

# 不对称双势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学

应耀俊 李海彬<sup>†</sup>

(浙江工业大学理学院, 杭州 310023)

(2023 年 3 月 20 日收到; 2023 年 5 月 9 日收到修改稿)

研究了玻色-爱因斯坦凝聚体在不对称双势阱中, 随着两势阱局域基态能量差和非线性相互作用的变化而表现出的动力学特性. 对双模理论的解析分析可以发现, 在无相互作用情况下, 当双势阱能量差比较大时, 凝聚体会主要聚集在初始分布较多的势阱中, 而和高低势阱的位置无关. 数值计算表明, 当相互作用存在且逐渐增大时, 凝聚体的分布呈现出不同的变化. 当初始分布聚集在一个势阱时, 会呈现出先加强聚集, 然后促进隧穿, 最后又重新导致聚集的现象. 同时, 通过对相图的分析, 利用等效势概念为这些现象的出现给出了合理的解释. 为了验证上述现象, 还对 Gross-Pitaevskii 方程进行了直接数值模拟, 结果和上述采用双模理论得到的结论一致.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, 不对称双势阱, 动力学**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Kk, 74.50.+r**DOI:** 10.7498/aps.72.20230419

## 1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 在碱金属原子气体中的实验验证<sup>[1-3]</sup>为物理学各个领域的研究提供了理想的平台, 其中在宏观尺度观察量子现象就是重要的一个方面. 实验中, 两个自由膨胀的 BEC 自由演化可以实现物质波的干涉现象<sup>[4]</sup>, 体现出宏观量子相干特性. 这一点也可以在双势阱中凝聚体的约瑟夫森 (Josephson) 效应中得到显现. 理论研究 BEC 的相干特性需要从多体玻色系统的薛定谔方程出发. 由于相互作用的存在, 往往利用平均场的理论进行研究, 由此便得到了 Gross-Pitaevskii (GP) 方程<sup>[5,6]</sup>. 通常, GP 方程描述了绝对零度下囚禁于外势中凝聚体的动力学. 然而, 由于非线性项的存在, 很难求得 GP 方程的精确解. 在微小振荡的情况下, 集体激发可以用基于 GP 方程的 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程<sup>[7,8]</sup>或流体力学方法进行求解.

Josephson 效应是在超导电路中发现的一个宏观量子现象<sup>[9]</sup>, 反映了电子对的相干隧穿. 约束于双势阱中的 BEC 也显示出同样的特征, 从而构成了玻色约瑟夫森结<sup>[10-12]</sup>. 由于双势阱的特点, 此类系统可以用双模理论来描述, 其中两个模式可以选择为左右势阱的局域基态. 关于对称双势阱下 BEC 研究给出了玻色 Josephson 效应的理论解释, 同时发现了一种宏观量子自陷 (self-trap) 效应<sup>[10-12]</sup>. 实验研究也对理论结果给出了很好的验证<sup>[13,14]</sup>. 之后, 关于玻色系统 Josephson 效应的研究在理论<sup>[15-34]</sup>和实验<sup>[35-37]</sup>两方面都有很多成果. 双模理论的局限性和适用性经过了仔细的探讨和调查<sup>[17-21]</sup>. 隧穿和自陷现象的本质在量子纠缠的框架内得到解释<sup>[22]</sup>. 凝聚体原子相互作用为吸引相互作用的情况下, 同样可以产生约瑟夫森隧穿和自陷现象<sup>[23]</sup>. 而存在自旋耦合作用的玻色凝聚体在双势阱的动力学, 包括自陷现象也得到研究<sup>[24-26]</sup>. 另外, 存在偶极-偶极相互作用的玻色凝聚体在双势阱的动力学也得到了研究<sup>[32,33]</sup>.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: hbli@zjut.edu.cn

双模理论不仅可以适用于对称双势阱,也可以描述不对称势阱下 BEC 的动力学<sup>[38-43]</sup>,并且同样可以观察到 Josephson 效应和宏观量子自陷现象.由于不对称性会导致两个势阱局域基态的能量不同,从而引起凝聚体动力学性质的改变,应该出现比对称双势阱下 BEC 更为丰富的现象.但是,关于不对称双势阱中凝聚态动力学的研究还没有达到对称情况的充分程度.本文以双模理论为主,结合数值模拟,对这一问题开展研究.发现即使在不考虑相互作用的情况,两势阱的能量差也会导致凝聚体的集中分布,而且这个现象和两势阱能量高低的设置无关,只和初始条件有关.更重要的是,非线性相互作用的改变也会导致动力学呈现出复杂的变化,既可以通过加强凝聚体的隧穿而促进 BEC 在不对称势阱的分布对称性,又可以增强凝聚体的聚集和自陷效应.

