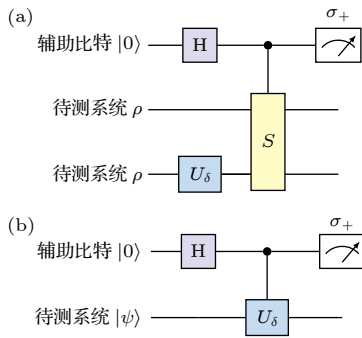


图 1 测量量子态重叠的量子线路 (a) 当待测量子系统 S 是混态时, 系统中需要添加一个辅助量子比特 A 和额外的待测系统 S 的复制来测量 $\mathcal{D}$; (b) 当待测量子系统 S 是纯态时, 系统中仅需要添加一个额外的辅助量子比特 A 来测量 $\mathcal{D}$

Fig. 1. Quantum circuit for measuring the overlap $\mathcal{D}$ of quantum states: (a) An auxiliary qubit A and an additional copy of the system S are added into the system for measuring $\mathcal{D}$ when S is mixed; (b) only an auxiliary qubit A are added into the system for measuring $\mathcal{D}$ when S is pure.

同样地, 对 A 在 σ^+ 下观测, 可以得到参数空间近邻量子态重叠 $\mathcal{D} = |\langle \psi | \psi_\delta \rangle|^2$.

可以发现, 这种基于量子态重叠的 QFI 提取方式对于任意大小的量子系统 S , 理论上只需对 A 施加单次测量即可获得 $\mathcal{D}$, 从而提取 QFI 信息. 在纯态情形下, 线路可以进一步化简, 即除了引入单个额外的探针量子比特 A 不再需要额外量子比特的引入, 所以这种 QFI 的提取方法具有更高效且可扩展的优势, 适用于大尺度的量子系统.

3 应用于多体纠缠刻画实验方案与实验过程

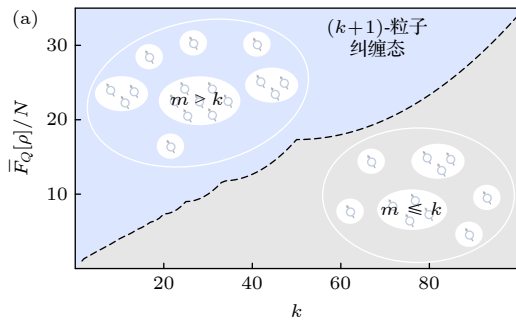
从参数空间近邻量子态重叠中可提取到的 QFI 应用于量子体系中多体纠缠的刻画. 对于 N 个自旋组成的量子系统, 如果满足

$$\bar{F}_Q > \frac{1}{3} [s(k^2 + 2k - \delta_{k,1}) + r^2 + 2r - \delta_{r,1}], \quad (14)$$

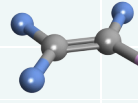
则其中一定包含 $k+1$ 体纠缠^[12,13]. 其中 $s = \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$, $r = N - sk$, δ 为克罗内克 δ 符号, 平均 QFI $\bar{F}_Q = (F_Q^x + F_Q^y + F_Q^z)/3$, 其中 F_Q^ν ($\nu \in \{x, y, z\}$) 分别表示生成元 $H_\nu = \sum_{i=1}^N I_\nu^i$ 时 $|\psi\rangle$ 的 QFI 大小, I_ν^i 是第 i 个自旋算符, 有

$$I_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$



(b)

	^{13}C	F_1	F_2	F_3	T_1/s	T_2^*/s
^{13}C	15479.88				7.9	1.22
F_1	-297.71	-33132.45			6.8	0.66
F_2	-275.56	64.74	-42682.97		4.4	0.63
F_3	39.17	51.50	-129.08	-56445.71	4.8	0.61

