

## 具有传质传热及扩散效应的双气泡的相互作用\*

乌日乐格 那仁满都拉†

(内蒙古民族大学数理学院, 通辽 028043)

(2023年5月25日收到; 2023年7月17日收到修改稿)

利用修正的 Keller-Miksis 方程与 Noble-Abel-Stiffend-Gas 状态方程相结合的模型, 研究了超声作用下具有传质传热及扩散效应的双气泡间的相互作用, 并与 Mettin 等 [Mettin R, Akhatov I, Parlitz U, Ohl C D, Lauterborn W 1997 *Phys. Rev. E* 56 2924] 给出的没有传质传热及扩散效应的双气泡间的相互作用进行了比较. 结果表明, 具有传质传热及扩散效应的双气泡间的次 Bjerknes 力和气泡归一化最大半径都大于没有传质传热及扩散效应的双气泡的相应量. 随着其中一个气泡的初始半径的增大和驱动声压的增大, 两种情况给出的次 Bjerknes 力的差别逐渐增大, 而随着驱动频率的增大, 两种情况给出的次 Bjerknes 力的差别逐渐减小. 由此可见, 传质传热和扩散效应对空化气泡间相互作用的次 Bjerknes 力具有重要影响.

**关键词:** 空化双泡, 次 Bjerknes 力, 传质传热效应, 扩散效应

**PACS:** 47.55.dd, 47.55.dp, 43.25.+y, 44.20.+b

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230863

## 1 引言

在声空化研究中关于单气泡的研究相对比较深入, 许多研究者针对不同的侧面问题进行了研究. 如 Hilgenfeldt 等<sup>[1]</sup>用流体力学方法研究气泡形状稳定性和扩散稳定性, 给出了气泡声致发光相图. Yasui<sup>[2]</sup>在考虑水蒸气的非平衡蒸发和冷凝、气泡内外热传导及泡内化学反应的基础上, 研究了单泡声致发光机制. Toegel 和 Lohse<sup>[3]</sup>在考虑水蒸气相变、热传导及化学反应的情况下, 计算出了单泡声致发光相图. Shen 等<sup>[4]</sup>研究了空化气泡壁处液体温度的空间分布等. 但实际液体中的空化泡总是以泡群的形式存在<sup>[5-7]</sup>, 而空化双泡显然是研究空化泡群现象的一个重要的切入点, 所以许多学者开展了对空化双泡的研究. 当液体中的气泡受到声场作用时, 气泡会发生体积脉动, 气泡之间会发生相互吸引或排斥作用, 这与气泡之间的次 Bjerknes 力有关. Mettin 等<sup>[8]</sup>首先给出次 Bjerknes 力的计算表达式, 并数值研究了强声场作用下双气泡间的

次 Bjerknes 力的变化. Doinikov<sup>[9]</sup>提出一种能够直接计算两个相互作用的球形气泡在强声场中平移运动的模型, 研究了两个气泡平移运动的规律. Sadighi-Bonabi 等<sup>[10]</sup>研究不同浓度硫酸溶液对双泡相互作用力的影响, 并认为随着溶液黏度的增加次 Bjerknes 力减小. Zhang 等<sup>[11]</sup>重点分析了双频声激励下两个空化气泡间相互作用的次 Bjerknes 力. Pandey<sup>[12]</sup>考虑双泡间的强非线性耦合后对相互作用项进行高阶修正, 并通过研究指出高阶修正项对近距离气泡间的次 Bjerknes 力有重要影响. Luo 和 Niu<sup>[13]</sup>通过激光和水下低压放电技术分别诱导两个空化泡, 并对不同时期诱导空泡坍塌时的喷射流和冲击波进行实验测量, 揭示了双泡坍塌形成的喷射流和冲击波的一些规律. Zhang 等<sup>[14]</sup>数值研究了声场中两个空化气泡的脉动和平移, 并指出气泡脉动使气泡发生平移, 不同的脉动导致不同的平移. 李想等<sup>[15]</sup>在 Rayleigh-Plesset 方程的基础上, 引入可压缩流体次 Bjerknes 辐射力, 建立了考虑管道轴向气泡分布的可压缩双气泡耦合动力学模型, 并分析了次 Bjerknes 辐射力对双气泡的线