## 2 双模理论

根据平均场理论,描述 BEC 在零温动力学的 GP 方程是

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, t) + [V(r) + g|\psi(r, t)|^2] \psi(r, t), \quad (1)$$

其中  $\psi(r, t)$  是凝聚体的波函数,  $V(r)$  是外部势阱,  $m$  是原子的质量,  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  为相互作用常数,  $a$  为原子的  $s$  波散射长度,  $\hbar$  为约化普朗克常数,  $r$  为位移,  $t$  为时间,  $i$  为虚数单位. 如果  $V(r)$  是双势阱外势,则可以假设:

$$\psi(r, t) = a_1(t) \phi_1(r) + a_2(t) \phi_2(r), \quad (2)$$

其中  $\phi_1(r)$ ,  $\phi_2(r)$  是左右势阱的局域基态,满足正交归一条件:

$$\int \phi_1(r) \phi_2(r) dr = 0, \quad \int |\phi_i(r)|^2 dr = 1, \quad i=1, 2,$$

$$a_1 = \sqrt{N_1} e^{i\theta_1(t)}, \quad a_2 = \sqrt{N_2} e^{i\theta_2(t)}.$$

这里,  $N_1$  和  $N_2$  是左右势阱中的粒子数,  $\theta_1(t)$  和  $\theta_2(t)$  是左右势阱中凝聚体的相位.

把函数 (2) 式代入方程 (1) 可得

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_1(t) = (E_1^0 + U_1 N_1) a_1(t) - K a_2(t), \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_2(t) = (E_2^0 + U_2 N_2) a_2(t) - K a_1(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中,不同势阱中的单粒子基态能,凝聚体相互作用能和在两个势阱之间的耦合强度分别为

$$E_i^0 = \int \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi_i(r)|^2 + \phi_i^2 V dr,$$

$$U_i = g \int \phi_i^4 dr,$$

$$K = - \int \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \phi_1(r) \nabla \phi_2(r)] + \phi_1 V \phi_2 dr \right\}.$$

令  $2Kt \rightarrow t$ , 假设粒子数差  $z = \frac{N_1 - N_2}{N}$ ,  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ , 代入 (3) 式得到:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\sqrt{1-z^2} \sin(\theta), \\ \dot{\theta} = \lambda z + \gamma + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\theta), \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\lambda = \frac{(U_1 + U_2)N}{4K},$$

$$\gamma = \frac{E_1^0 - E_2^0}{2K} + \frac{(U_1 - U_2)N}{4K}.$$

这里,  $\lambda$  表示相互作用强度;  $\gamma$  表示左右两边势阱的基态能量差和相互作用能之差,考虑近似  $U_1 = U_2$ , 则其代表两个势阱的基态能量差. 由方程 (4) 可以得到系统哈密顿量:

$$H = \frac{\lambda z^2}{2} + \gamma z - \sqrt{1-z^2} \cos(\theta). \quad (5)$$

以初始相对相位  $\theta(0) = 0$  为例,来介绍研究所得到的结果. 首先,考虑没有相互作用的情况,即  $\lambda = 0$ , 此时方程 (3) 可以解析求解,结果如下:

$$\begin{cases} |a_1(t)|^2 = a_1(0)^2 + \frac{[a_2(0)^2 - a_1(0)^2] - 2a_1(0)a_2(0)\gamma}{(\gamma^2 + 1)} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{4K^2(\gamma^2 + 1)}}{2} t \right), \\ |a_2(t)|^2 = a_2(0)^2 - \frac{[a_2(0)^2 - a_1(0)^2] - 2a_1(0)a_2(0)\gamma}{(\gamma^2 + 1)} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{4K^2(\gamma^2 + 1)}}{2} t \right), \end{cases} \quad (6)$$

其中  $a_1(0)$  和  $a_2(0)$  是初始值.  $|a_1(t)|^2$  和  $|a_2(t)|^2$  的振荡频率为  $2\sqrt{\gamma^2 + K^2}$ . 粒子数差的表达式为

$$z(t) = |a_1(t)|^2 - |a_2(t)|^2 = \bar{z}(t) + A \cos(\omega t), \quad (7)$$

$$\bar{z}(t) = z(0) + A,$$

其中,  $\omega$  为振荡频率,  $A$  为振荡幅度. 若令  $K = 1$ , 则

$$\gamma = (E_1^0 - E_2^0)/2, \quad \omega = 2\sqrt{\gamma^2 + 1},$$

$$A = \frac{-\gamma\sqrt{1 - z(0)^2} - z(0)}{\gamma^2 + 1}.$$

分析振荡幅度  $A$  发现, 当  $\gamma = -z(0)/\sqrt{1 - z(0)^2}$  时,  $A = 0$ , 这个时候凝聚体达到不对称势阱的平衡态, 不发生振荡.