实验样品参数表

图 2 利用量子 Fisher 信息实现实验多体纠缠刻画示意图 (a) 基于平均量子 Fisher 信息的多体纠缠判据; (b) 用于实验模拟耦合了辅助量子比特的三自旋相互作用系统 ^{13}C -iodotriuroethylene 样品分子结构及其他相关参数. 对角部分与非对角部分分别表示化学位移与 J 耦合大小 (单位均为 Hz)

Fig. 2. Schematic diagram of experimentally characterizing the multiparticle entanglement in three-body interaction system with quantum Fisher information: (a) Criteria for multiparticle entanglement based on the average of quantum Fisher information; (b) molecular structure and the relevant parameters of ^{13}C -iodotriuroethylene for simulating the three-body interaction system coupling with an auxiliary qubit. The diagonal and off-diagonal elements represent chemical shifts and J -couplings (all in Hz), respectively.

关于这一判据的直观展示如图 2(a) 所示, 其中的黑色虚线代表不等式 (14) 式右侧给出的界限, 对于特定的 k , 当平均 QFI 落在虚线之上时, 说明该 m 体纠缠量子态满足 $m > k$.

接下来利用这个判据对经历量子相变的三体相互作用系统中的多体纠缠进行刻画. 具体来说, 这里研究了 3 个分别包含两体, 三体相互作用的三自旋伊辛模型, 其哈密顿量为

$$H_{zz}(t) = \omega_z \sum_{i=1}^3 I_z^i + \omega_x \sum_{i=1}^3 I_x^i + 2J_2(t) \sum_{1 \leq i < j \leq 3} I_z^i I_z^j,$$

$$H_{zzz}(t) = \omega_x \sum_{i=1}^3 I_x^i + 4J_3(t) I_z^1 I_z^2 I_z^3,$$

$$H'_{zzz}(t) = \omega_z(t) (I_z^1 + I_z^2 + I_z^3) + \omega_x (I_x^1 + I_x^2 + I_x^3) + 4J_3 I_z^1 I_z^2 I_z^3, \quad (16)$$

其中 ω_x 设置为 0.1, 从而打开相变点处的能级简并, $H_{zz}(t)$ 中的 ω_z 设置为 -2, 两体相互作用强度 $J_2(t) \in [0, 2]$, $H_{zzz}(t)$ 中三体相互作用强度 $J_3(t) \in [0, 2]$, $H'_{zzz}(t)$ 中 J_3 设置为 2, $\omega_z(t) \in [-3, 2]$. 这 3 个模型在上述的参数取值范围下, 基态会展现丰富的多体纠缠现象^[28, 29]. 这里通过设计绝热演化使得系统始终保持在基态, 当系统经历量子相变时基态将展现不同纠缠结构, 结合图 1(b) 的量子线路设计测量量子态重叠并提取 QFI, 从而实现对系统中的多体纠缠进行刻画.

对于上述研究的三体相互作用系统, 需要引入额外的辅助比特实现量子态重叠的测量, 所以整个

系统由 4 个量子比特组成. 实验在 400 MHz 的液体核磁共振 (NMR) 谱仪上进行, 利用室温下溶解在氘代氯仿 (d-chloroform) 中的碘三氟乙烯 (^{13}C -iodotriuroethylene) 样品作为四比特量子处理器, 其中 ^{13}C 核作为辅助系统 A, 另外 3 个 ^{19}F 核用来模拟三体相互作用系统, 对应系统 S . 样品的自然哈密顿量为

$$H_{\text{NMR}} = \sum_{i=1}^4 \omega_i I_z^i + 2\pi \sum_{1 \leq i < j \leq 4} J_{ij} I_z^i I_z^j. \quad (17)$$

该样品分子的结构及相关参数信息见图 2(b), 其中表格对角部分代表第 i 个自旋的化学位移 ω_i , 非对角部分表示不同核自旋间的耦合强度 J_{ij} .