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11462019) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: nrmdlbf@126.com

性和非线性动力学特征的影响. Shen 等<sup>[16]</sup> 研究气泡间的相互作用对气泡径向脉动的影响, 并给出气泡间的相互作用不仅可以降低或抑制气泡的膨胀比, 还可以增大气泡的膨胀比. Qin 等<sup>[17]</sup> 利用一种包括径向和平移运动的综合模型, 数值研究了黏弹性组织中两个相互作用空化泡在不同驱动条件下的非线性动力学和声辐射特性. Zhang 等<sup>[18]</sup> 数值考察了强声场中的大泡与小泡的平移运动和非球面振荡对次 Bjerknes 力的影响. 王德鑫和那仁满都拉<sup>[19]</sup> 研究了不同泡半径、不同泡间距、不同惰性气体对双泡声空化特性的影响. 王寻等<sup>[20]</sup> 用数值方法研究了方波驱动下双气泡的动力学行为. 以上研究都未涉及到同时考虑传质传热及扩散效应的空化双泡间相互作用的研究, 但对于球形空化泡群的研究中分别涉及到了质量传输、热量传递和化学反应等效效应<sup>[21-23]</sup>.

本文考虑空化双泡的传质传热及扩散效应, 利用修正的 Keller-Miksis 方程与 Noble-Abel-Stiffened-Gas 状态方程相结合的动力学模型, 在不同半径、不同驱动声压和不同驱动频率情况下, 研究声空化气泡的归一化最大半径和气泡间的次 Bjerknes 力的变化, 并与 Mettin 等<sup>[8]</sup> 给出的结果进行比较分析.

## 2 考虑传质传热及扩散效应的双泡模型

Yasui<sup>[21]</sup> 给出的修正的 Keller-Miksis (KM) 方程为

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}_i}{C_{1,i}} + \frac{\dot{m}_i}{C_{1,i}\rho_{1,i}}\right) R_i \ddot{R}_i \\ & + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}_i}{3C_{1,i}} + \frac{2\dot{m}_i}{3C_{1,i}\rho_{1,i}}\right) \dot{R}_i \\ & = \frac{1}{\rho_{1,\infty}} \left(1 + \frac{\dot{R}_i}{C_{1,i}}\right) (P_{1,i} - P_{s,i} - P_\infty) \\ & + \frac{\dot{m}_i R_i}{\rho_{1,i}} \left(1 - \frac{\dot{R}_i}{C_{1,i}} + \frac{\dot{m}_i}{C_{1,i}\rho_{1,i}}\right) \\ & + \frac{\dot{m}_i}{\rho_{1,i}} \left(\dot{R}_i + \frac{\dot{m}_i}{2\rho_{1,i}} + \frac{\dot{R}_i \dot{m}_i}{2C_{1,i}\rho_{1,i}}\right) \\ & + \frac{R_i}{C_{1,i}\rho_{1,\infty}} \dot{P}_{1,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^2 \frac{1}{d_{ij}} \left(2\dot{R}_j^2 R_j + R_j^2 \dot{R}_j\right), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,i} = P_{g,i} - \frac{2\sigma}{R_i} - \frac{4\mu}{R_i} \left(\dot{R}_i - \frac{\dot{m}_i}{\rho_{1,i}}\right) \\ - \dot{m}_i^2 \left(\frac{1}{\rho_{1,i}} - \frac{1}{\rho_{g,i}}\right), \quad i = 1, 2, \quad (2) \end{aligned}$$

式中, 小黑点表示对时间导数,  $R_i$  为第  $i$  个气泡的瞬时半径,  $\dot{m}_i$  为第  $i$  个气泡的单位时间单位面积上的蒸发和冷凝速率,  $C_{1,i}$  为第  $i$  个气泡壁处液体中的声速,  $\rho_{1,i}$  ( $\rho_{1,\infty}$ ) 为第  $i$  个气泡壁处液体 (无穷远处) 密度,  $\rho_{g,i}$  为第  $i$  个气泡内气体密度,  $P_{g,i}$  为第  $i$  个气泡内气体压力,  $P_{s,i} = -A \sin[2\pi f(t + R_i/C_{1,i})]$  为作用于第  $i$  个气泡的驱动声压,  $\sigma$  为表面张力,  $\mu$  为黏性系数,  $d_{ij}$  为两气泡间的间距, (1) 式的最后一项是相互作用项.