图 1 给出了方程 (7) 的图像, 除了平衡点, 不管能量差是多少, 都会引起凝聚体在两个势阱之间的隧穿和振荡, 但在能量差变化过程中, 呈现出丰富的现象. 由于初始值设定是左侧势阱中粒子占据数较多, 当左侧能级低于右侧能级且值比较大, 如  $\gamma = -5$ , 占据数差的振荡幅度较小, 其平均值也大于初始值, 这意味着在演化过程中, 大部分凝聚粒子都停留在左侧势阱, 只有部分粒子在两个势阱之间隧穿. 这一点类似于对称双势阱由于相互作用所导致的自陷现象<sup>[10-12]</sup>, 但是由于不对称外势造成, 称为聚集现象. 当能量差绝对值逐渐减小, 如图 1(b)–(e) 所示, 振幅存在先增长、后减小, 然后

再增加的转变. 但大部分情况下, 凝聚体都聚集在能级低的左侧势阱, 只有当能量差接近于零, 才会有更多的粒子隧穿到右侧势阱. 当势阱能量差为零 (见图 1(e)), 凝聚体实现对称振荡. 而当势阱能量差变为正数而数值较小, 即左侧势阱能级略高于右侧后, 粒子向右侧势阱隧穿的趋势增强, 甚至可以实现完全隧穿 (见图 1(f)). 但是当能量差进一步增加, 出现了新奇的现象, 即凝聚体振荡振幅逐渐减小, 并且重新向左侧倾斜, 最终又在左侧势阱聚集. 这说明聚集的出现主要由初始条件决定, 而和势阱高低的位置设定无关.

在图 2 中, 振幅变化以能量差的函数形式得到描画, 可以看到和在图 1 中的观察一致. 根据初始条件可分为两个区域, (I) 是聚集区, (II) 是隧穿区. 振幅经历了增加→减小→增加→减小的过程. 值得注意的是在振幅减小再增加过程中, 其中转变点为一个稳定点, 即振荡幅度为零.

### 3 相互作用下 BEC 的动力学性质

#### 3.1 不对称双势阱下非线性项对凝聚体动力学的影响

实验中凝聚体原子之间的相互作用不可忽略, 但是此时方程 (4) 很难得到解析解. 通过数值计算, 分别得到了不同  $\gamma$  值下占据数差的振幅随着能量

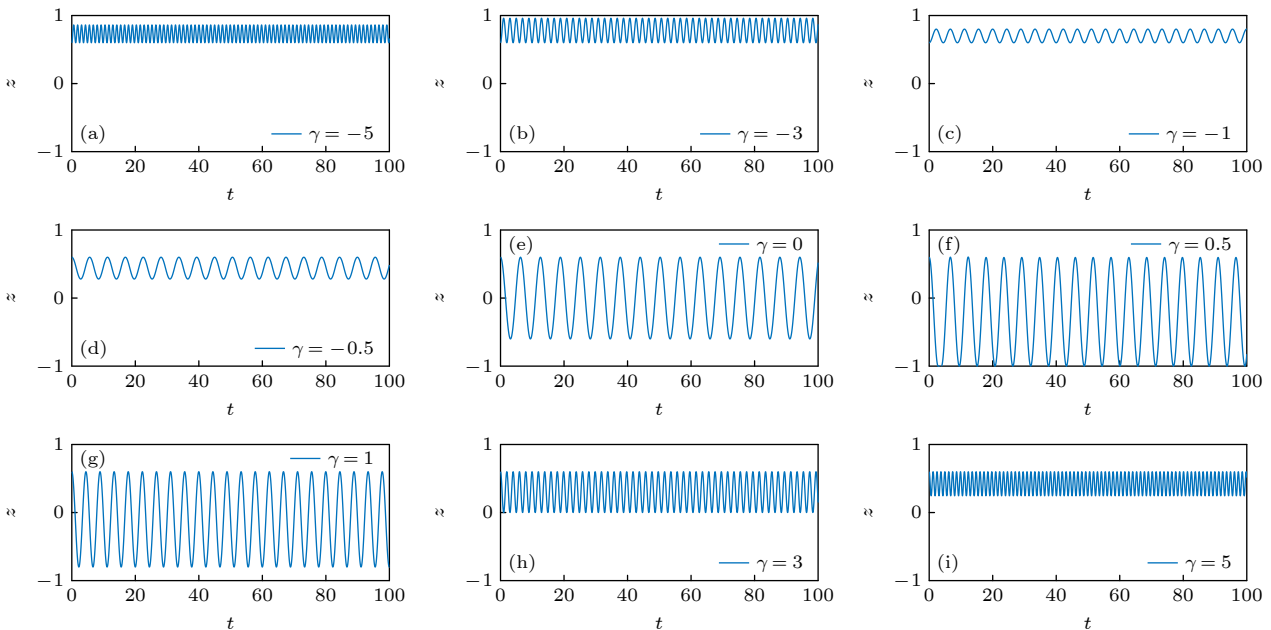


图 1  $z(0) = 0.6$  时, 无相互作用下当  $\gamma$  变化时占据数差随时间的演化

Fig. 1. Population imbalance versus time at different  $\gamma$  without interactions at  $z(0) = 0.6$ .