实验首先利用线选法^[30]将系统初始化为赝纯态:

$$\rho_{\text{PPS}} = \frac{1-\epsilon}{2^4} \mathbf{1} + \epsilon |0000\rangle\langle 0000|, \quad (18)$$

其中 $\epsilon \sim 10^{-5}$ 是系统在室温下的极化度. 接下来对 3 个 ^{19}F 核组成的 S 系统进行绝热过程. 为了在当前系统的基础上实现 (16) 式中目标哈密顿量下的含时演化, 可以首先将其近似离散成 M 片的不含时演化, 每片的时间长度为 τ . 则对于 t_m 时刻, 目标的演化为 $U_{\text{tar}} = e^{-iH(t_m)\tau}$, $H \in \{H_{zz}, H_{zzz}, H'_{zzz}\}$. 进一步地, 可以将 $H(t_m)$ 拆分成只包含 I_x^i 的部分 $H^{(x)}$ 与只包含 I_z^i 的部分 $H^{(z)}(t)$, 并利用 Trotter 展开的方式进行近似. 由于 ω_x 取较小值, 所以有

$$\begin{aligned} U_{\text{tar}}(t_m) &= e^{-i[H^{(x)} + H^{(z)}(t_m)]\tau} \\ &= e^{-iH^{(x)}\tau/2} e^{-iH^{(z)}(t_m)\tau} e^{-iH^{(x)}\tau/2} + O(\tau^3) \\ &= U_{\text{exp}}(t_m) + O(\tau^3). \end{aligned} \quad (19)$$

经过这样的分解与近似, $U_{\text{exp}}(t_m)$ 可以在实验上用脉冲序列的方式实现^[29,30]. 上述近似需要 τ 取足够

小, 然而考虑到 τ 越小对应着越多的离散片数, 从而带来更大的累计控制误差, 所以需要对 τ 的取值做权衡. 以 H_{zzz} 为例, 通过数值计算发现当 $\tau = 0.4$ 时, 对于任意的 $0 \leq J_3(t) \leq 2$, 总可以满足 $U_{\text{exp}}(t_m)$ 与 $U_{\text{tar}}(t_m)$ 之间的保真度高于 99.9%. 这里么正操作保真度定义为

$$f(U_1, U_2) = \frac{|\text{Tr}(U_1 U_2^\dagger)|^2}{d^2}, \quad (20)$$

其中 $d = 8$ 代表三自旋系统希尔伯特空间维度. 进一步确定总的绝热演化时间 $T = M\tau$, 考虑整个演化过程需要满足绝热条件^[31]:

$$\chi \equiv \frac{1}{T} \max_{t \in [0, T]} \frac{|\langle \psi_i(t) | \partial_t H(t) | \psi_j(t) \rangle|}{|E_i(t) - E_j(t)|^2} \ll 1, \quad \forall j \neq i, \quad (21)$$

其中 $E_i(t), |\psi_i(t)\rangle$ 分别表示 $H(t)$ 的本征值与本征矢. 这个条件意味着总的绝热演化时间 T 需要远大于绝热过程中最小能级差平方的倒数, 在实验中当 $M = 200$ 时 $\chi \sim 10^{-14} \ll 1$. 考虑到实验的控制精度, 最终将整个 M 片演化 $U_M = \prod_{m=1}^M U_{\text{exp}}(t_m)$ 利用梯度上升脉冲优化技术 (gradient ascent pulse engineering, GRAPE)^[32] 实现, 对应的实验时间长度为 20 ms, 理论上保真度 99.95%. 相似地, 后续的 Hadamard 门与 $e^{-i\delta|0\rangle\langle 0| \otimes H_\nu}$, $\nu \in \{x, y, z\}$ 可以合并成整体用 GRAPE 实现. 考虑到这个操作对于不同的绝热过程都是通用的, 所以将该操作优化到理论保真度 99.99% 以上, 实验中的 δ 设置为 0.4.