气泡内气体及周围液体的热力学状态, 采用 Métayer 和 Saurel<sup>[24]</sup> 给出的 Noble-Abel-Stiffened-Gas (NASG) 状态方程来描述:

$$P(v, T) = \frac{(\gamma - 1)C_V T}{v - b} - B, \quad (3)$$

式中,  $P$  为压力;  $\gamma$  为热容比;  $C_V$  为定容热容;  $T$  为温度;  $b$  为分子共体积;  $B$  为压力常数;  $v$  为比容, 与密度的关系为  $v = 1/\rho$ . 根据声速定义和状态方程 (3), 第  $i$  个气泡壁处液体中的声速  $C_{1,i}$  可表示为

$$C_{1,i} = \sqrt{\gamma_1 \frac{P_{1,i} + B_1}{\rho_{1,i}(1 - b_1 \rho_{1,i})}}, \quad (4)$$

通过状态方程 (3), 可得到第  $i$  个气泡壁处液体密度为

$$\rho_{1,i} = \frac{P_{1,i} + B_1}{(\gamma_1 - 1)C_{V,1}T_1 + b_1(P_{1,i} + B_1)}, \quad (5)$$

第  $i$  个气泡内气体和水蒸气的压力为

$$P_{g,n,i} = \frac{N_{n,i} M_{n,i} \Delta C_{n,i} T_{g,i}}{N_A V_i - \frac{N_{n,i}}{N_A} M_{n,i} b_{g,n}} - B_{g,n}, \quad (6)$$

式中,  $n = \text{Ar}, \text{H}_2\text{O}$  分别表示泡内氩气和水蒸气 (本文假设泡内含有氩气和水蒸气),  $N_{n,i}$  为第  $i$  个气泡内气体分子数,  $N_A$  是阿伏伽德罗常数,  $M_{n,i}$  为第  $i$  个气泡内气体摩尔质量,  $T_{g,i}$  为第  $i$  个气泡内气体温度,  $\Delta C_{n,i}$  为第  $i$  个气泡内气体的定压热容和定容热容之差, 定压热容和定容热容可用文献 [25] 给出的表达式计算.  $b_1$  和  $B_1$  分别为液体分子共体积和压力常数,  $b_{g,n}$  和  $B_{g,n}$  分别为气体分子共体积和压力常数. 对于氩气和水蒸气, 利用文献 [26, 27] 给出的公式, 计算出不同温度和压力下的

$b_{g,Ar}$  和  $b_{g,H_2O}$  值, 并做拟合处理后得到如下表达式:

$$b_{g,Ar} = (3.0866 \times 10^{-4}) e^{-\frac{T_{g,i}}{5556.63}} - (3.4851 \times 10^{-4}) e^{-\frac{T_{g,i}}{995.82}} + 5.6969 \times 10^{-4}, \quad (7)$$

$$b_{g,H_2O} = \frac{(6.7553 \times 10^{-4}) T_{g,i}^{1.62384}}{14387.6875 + T_{g,i}^{1.62384}}. \quad (8)$$

第  $i$  个空化气泡内单位时间单位面积上的蒸发和冷凝速率  $\dot{m}_i$ , 可由气体动力学理论导出的 Hertz-Knudsen 公式计算<sup>[28]</sup>:

$$\dot{m}_i = \alpha \bar{C}(T_s) \frac{\rho_{g,H_2O}^{\text{sat}} - \rho_{g,H_2O}(R_i)}{4}, \quad (9)$$

式中, 常数  $\alpha = 0.4$ ,  $\bar{C}(T_s)$  为分子平均速度,  $\rho_{g,H_2O}(R_i)$  为水蒸气密度, 饱和水蒸气密度  $\rho_{g,H_2O}^{\text{sat}} = 0.0173 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 因此, 水蒸气的蒸发和冷凝引起的分子数的变化可表示为

$$\frac{dN_{H_2O,i}}{dt} = 4\pi R_i^2 \dot{m}_i \frac{N_A}{M_{H_2O,i}}. \quad (10)$$