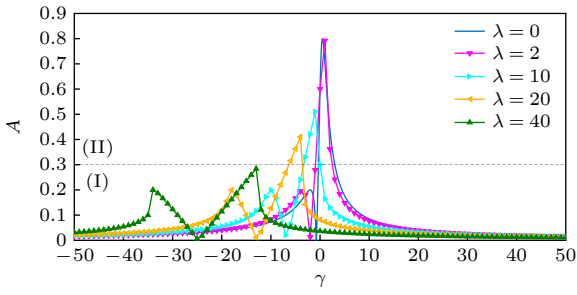


图 2  $z(0) = 0.6$  时, 当非线性相互作用取不同值时, 振幅对能量差的依赖关系

Fig. 2. Amplitude versus energy difference when the nonlinear interaction parameter is different at  $z(0) = 0.6$ .

差变化而发生的改变, 并将其和无相互作用情况一起呈现在图 2 中. 可以看到, 虽然相互作用的引入使振荡具有约瑟夫森振荡的特征<sup>[10-12]</sup>, 但相互作用的引入没有改变上述各个转变的基本趋势. 随着相互作用的增加, 振幅同样经历了增加→减少→增加→减少的过程, 但是变化出现的能量差范围逐渐增大, 且向能量差负值区域偏移. 更为重要的是, 当相互作用足够大时, 如  $\lambda = 40$ , 虽然振幅依然经历了上述过程, 但是凝聚体始终处于聚集状态. 另外, 也考虑和计算了初始值  $z(0)$  取不同值的情况下, 当两势阱能量差发生变化时, 占据数差随时间的振动动力学变化. 结果表明, 在上述初值为  $z(0) = 0.6$  情况下, 观察到的现象也都出现在取其他初值

的计算中, 占据数差的振幅依然经历先增加、减少、再增加、最后再减少的变化过程.

同时, 为了进一步判定相互作用的影响, 计算了在给定能量差, 且初态为  $z(0) = 0.6$  的情况下, 改变非线性相互作用  $\lambda$  所导致的占据数差随时间的演化, 如图 3 所示. 当  $\lambda = 0$ , 出现聚集现象. 当  $\lambda$  逐渐增加, 振幅同样经历了增加→减小→增加→减小的过程. 在第一个增加过程中, 振动的平均值也增大了, 这就意味着相互作用增强了聚集, 如同对称势阱中所发挥的作用, 因此, 此时动力学也包含自陷成分. 但是在之后的振幅减小过程和增加过程中, 平均值逐渐靠近零值, 表明相互作用破坏了聚集效应, 起到了将不对称双势阱向对称性势阱转变的作用, 导致左侧势阱中的粒子更多向右侧隧穿. 并且在  $\lambda$  取一定值的时候, 在部分时段实现粒子数分布的反转, 即大部分粒子占据了右侧势阱, 但是和能量差不同的是, 发生反转的时间区段在振荡周期中所占较小. 换句话说, 非线性作用不能使势阱的不对称性完全消除. 事实上, 当  $\lambda$  继续增大时, 这种消除效应随之消失, 聚集效应再次出现, 并在  $\lambda$  变得更大时得到加强.