对于测量过程, 利用核磁共振体系的正交探测手段, 可以实现对 ^{13}C 核自旋 (σ^-) 的测量, 得到 $\mathcal{Q}$, 并利用 (8) 式提取 QFI 的大小.

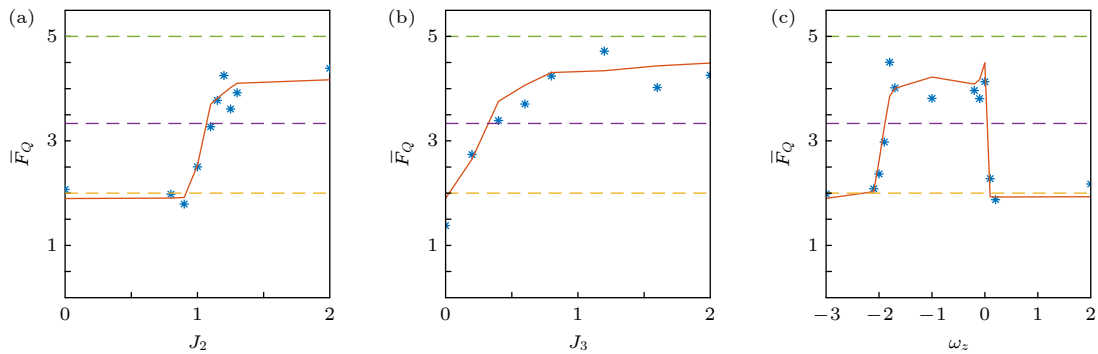


图 3 利用量子态重叠提取到的平均量子 Fisher 信息的实验结果 (a), (b), (c) 分别对应哈密顿量 $H_{zz}, H_{zzz}, H'_{zzz}$ 的结果

Fig. 3. Experimental result of the average of quantum Fisher information extracted from overlap: (a), (b), (c) correspond to the result of Hamiltonian $H_{zz}, H_{zzz}, H'_{zzz}$, respectively.

4 实验结果与分析

实验利用量子态重叠 $\mathcal{Q}$ 提取到的不同哈密顿量参数下基态的平均 QFI 结果如图 3 所示, 3 个子图分别对应哈密顿量 H_{zz} , H_{zzz} , H'_{zzz} 的结果, 其中红色实线表示理论结果, 蓝色点代表实验测量结果, 二者能够较好地吻合. 橙色与紫色虚线分别表示两体、三体纠缠的界限, 即 $\bar{F}_Q$ 高于这条线时, 分别代表至少存在两体、三体纠缠, 绿色虚线代表三自旋系统中 $\bar{F}_Q$ 的理论最大值.

对于 H_{zz} 模型, $J_2 = 0$ 时, 系统基态处于 $|000\rangle$ 的可分态, 对应的 $\bar{F}_Q$ 也最低; 随着两体相互作用强度的增加, 系统中纠缠也随之产生, 处于 $|000\rangle$ 可分态与 $|W\rangle = (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}$ 纠缠态的叠加态, $\bar{F}_Q$ 增大, 直至 $J_2 = 1$ 到达系统相变点, 在这附近系统中至少有两体纠缠的存在; 随着 J_2 继续增加, $|W\rangle$ 占据主导, $\bar{F}_Q$ 也继续增大, 对应系统中出现了三体纠缠. 相似地, 对于 H_{zzz} 模型, 在 $J_3 = 0$ 时, 系统基态处于 $H^{\otimes 3}|111\rangle$ 的可分态; 三体相互作用强度的增大使得基态中 $H^{\otimes 3}|\text{GHZ}\rangle_- = H^{\otimes 3}(|000\rangle - |111\rangle)/\sqrt{2}$ 最大纠缠态的比重持续增大, 对应的 $\bar{F}_Q$ 增大; $J_3 = 2$ 时 $H^{\otimes 3}|\text{GHZ}\rangle_-$ 占据绝对主导, $\bar{F}_Q$ 达到最大. H'_{zzz} 模型更复杂一些, $\omega_z = -3$ 时系统基态为 $|000\rangle$ 直积态; 增大到 $\omega_z = -2$ 时系统发生相变, $|W\rangle$ 开始占据主导, 从对应的 $\bar{F}_Q$ 发现系统中已经出现了三体纠缠; 在 $\omega_z = 0$ 时, 系统再次