气体从第  $i$  个气泡内部扩散到周围液体所引起的气体分子数的变化, 可由 Epstein-Plesset 理论中所用的气体扩散方程来表示<sup>[29]</sup>:

$$\frac{dN_{Ar,i}}{dt} = -4\pi R_i^2 D_{Ar} \frac{c_s - c_\infty}{R_i}, \quad (11)$$

式中,  $D_{Ar}$  为氩气的扩散系数,  $c_s$  为气体的平衡浓度,  $c_\infty$  为气体的饱和浓度.

第  $i$  个气泡内外的热交换量由下式计算<sup>[28]</sup>:

$$\frac{dQ_i}{dt} = 4\pi R_i^2 \lambda \frac{T_0 - T_{g,i}}{l_{th}}, \quad (12)$$

$$l_{th} = \min \left( \sqrt{\frac{R_i \chi}{|\dot{R}_i|}}, \frac{R_i}{\pi} \right), \quad (13)$$

式中,  $l_{th}$  为热边界层厚度.  $\chi$  为边界层的热扩散率,  $\lambda$  为混合气体的热导率.

由于气泡的内能是温度和体积的函数<sup>[29]</sup>

$$dE = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV, \quad (14)$$

根据恒定体积下摩尔热容的定义, 下列关系成立:

$$\left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{N_{H_2O,i}}{N_A} C_{V,H_2O}(T) + \frac{N_{Ar,i}}{N_A} C_{V,Ar}(T), \quad (15)$$

对于 NASG 状态方程来讲, (14) 式中的第二项变为

$$\left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P_g}{\partial T} \right)_V - P_g = B_{g,n}, \quad (16)$$

把方程 (15) 和 (16) 代入 (14) 式并进行积分, 就可得到第  $i$  个气泡内气体温度的计算公式:

$$E_i = \frac{N_{H_2O,i}}{N_A} \int_0^{T_{g,i}} C_{V,H_2O}(T) dT + \frac{N_{Ar,i}}{N_A} \int_0^{T_{g,i}} C_{V,Ar}(T) dT + B_{g,n} V_i, \quad (17)$$

其中,  $E_i$  为第  $i$  个气泡内气体内能,  $C_{V,H_2O}(T)$  和  $C_{V,Ar}(T)$  分别为水蒸气和氩气的定容摩尔热容<sup>[25]</sup>. 因为泡内温度的计算需要内能的表达式, 根据热力学第一定律, 内能变化表示为

$$\frac{dE_i}{dt} = -P_{g,i} \frac{dV_i}{dt} + \frac{dN_{H_2O,i}}{dt} \frac{1}{N_A} \int_0^{T_{g,i}} C_{V,H_2O}(T) dT + \frac{dQ_i}{dt} + \frac{dN_{Ar,i}}{dt} \frac{1}{N_A} \int_0^{T_{g,i}} C_{V,Ar}(T) dT, \quad (18)$$

式中, 等式右端第一项表示第  $i$  个气泡内压力做功所引起的能量变化; 第二项表示第  $i$  个气泡周围液体的水分子蒸发成水蒸气和气泡内的水蒸气分子凝结到液体中所携带的能量变化; 第三项表示热传导引起的能量变化; 第四项表示第  $i$  个气泡内气体分子扩散所引起的能量变化.

两个球形空化气泡之间的次 Bjerknes 力为<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{F}_B = -\frac{\rho}{4\pi d^2} \langle \dot{V}_1 \dot{V}_2 \rangle \mathbf{e}_r, \quad (19)$$

式中,  $\langle \cdot \rangle$  为时间平均值,  $\dot{V}_1$  和  $\dot{V}_2$  为气泡 1 和气泡 2 的体积变化率. 另外, 为方便研究问题, 定义了一个新的物理量, 即次 Bjerknes 力系数, 表示为<sup>[8]</sup>

$$f_B = \frac{\rho}{4\pi} \langle \dot{V}_1 \dot{V}_2 \rangle, \quad (20)$$

式中,  $f_B$  的符号表明双泡间是吸引还是排斥. 当  $f_B > 0$  时, 说明双泡相互吸引; 当  $f_B < 0$  时, 说明双泡相互排斥.