图 4 给出了不同能量差情况下, 占据数差随时间振动的振幅和相互作用的关系, 其总体变化趋势和能量差的影响类似, 而且也存在一个特定的值

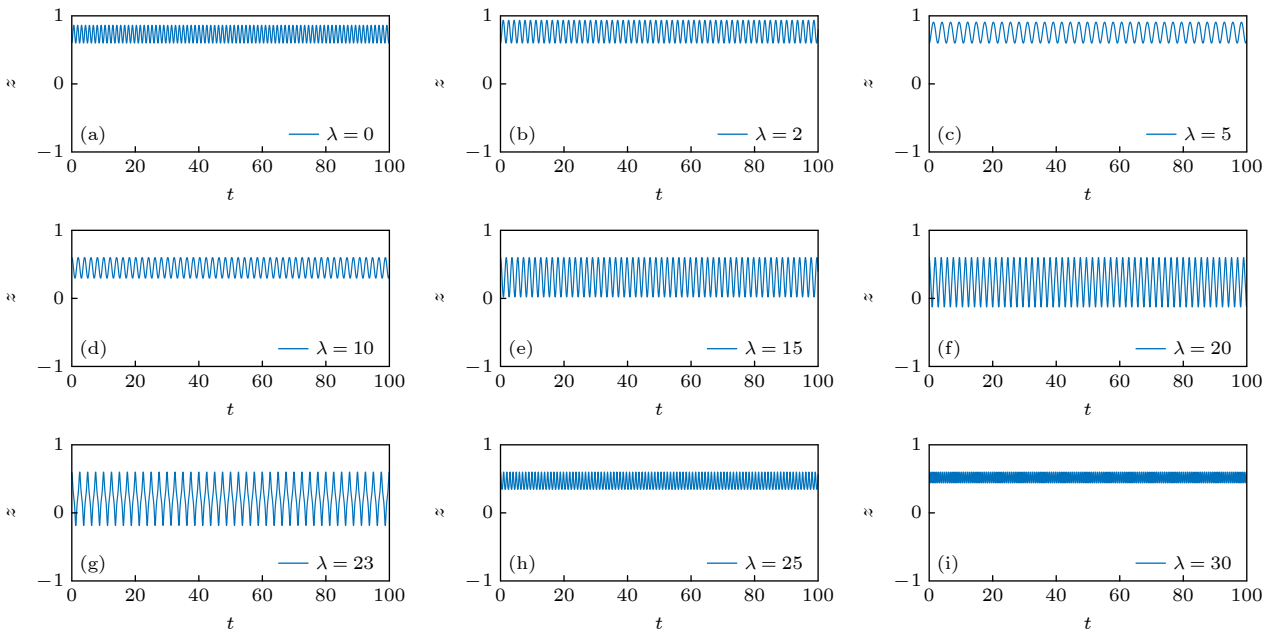


图 3  $z(0) = 0.6, \gamma = -5$ , 当  $\lambda$  变化时, 占据数差随时间的演化

Fig. 3. Population imbalance versus time at different  $\lambda$  at  $z(0) = 0.6, \gamma = -5$ .

(如 $\gamma = -5$ 时,  $\lambda = 7$ )使得系统处于平衡点, 和图2中存在特定值(无相互作用下 $\gamma = -0.75$ )一样. 另外, 还存在特定值(如 $\gamma = -5$ 时,  $\lambda = 23.59$ ), 系统发生明显的跃变, 这个时候凝聚体从约瑟夫森振荡突然转变为聚集, 这和由能量差所导致的连续变化存在较大的不同. 值得注意的是, 当能量差足够大时, 如 $\gamma = -15$ , 则不论相互作用取多大, 凝聚体都处于聚集状态. 此外, 随着初始能量差 $\gamma$ 的改变, 尽管动力学总体变化趋势不发生改变, 但是凝聚体经历的阶段会发生变化. 如图4所示, 当 $\gamma = -2$ , 占据数振荡振幅经历的过程为先减小, 再增加, 最后减少, 第一阶段的增加过程消失了. 随着势阱能量差的大小进一步减小, 凝聚体所经历的动力学过程也变得更少. 当 $\gamma = 0$ , 即势阱为对称势阱的, 占据数振幅只经历一个变化, 由常数跃变而减小, 符合之前的研究<sup>[11,12]</sup>. 另外还需要指出的是, 两势阱能量差是从负值变化到正值, 而相互作用只在大于零

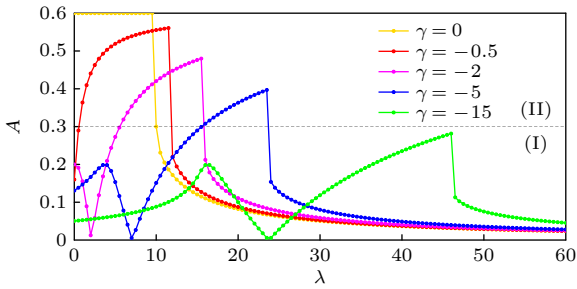


图4  $z(0) = 0.6$ , 势阱能量差取不同值时, 振幅随 $\lambda$ 的变化  
Fig. 4. Amplitude versus  $\lambda$  when energy difference is different at  $z(0) = 0.6$ .

的范围内变化.

### 3.2 相图

为了对上述结果进行理解, 可以从方程(4)的相图出发进行分析. 图5给出了在相同的初始条件下, 当能量差 $\gamma$ 和相互作用 $\lambda$ 分别变化所导致的结果. 由图5(a)中可以明显观察到, 随着能量差增加, 动力学从A变化到J的4个阶段. 第一阶段, 当能量差为负且绝对值较大时, 粒子数差平均值大于初始值, 这意味着聚集的出现. 而且随着能量差的增加, 从 $A \rightarrow B$ , 平均值继续靠近1, 聚集得到加强. 第二阶段, 从曲线 $C \rightarrow D$ , 占据数差振幅减少, 平均值靠近初始值. 第三阶段,  $E \rightarrow G$ , 平均值变为小于初值, 同时振幅增加, 这说明隧穿得到增强. 其中在曲线F, 左右两边势阱凝聚粒子隧穿相同, 平均值 $\langle z(t) \rangle = 0$ , 之后 $\langle z(t) \rangle$ 变为负值, 表明右势阱占据更多. 第四阶段,  $H \rightarrow J$ , 当能量差再增加, 振幅再次减小, 同时平均值又跨过平衡点回到左侧, 就意味着更多的粒子留在左侧势阱而产生了聚集.

图5(b)为不同 $\lambda$ 的能量轨迹, 同样可以看到和上述情况类似的4个阶段, 但是动力学图像和轨迹特征有所不同. 第三阶段到第四阶段的过渡也很不相同, 图5(a)中粒子几乎全部隧穿到右势阱, 但在图5(b)中, 主要还是聚集在左势阱, 说明了相互作用在此时虽然导致了隧穿的增强, 但是也受到了自陷机制的影响. 另一个不同的是, 前者的第四阶段是在高能量势阱形成聚集, 而后者依然是在低能量势阱形成聚集.