发生相变, 此时的基态为最大纠缠态 $H^{\otimes 3}|\text{GHZ}\rangle_-$, 对应的 $\bar{F}_Q$ 也最大; ω_z 从 0 继续增大到 2, 此时系统的基态中可分态 $|111\rangle$ 占据主导, $\bar{F}_Q$ 也再次回到了最低值.

从上述结果来看, 实验中提取到的 QFI 与理论结果能够较好地吻合, 从而给出经历量子相变的三体相互作用系统中多体纠缠较为准确的刻画, 与理论预期相符. 为了量化该实验中的实验误差, 这里将实验提取到的 QFI 与对应的理论值分别展开成列矢量的形式 $\mathbf{F}_Q^{\text{exp}}, \mathbf{F}_Q^{\text{the}}$, 通过计算 $\|\mathbf{F}_Q^{\text{exp}} - \mathbf{F}_Q^{\text{the}}\| / \|\mathbf{F}_Q^{\text{the}}\|$ 来得到实验与理论结果的相对误差, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 模, 对于一个 $m \times n$ 的矩阵 $\mathbf{A}$, 有 $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2}$. 该实验的整体相对误差为 8.8%, 来源包括脉冲控制误差, 弛豫效应以及实验测量误差.

进一步利用核磁共振体系中量子态层析^[33,34]的手段对具有不同纠缠结构的量子态进行实验验证, 在实验中选取了几个特殊的点, 重构得到的密度矩阵实部见图 4. 对于 H_{zz} 模型, 分别选取了 $J_2 = 0, 1, 2$ 这 3 个点, 在有限小值的 ω_x 取值下, 对应的基态分别接近于 $|000\rangle$, $(|000\rangle + |W\rangle)/\sqrt{2}$, $|W\rangle$ 这 3 个特殊的量子态. 实验重构结果与理论基态的保真度分别为 99.21%, 99.25%, 98.74%. 对于 H_{zzz} 模型, 实验重构了 $J_3 = 2$ 处的量子态, 为了更清晰展示, 将结果施加 $H^{\otimes 3}$ 的逆演化从而得到接近 $|\text{GHZ}\rangle_-$ 的部分, 保真度为 98.46%. 对于 H'_{zzz} 模型, 实验重构了 $\omega_z = -1, 0, 2$ 处的量子态, 保真度分别