另外, 为了与没有传质传热及扩散效应的双空化气泡间的相互作用比较, 本文利用 Mettin 等<sup>[8]</sup> 给出的双泡模型来计算没有传质传热及扩散效应的双气泡间相互作用的次 Bjerknes 力.

### 3 数值模拟

本文选择水为液体介质, 气泡内气体为氩气和水蒸气. 为了方便描述, 下面用模型 1 代表具有传质传热及扩散效应的 KM-NASG 双泡模型, 用模

型 2 代表 Mettin 等<sup>[8]</sup> 给出的没有传质传热及扩散效应的双泡模型. 主要对比分析两种模型给出的空化气泡的归一化最大半径以及气泡间的次 Bjerknes 力在一个声周期内的变化情况. 用两种模型计算时所用的相关参数见表 1 和表 2, 这些参数的选取可参考文献 [8, 28, 30].

表 1 模型 1 的相关物理参数  
Table 1. Related physical parameters of model 1.

参数	值	单位
液体密度 $\rho_0$	998	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
黏性系数 $\mu$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
表面张力 $\sigma$	0.0725	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
环境温度 $T_0$	300	K
液体热容比 $\gamma_l$	1.19	—
液体热容 $C_{V,l}$	3610	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
饱和蒸汽压 $P_v$	$2.3381 \times 10^3$	Pa
液体分子共体积 $b_l$	$6.7145 \times 10^{-4}$	$\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$
液体压力常数 $B_l$	$6.2239 \times 10^8$	Pa
气体压力常数 $B_g$	0	Pa
气体摩尔质量 $M_{\text{H}_2\text{O}}$	0.018	$\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$
气体摩尔质量 $M_{\text{Ar}}$	0.04	$\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$
阿伏伽德罗常数 $N_A$	$6.023 \times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
玻尔兹曼常数 $k_B$	$1.38 \times 10^{-23}$	$\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
环境压力 $P_0$	$10^5$	Pa
气泡间距 $d_{ij}$	$10^{-3}$	m

### 3.1 总分子数的变化

为了解释说明有传质传热和扩散效应的双气泡间的相互作用与没有传质传热和扩散效应的双

气泡间的相互作用的差别, 首先需要计算气泡内气体总分子数  $N_T$  随气泡半径、驱动声压和驱动频率的变化. 由于空化气泡内的气体分子数量与蒸发和冷凝以及扩散等两种效应有关, 所以本文把两种效应都考虑后的泡内含有的气体分子数量称为总分子数. 另外, 气泡内气体总分子数是随着气泡的膨胀、收缩崩溃与回弹阶段而不断变化<sup>[31]</sup>, 这里计算的是最大总分子数  $N_{T,\text{max}}$ , 即气泡膨胀到最大半径时气泡内所含有的总分子数.

表 2 模型 2 的相关物理参数  
Table 2. Related physical parameters of model 2.

参数	值	单位
液体密度 $\rho_0$	998	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
黏性系数 $\mu$	0.001	$\text{Pa}\cdot\text{s}$
表面张力 $\sigma$	0.0725	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
环境压力 $P_0$	$1 \times 10^5$	Pa
气体热容比 $\gamma_g$	1.67	—
液体中的声速 $C_l$	1500	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
气泡间距 $d_{ij}$	$1 \times 10^{-3}$	m

图 1 给出了用模型 1 绘制的空化泡内气体最大总分子数  $N_{T,\text{max}}$  随初始半径、驱动声压及驱动频率的变化, 并与模型 2 的结果进行了比较. 图 1(a) 表明, 在  $R_{20}$  恒定时, 随着  $R_{10}$  的增大, 模型 1 给出的泡内气体最大总分子数快速增大, 也就是泡内气体含量快速增多. 这是由于当  $R_{10}$  增大时, 气泡壁处的水蒸发成水蒸气的蒸发率会快速增大, 导致气泡内水蒸气分子数快速增多. 与此同时, 气体从气泡内部扩散到周围液体的分子数量也少量增多, 但蒸发引起的进入气泡内的气体分子数远大于扩散