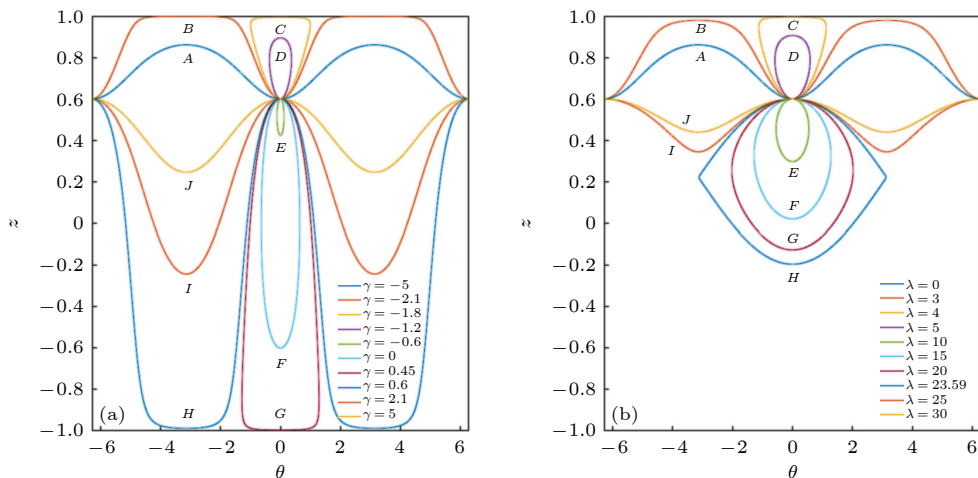


图5  $z(0) = 0.6$ , 相空间中的等能量线  
Fig. 5. Constant energy line in phase-space at  $z(0) = 0.6$ .

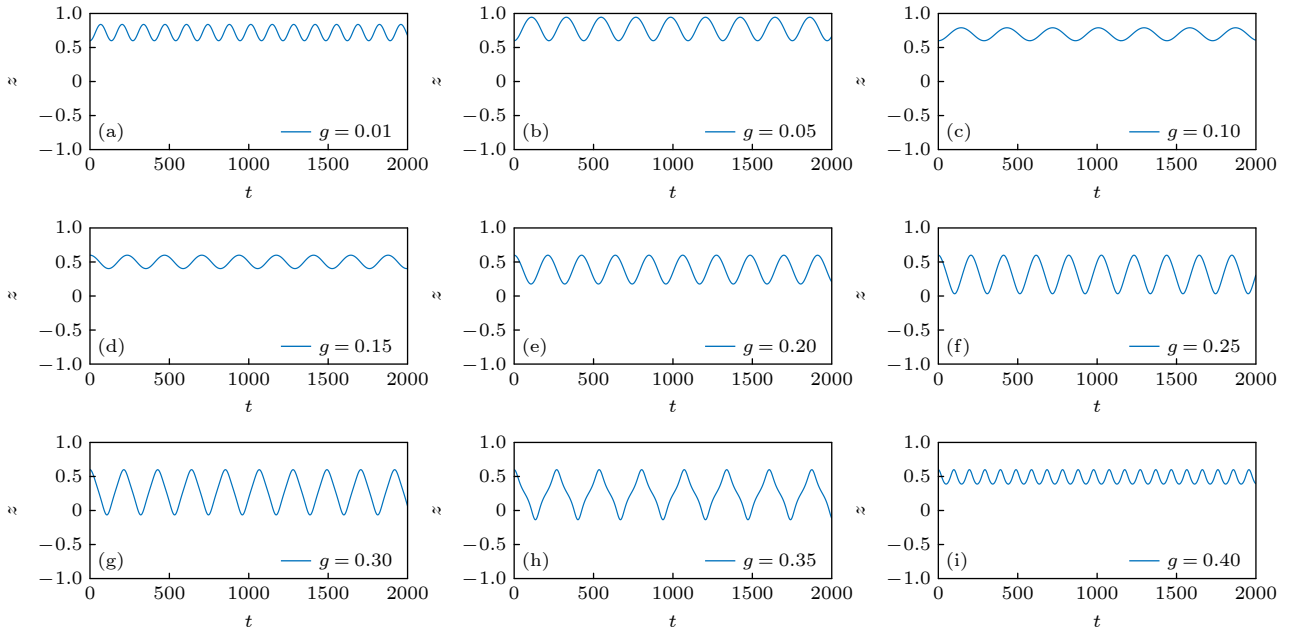

 图 6  $\beta = 20$ ,  $z(0) = 0.6$ , 不同  $g$  条件下粒子占据数差随时间的变化

 Fig. 6. Population imbalance versus time at different  $g$ ,  $\beta = 20$  and  $z(0) = 0.6$ .