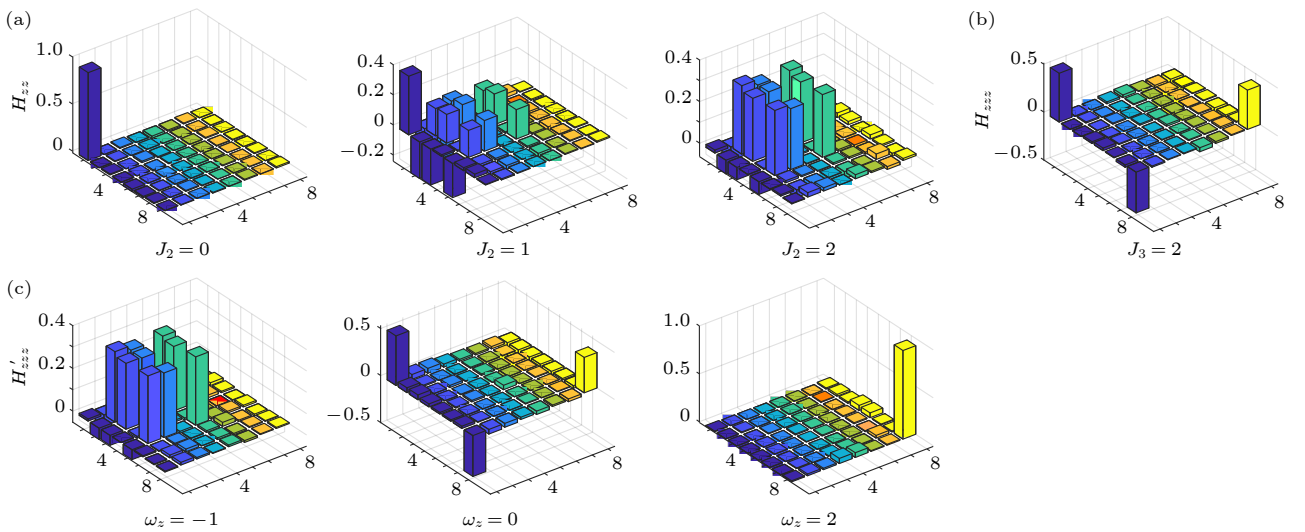


图 4 绝热过程制备的基态密度矩阵的实验重构结果 (a), (b), (c) 分别对应哈密顿量 H_{zz} , H_{zzz} , H'_{zzz}

Fig. 4. Experimentally reconstructed density matrices of ground states prepared by adiabatic process: (a), (b), (c) correspond to the result of Hamiltonian H_{zz} , H_{zzz} , H'_{zzz} , respectively.

为 98.5%, 99.28%, 99.46%. 量子态重构的结果表明, 设计的绝热过程能够较高精度地实现直积态, $|W\rangle$, $|GHZ\rangle$ 等量子态的制备, 进一步验证了实验测量 QFI 用于多体纠缠判定结果的准确性.

5 结 论

量子 Fisher 信息在量子度量与量子信息领域的研究中十分重要, 本文发展了利用参数空间近邻量子态重叠实验提取量子 Fisher 信息的方法, 对于纯态量子系统可以通过引入单个额外的辅助比特与单次测量实现. 相对于以往的量子 Fisher 信息提取手段, 这种方法理论上具有高效性与可扩展性的优势. 在核磁共振量子体系中进一步展示了该方案的实验可行性, 通过将这种方法应用于经历量子相变的三体相互作用系统的量子 Fisher 信息提取, 实验上高效地实现了对系统中多体纠缠结构的刻画.

本文方法可以进一步应用于量子多体物理中量子相变的探测^[35,36], 量子度量中量子探针态的高效刻画表征、设计制备^[7,11]等研究. 该方法具有可扩展的优势, 所以有望应用于提升噪声中尺度量子体系的量子度量表现, 展现显著的量子优势.