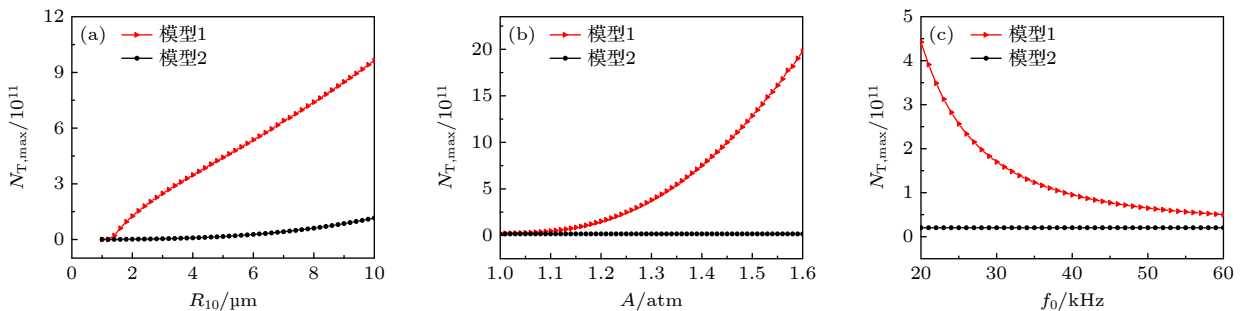


图 1 空化气泡内气体最大总分子数  $N_{T,\text{max}}$  的变化 (a) 当  $R_{20} = 5 \mu\text{m}$ ,  $A = 1.32P_0$ ,  $f_0 = 20 \text{ kHz}$  时,  $N_{T,\text{max}}$  随气泡 1 初始半径的变化; (b) 当  $R_{10} = R_{20} = 5 \mu\text{m}$ ,  $f_0 = 20 \text{ kHz}$  时,  $N_{T,\text{max}}$  随驱动声压的变化; (c) 当  $R_{10} = R_{20} = 5 \mu\text{m}$ ,  $A = 1.32P_0$  时,  $N_{T,\text{max}}$  随驱动频率的变化

Fig. 1. Change of the maximum total molecular number  $N_{T,\text{max}}$  of gas in cavitation bubble: (a)  $N_{T,\text{max}}$  changes with the initial radius of bubble 1 at  $R_{20} = 5 \mu\text{m}$ ,  $A = 1.32P_0$ ,  $f_0 = 20 \text{ kHz}$ ; (b)  $N_{T,\text{max}}$  changes with driving sound pressure at  $R_{10} = R_{20} = 5 \mu\text{m}$ ,  $f_0 = 20 \text{ kHz}$ ; (c)  $N_{T,\text{max}}$  changes with driving frequency at  $R_{10} = R_{20} = 5 \mu\text{m}$ ,  $A = 1.32P_0$ .

引起的外流气体分子数, 所以总体上气泡内的最大总分子数快速增大. 相比而言, 模型 2 给出的泡内气体最大总分子数随着  $R_{10}$  的增大而缓慢增大 (图 1(a)), 这是由状态方程决定的不同初始半径气泡内的初始分子数不同引起的. 图 1(b) 表明, 随着驱动声压的增大, 模型 1 给出的最大总分子数逐渐增大, 而模型 2 给出的最大总分子数不变. 这是因为随着驱动声压的增大, 气泡在负压相吸收的能量较多, 气泡膨胀阶段的时间会延长, 气泡壁处水的蒸发率会增大, 导致气泡内水蒸气分子数增多; 同时气体扩散能够使气泡内的气体分子数少量减少, 但由于前者远多于后者, 所以总体效果是气泡内的最大总分子数增大. 从图 1(c) 可以看出, 随着驱动频率的增大, 模型 1 给出的最大总分子数逐渐减少, 而模型 2 给出的最大总分子数不变. 这是因为驱动频率增大, 处于负压相位的时间变短, 气泡内低压持续时间也变短, 气泡壁处的水蒸发成水蒸气进入泡内的分子数减少, 同时气泡内部气体扩散到周围液体的分子数量也减少, 导致气泡内积累的最大总分子数减少.