结合第 2 节和第 3.1 节的结论, 发现在非对称双势阱中, 非线性相互作用所起到的作用类似于能量差, 事实上, 这也可以从方程 (1) 看出. 这意味着可以将  $g|\psi(r, t)|^2$  看作有效势<sup>[19]</sup>. 当相互作用增加, 有效势也随之增加, 但是由于两个势阱中凝聚体分布不均匀, 形成大小不同的有效势, 从而改变了原来两个势阱的能量差. 因此, 所导致的动力学就表现出与纯粹由两个势阱能量差改变引起的动力学相同的特征, 但是也存在明显的不同. 首先, 由于有效势是时间依赖的, 因此所导致的能量差也会产生变化, 从而引起不同的动力学. 其次, 由于等效势具有非线性特征, 因此会产生突变, 所以也导致了图 4 中跃变的产生.

#### 4 数值模拟

下面对外势为不对称双阱的一维 GP 方程进行数值模拟. 其中, 在对称双势阱下施加微扰 ( $V' = 0.001\beta x$ ), 对称双势阱为

$$V = \frac{1}{2}x^2 + 50e^{-\frac{2x^2}{0.09}},$$

后者使势阱变为不对称的双势阱. 图 6 给出了在当  $\beta = 20$ , 初始粒子数占据数差为  $z(0) = 0.6$  情况下, 当非线性相互作用逐渐增加时, 占据数差随着时间演化的图像.

如图 6 所示, 在模拟结果中, 同样也可以看到符合图 3 的振荡变化, 振幅先增加, 后减小, 然后再增加, 最后再减小. 另外, 在势阱能量差和占据数初始值取了更多不同值的情况下, 计算了相互作用改变导致的动力学变化, 也得到了和图 2 相同的结果. 这说明, 本文基于双模理论而进行的研究能够在较大的参数范围内准确描述不对称双势阱中 BEC 的动力学基本特性.

#### 5 结论

本文研究了 BEC 在不对称势阱中的动力学性质. 在双模理论的框架内, 首先通过解析研究, 证明在无相互作用时, 两个势阱不对称性导致的能量差的变化就可以使动力学发生显著变化, 从促进凝聚体聚集到促进量子相干隧穿, 再到促进凝聚体聚集, 而聚集的出现并不依赖高低势阱的位置, 但与凝聚体的初始分布有关. 更进一步, 通过数值计算, 发现非线性相互作用的增加也导致了凝聚体产生了类似的动力学变化. 换言之, 相互作用可以促进聚集, 也可以加强隧穿, 起到调整势阱对称性的作用, 但是不能达到使势阱对称的结果, 调整的程度也和两势阱能量差有关. 相比凝聚体非线性相互作用在对称双势阱只导致了自陷的产生, 在不对称双势阱中相互作用导致的现象更加富有变化. 通过将

相互作用项视为有效势, 并对比两势阱能量差对动力学的的作用可以对上述现象进行分析和解释. 同时也说明有效势这一思路可以在研究相互作用对凝聚体动力学的影响方面提供新的研究角度. 最后, 对 GP 方程所进行的数值模拟也在较大的参数范围内给出了和双模理论研究一致的结果.

超导约瑟夫森结在高灵敏磁测量、量子比特实现等方面已显示出重要的地位. 因此, 可以设想玻色约瑟夫森结也可在量子精密测量等方面存在应用的前景. 本文通过改变外势、相互作用等参数调控玻色约瑟夫森结动力学, 为这一可能的应用提供了一定的理论支撑.