参考文献

- [1] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [2] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photon.* **5** 222
- [3] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta. Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [4] Liu R, Chen Y, Jiang M, Yang X D, Wu Z, Li Y C, Yuan H D, Peng X H, Du J F 2021 *Npj Quantum Inf.* **7** 170
- [5] Niu M L, Wang Y M, Li Z J 2022 *Acta. Phys. Sin.* **71** 090601
- [6] Kaubruegger R, Silvi P, Kokail C, van Bijnen R, Rey A M, Ye J, Kaufman A M, Zoller P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 260505
- [7] Yang X D, Thompson J, Wu Z, Gu M L, Peng X H, Du J F 2020 *Npj Quantum Inf.* **6** 62
- [8] Koczor B, Endo S, Jones T, Matsuzaki Y, Benjamin S C 2020 *New J. Phys.* **22** 083038
- [9] Kaubruegger R, Vasilyev D V, Schulte M, Hammerer K, Zoller P 2021 *Phys. Rev. X* **11** 041045
- [10] Chen R Y L, Zhao B C, Song Z X, Zhao X Q, Wang K, Wang X 2021 *Acta. Phys. Sin.* **70** 210302 (in Chinese) [陈然一, 赵彝池, 宋旨欣, 赵炫强, 王琨, 王鑫 2021 物理学报 **70** 210302]
- [11] Marciniak C D, Feldker T, Pogorelov I, Kaubruegger R, Vasilyev D V, van Bijnen R, Schindler P, Zoller P, Blatt R, Monz T 2022 *Nature* **603** 604
- [12] Hyllus P, Laskowski W, Krischek R, Schwemmer C, Wieczorek W, Weinfurter H, Pezze L, Smerzi A 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022321
- [13] Tóth G 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022322
- [14] Hauke P, Heyl M, Tagliacozzo L, Zoller P 2016 *Nat. Phys.* **12** 778
- [15] Li N, Luo S L 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014301
- [16] Hong Y, Luo S, Song H 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042313
- [17] Mirkhalaf S S, Smerzi A 2017 *Phys. Rev. A* **95** 022302
- [18] Yu M, Li D X, Wang J C, Chu Y M, Yang P C, Gong M S, Goldman N, Cai J M 2021 *Phys. Rev. Research* **3** 043122
- [19] Rath A, Branciard C, Minguzzi A, Vermersch B 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 260501
- [20] Garttner M, Hauke P, Rey A M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 040402
- [21] Fiderer L J, Fraisse J M E, Braun D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 250502
- [22] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [23] Yuan H 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 160801
- [24] Macrì T, Smerzi A, Pezzè L 2016 *Phys. Rev. A* **94** 010102
- [25] Ekert A K, Alves C M, Oi D K, Horodecki M, Horodecki P, Kwek L C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 217901
- [26] Quan H T, Song Z, Liu X F, Zanardi P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140604
- [27] Zhang J, Peng X, Rajendran N, Suter D 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 100501
- [28] Peng X H, Zhang J F, Du J F, Suter D 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042327
- [29] Ding Z, Liu R, Radhakrishnan C, Ma W C, Peng X H, Wang Y, Byrnes T, Shi F Z, Du J F 2021 *Npj Quantum Inf.* **7** 145
- [30] Peng X H, Zhu X W, Fang X M, Feng M, Gao K L, Yang X D, Liu M L 2001 *Chem. Phys. Lett.* **340** 509
- [31] Albash T, Lidar D A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015002
- [32] Khaneja N, Reiss T, Kehlet C, Schulte-Herbruggen T, Glaser S J 2005 *J. Magn. Reson.* **172** 296
- [33] Li J, Cui J Y, Yang X D, Luo Z H, Pan J, Yu Q, Li Z K, Peng X H, Du J F 2018 *Acta. Phys. Sin.* **64** 167601 (in Chinese) [李俊, 崔江煜, 杨晓东, 罗智煌, 潘健, 余琦, 李兆凯, 彭新华, 杜江峰 2018 物理学报 **64** 167601]
- [34] Kong X Y, Zhu Y Y, Wen J W, Xin T, Li K R, Long G L 2018 *Acta. Phys. Sin.* **67** 220301 (in Chinese) [孔祥宇, 朱垣晔, 闻经纬, 辛涛, 李可仁, 龙桂鲁 2018 物理学报 **67** 220301]
- [35] Wang T L, Wu L N, Yang W, Jin G R, Lambert N, Nori F 2014 *New J. Phys.* **16** 063039
- [36] Yin S Y, Song J, Zhang Y J, Liu S T 2019 *Phys. Rev. B* **100** 184417

COVER ARTICLE

Experimentally characterizing multiparticle entanglement
based on measuring quantum Fisher information*Liu Ran¹⁾²⁾ Wu Ze¹⁾²⁾ Li Yu-Chen¹⁾²⁾Chen Yu-Quan¹⁾²⁾ Peng Xin-Hua^{1)2)3)†}1) (*CAS Key Laboratory of Microscale Magnetic Resonance, School of Physical Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)2) (*CAS Center for Excellence in Quantum Information and Quantum Physics,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)3) (*Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China*)