### 3.2 初始半径对次 Bjerknes 力的影响

图 2 是驱动声压幅值  $A = 1.32P_0$ , 驱动频率  $f_0 = 20$  kHz 时, 在气泡 2 的初始半径恒定, 气泡 1 的初始半径变化的情况下, 用两种模型绘制的气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数的变化. 从图 2(a) 可以看出, 在  $R_{20} (= 5 \mu\text{m})$  恒定时, 随着  $R_{10}$  的增大, 两种模型给出的气泡归一化最大半径的变化趋势是一致的. 比较发现, 模型 1 给出的气泡归一化最大半径始终大于模型 2 给出的气泡归

一化最大半径. 这是因为模型 1 考虑了气泡的传质传热和扩散效应, 所以当  $R_{10}$  增大时, 气泡内的最大总分子数会明显增大 (图 1(a)), 也就是气泡内气体含量增多, 导致模型 1 给出的气泡归一化最大半径较大. 从图 2(b) 可以看出, 随着  $R_{10}$  的增大, 两种模型给出的次 Bjerknes 力系数逐渐增大, 显然模型 1 给出的次 Bjerknes 力系数大于模型 2 给出的次 Bjerknes 力系数, 且差别逐渐增大. 这主要是因为随着  $R_{10}$  的增大, 模型 1 给出的气泡归一化最大半径始终大于模型 2 给出的归一化最大半径 (图 2(a)). 由于 Bjerknes 力特别敏感依赖于空化气泡半径及其变化率 [8], 所以模型 1 给出的次 Bjerknes 力系数大于模型 2 给出的值. 由图 2(b) 插图可以看出, 在到 Blake 空化阈值半径之前  $f_B$  小于 0, 表明气泡间次 Bjerknes 力为斥力; 到 Blake 空化阈值半径之后  $f_B$  迅速增大为大于 0, 表明气泡间次 Bjerknes 力变为引力. 同时也可以看出, 模型 1 给出的次 Bjerknes 力由斥力变为引力的进程提前了一些.

### 3.3 驱动声压对次 Bjerknes 力的影响

图 3 是双泡初始半径  $R_{10} = R_{20} = 5 \mu\text{m}$ , 驱动频率  $f_0 = 20$  kHz 时, 绘制的气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数随驱动声压幅值的变化图. 从图 3(a) 可以看出, 随着驱动声压幅值的增大, 两种模型给出的气泡归一化最大半径呈现逐渐增大的趋势. 比较发现, 模型 1 给出的气泡归一化最大半径大于模型 2 给出的值. 这是因为模型 1 考虑了气泡的传质传热和扩散效应, 所以当驱动声压幅值增大时, 气泡内的最大总分子数会增多 (图 1(b)),

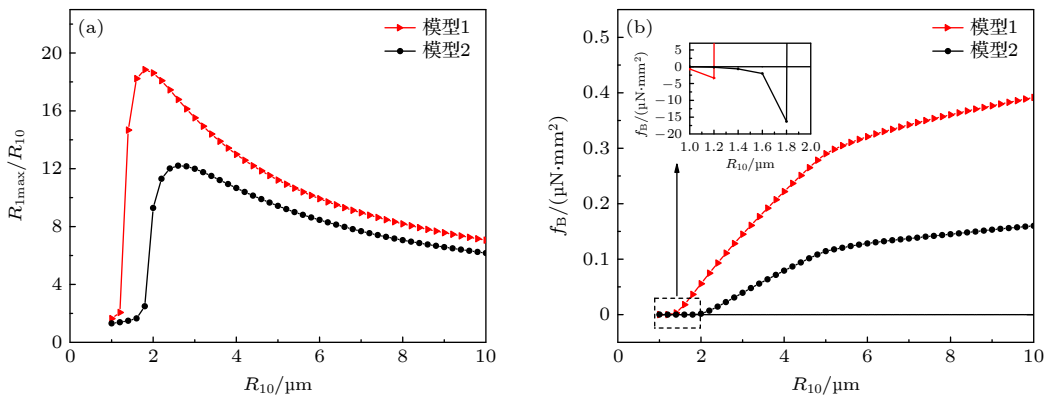


图 2 空化气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数随气泡 1 初始半径的变化 (a) 归一化最大半径; (b) 次 Bjerknes 力系数  
Fig. 2. Maximum normalized radius of cavitation the bubbles and the secondary Bjerknes force coefficient change with the initial radius of bubble 1: (a) Maximum normalized radius; (b) the secondary Bjerknes force coefficient.