## 参考文献

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, Vandruten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [4] Andrews M R, Townsend C G, Miesner H J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1997 *Science* **275** 637
- [5] Gross E P 1961 *Il Nuovo Cimento* **20** 454
- [6] Pitaevskii L P 1961 *Sov. Phys. JETP* **13** 451
- [7] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [8] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [9] Josephson B D 1962 *Phys. Lett.* **1** 251
- [10] Milburn G J, Corney J, Wright E M, Walls D F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
- [11] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [12] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [13] Cataliotti F S, Burger S, Fort C, Maddaloni P, Minardi F, Trombettoni A, Smerzi A, Inguscio M 2001 *Science* **293** 843
- [14] Albiez M, Gati R, Fölling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [15] Giovanazzi S, Smerzi A, Fantoni S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4521
- [16] Zhang Y B, Muller-Kirsten H J W 2001 *Phys. Rev. A* **64** 023608
- [17] Ananikian D, Bergeman T 2006 *Phys. Rev. A* **73** 013604
- [18] Giovanazzi S, Esteve J, Oberthaler M K 2008 *New J. Phys.* **10** 045009
- [19] Julia-Diaz B, Martorell J, Mele-Messeguer M, Polls A 2010 *Phys. Rev. A* **82** 063626
- [20] Jezek D M, Capuzzi P, Cataldo H M 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053625
- [21] Burchianti A, Fort C, Modugno M 2017 *Phys. Rev. A* **95** 023627
- [22] Fu L, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 063614
- [23] Spagnolli G, Semeghini G, Masi L, Ferioli G, Trenkwalder A, Coop S, Landini M, Pezze L, Modugno G, Inguscio M, Smerzi A, Fattori M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 230403
- [24] Zhang D W, Fu L B, Wang Z D, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043609
- [25] Wang W Y, Dou F Q, Duan W S 2018 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **51** 035002
- [26] Hou J, Luo X W, Sun K, Bersano T, Gokhroo V, Mossman S, Engels P, Zhang C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 120401
- [27] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳, 傅立斌, 赵鸿, 刘杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [28] Liu Z Z, Yang Z A 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1245 (in Chinese) [刘泽专, 杨志安 2007 物理学报 **56** 1245]
- [29] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [30] Huang F, Li H B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020303 (in Chinese) [黄芳, 李海彬 2011 物理学报 **60** 020303]
- [31] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [32] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]
- [33] Li J P, Tan L, Zang X F, Yang K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7467 (in Chinese) [李菊萍, 谭磊, 臧小飞, 杨科 2008 物理学报 **57** 7467]
- [34] Zhang H, Duan W S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160303 (in Chinese) [张恒, 段文山 2013 物理学报 **62** 160303]
- [35] Levy S, Lahoud E, Shomroni I, Steinhauer J 2007 *Nature* **449** 579
- [36] LeBlanc L J, Bardou A B, McKeever J, Extavour M H T, Jervis D, Thywissen J H, Piazza F, Smerzi A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 025302
- [37] Trenkwalder A, Spagnolli G, Semeghini G, Coop S, Landini M, Castilho P, Pezze L, Modugno G, Inguscio M, Smerzi A, Fattori M 2016 *Nat. Phys.* **12** 826
- [38] Xiao Y F, Wang D L, Wang F J, Yan X H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 547 (in Chinese) [肖宇飞, 王登龙, 王凤姣, 颜晓红 2006 物理学报 **55** 547]
- [39] Julia-Diaz B, Martorell J, Polls A 2010 *Phys. Rev. A* **81** 063625
- [40] Humm S, Zimmermann K, Hiller M, Buchleitner A 2013 *Phys. Rev. A* **87** 043626
- [41] Cataldo H M, Jezek D M 2014 *Phys. Rev. A* **90** 043610
- [42] Cosme J G, Andersen M F, Brand J 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013616
- [43] Haldar S K, Alon O E 2019 *New J. Phys.* **21** 103037

# Dynamics of Bose-Einstein condensation in an asymmetric double-well potential

Ying Yao-Jun    Li Hai-Bin<sup>†</sup>

(*College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China*)

( Received 20 March 2023; revised manuscript received 9 May 2023 )

## Abstract

Josephson effect of Bose-Einstein condensate in double-well potential is an obvious manifestation of macroscopic quantum coherence. Most of researches focus on the symmetric double-well potential. In this work, we investigate the dynamic of Bose-Einstein condensates in an asymmetric double-well potential by using two-mode theory and computer simulation. In the absence of the interaction between atoms, the dynamic equation of condensate can be solved analytically. The amplitude as a function of energy difference of two wells is obtained. We can find that the change of energy difference will lead to the different dynamic behaviors of condensate. If the energy difference is relatively large, the condensate will primarily occupy the well that is occupied more than the other well at the beginning time. It is interesting that such a trap phenomenon is not dependent on the position of the high energy potential well nor the position of low energy potential well. If the energy difference becomes small, the tunneling and oscillation of condensate will be enhanced. When the interaction between atoms is present, our numerical calculations show that as the nonlinear interaction increases, the dynamic behavior of condensate exhibits different characteristics, such as trapping in a well, enhancing the tunneling and oscillation between two wells, and enhancing the trapping in a well at large nonlinear interaction, which is similar to the dynamic change caused by the energy difference in the case of ideal condensate. That is to say, on the one hand, the nonlinear interaction can lead to the trap of condensate as well as the dynamic trap to happen in symmetric double-well potential. On the other hand, the nonlinearity can promote the tunneling of condensate, counteracting the effect of the asymmetry of potential. And, this counteracting effect is related to the difference in energy between asymmetric potential wells. To understand the underlying mechanism, the full dynamic behavior of two-mode model is illustrated and the dynamic transition can be seen clearly. Combining the results obtained with and without interaction, regarding nonlinear interaction as effective potential provides a clear way to explain dynamic transition of condensate in an asymmetric double-well potential. In addition, we also perform the numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equation, and the results are consistent with the conclusions obtained by using the two-mode theory.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, asymmetric double-well potential, dynamics

**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Kk, 74.50.+r

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230419

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [hbli@zjut.edu.cn](mailto:hbli@zjut.edu.cn)





## 不对称双势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学

应耀俊 李海彬

### Dynamics of Bose-Einstein condensation in an asymmetric double-well potential

Ying Yao-Jun Li Hai-Bin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 130303 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230419

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230419>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191424>

#### 线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

#### 可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2022, 71(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

#### 玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬灭孤子与冲击波

Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2021, 70(18): 180303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210564>

#### 环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

#### 碟形玻色-爱因斯坦凝聚体中(0, 0, 2)剪刀模的朗道阻尼和频移

Landau damping and frequency-shift of (0, 0, 2) scissors mode in a disc-shaped Bose-Einstein condensate

物理学报. 2019, 68(23): 230304 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190661>