(Received 10 March 2023; revised manuscript received 25 April 2023)

Abstract

Quantum Fisher information plays a vital role in the field of quantum metrology and quantum information, because it not only quantifies the ultimate precision bound of parameter estimation but also provides criteria for entanglement detection. Nevertheless, experimentally extracting quantum Fisher information is intractable. Quantum state tomography is a typical approach to obtaining the complete information about a quantum system and extract quantum Fisher information. However it becomes infeasible for large-scale quantum systems owing to the exponentially growing complexity. In this paper, we present a general relationship between quantum Fisher information and the overlap of quantum states. Specifically, we show that for pure states, the quantum Fisher information can be exactly extracted from the overlap, whereas for mixed states, only the lower bound can be obtained. We also develop a protocol for measuring the overlap of quantum states, which only requires one additional auxiliary qubit and a single measurement for pure state. Our protocol is more efficient and scalable than previous approaches because it requires less time and fewer measurements. We use this protocol to characterize the multiparticle entanglement in a three-body interaction system undergoing adiabatic quantum phase transition, and experimentally demonstrate its feasibility for the first time in a nuclear magnetic resonance quantum system. We conduct our experiment on a 4-qubit nuclear magnetic resonance quantum simulator, three of which are used to simulate the quantum phase transition in a three-body interaction system, and the remaining one is used as the auxiliary qubit to detect the overlap of the quantum state. We use gradient ascent pulse engineering pulses to implement the process of evolution. By measuring the auxiliary qubit, the experimental results of quantum Fisher information are obtained and match well with the theoretical predictions, thus successfully characterizing the multiparticle entanglement in a practical quantum system. We further confirm our results by performing quantum state tomography on some quantum states in the adiabatic process. The experimentally reconstructed quantum states are close to the corresponding instantaneous ground states.

Keywords: quantum Fisher information, multiparticle entanglement, overlap of quantum states**PACS:** 03.65.-w, 03.67.Mn, 76.60.-k**DOI:** 10.7498/aps.72.20230356

* Project supported by the National Key R & D Program of China (Grant No. 2018 YFA0306600), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11927811, 1192780017), the Innovation Program for Quantum Science and Technology (Grant No. 2021 ZD0303205), and the Initiative in Quantum Information Technologies of Anhui Province, China (Grant No. AHY050000).

† Corresponding author. E-mail: xhpeng@ustc.edu.cn

基于量子Fisher信息测量的实验多体纠缠刻画

刘然 吴泽 李宇晨 陈昱全 彭新华

Experimentally characterizing multiparticle entanglement based on measuring quantum Fisher information

Liu Ran Wu Ze Li Yu-Chen Chen Yu-Quan Peng Xin-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 110305 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230356

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230356>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于量子Fisher信息的量子计量进展

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

物理学报. 2019, 68(4): 040601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子Fisher信息

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

物理学报. 2018, 67(14): 140304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180330>

基于量子Fisher信息的耗散相互作用光-物质耦合常数的估计

Estimation of light-matter coupling constant under dispersive interaction based on quantum Fisher information

物理学报. 2022, 71(9): 090601 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212029>

基于极化-空间模超纠缠的量子网络多跳纠缠交换方法研究

Multi-hop entanglement swapping in quantum networks based on polarization-space hyperentanglement

物理学报. 2022, 71(10): 100301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212173>

量子弱测量中纠缠对参数估计精度的影响

Influence of entanglement on precision of parameter estimation in quantum weak measurement

物理学报. 2021, 70(24): 240302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210796>

基于纠缠相干态的量子照明雷达

Quantum illumination radar with entangled coherent states

物理学报. 2021, 70(17): 170601 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210462>