也就是气泡内气体含量增多, 导致模型 1 给出的气泡归一化最大半径较大. 从图 3(b) 可以看出, 随着驱动声压幅值的增大, 两种模型给出的次 Bjerknes 力系数逐渐增大, 显然模型 1 给出的次 Bjerknes 力系数大于模型 2 给出的值, 且差别逐渐增大. 这是因为随着驱动声压幅值的增大, 模型 1 给出的气泡归一化最大半径逐渐增大且始终大于模型 2 给出的值 (图 3(a)). 由于 Bjerknes 力特别敏感依赖于空化气泡半径及其变化率, 所以模型 1 给出的次 Bjerknes 力系数大于模型 2 给出的力系数. 总体上, 随着驱动声压幅值的增大, 模型 1 给出的气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数大于模型 2 给出的相应值.

### 3.4 驱动频率对次 Bjerknes 力的影响

图 4 给出的是双泡初始半径为  $R_{10} = R_{20} = 5 \mu\text{m}$ , 驱动声压幅值为  $A = 1.32P_0$  时, 用两种模型

绘制的气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数随驱动频率的变化图. 从图 4(a) 可以看出, 随着驱动频率的增大, 两种模型给出的气泡归一化最大半径逐渐减小. 比较可看到, 模型 1 给出的气泡归一化最大半径大于模型 2 给出的值. 其原因是模型 1 考虑了气泡的传质传热和扩散效应, 所以当驱动频率增大时, 虽然气泡内的气体最大总分子数逐渐减少, 但始终大于模型 2 给出的值 (图 1(c)), 所以模型 1 给出的气泡归一化最大半径较大. 从图 4(b) 可以看出, 随着驱动频率的增大, 两种模型给出的次 Bjerknes 力系数也逐渐减小. 相比可见, 模型 1 给出的次 Bjerknes 力系数大于模型 2 给出的力系数. 其原因主要还是模型 1 给出的气泡最大半径及半径的变化率始终大于模型 2 给出的相应值. 总体上, 随着驱动频率的增大, 模型 1 给出的次 Bjerknes 力系数始终大于模型 2 给出的次 Bjerknes 力系数.

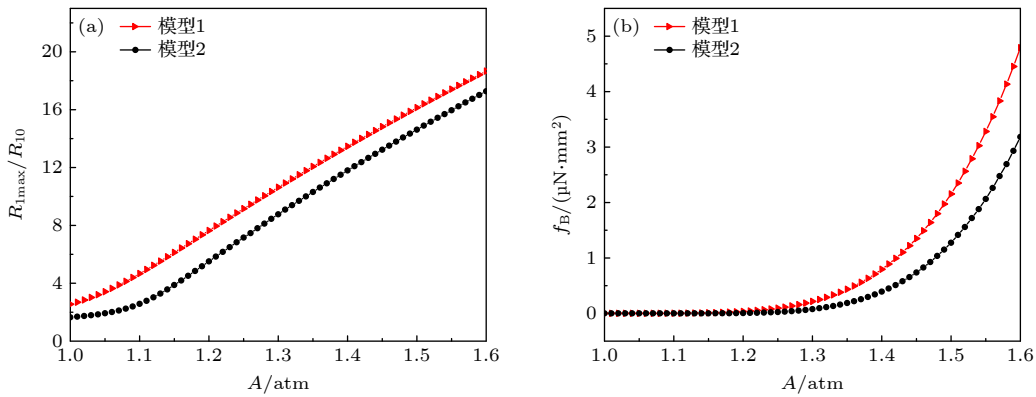


图 3 空化气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数随驱动声压的变化 (a) 归一化最大半径; (b) 次 Bjerknes 力系数

Fig. 3. Maximum normalized radius of cavitation the bubbles and the secondary Bjerknes force coefficient change with driving sound pressure: (a) Maximum normalized radius; (b) the secondary Bjerknes force coefficient.

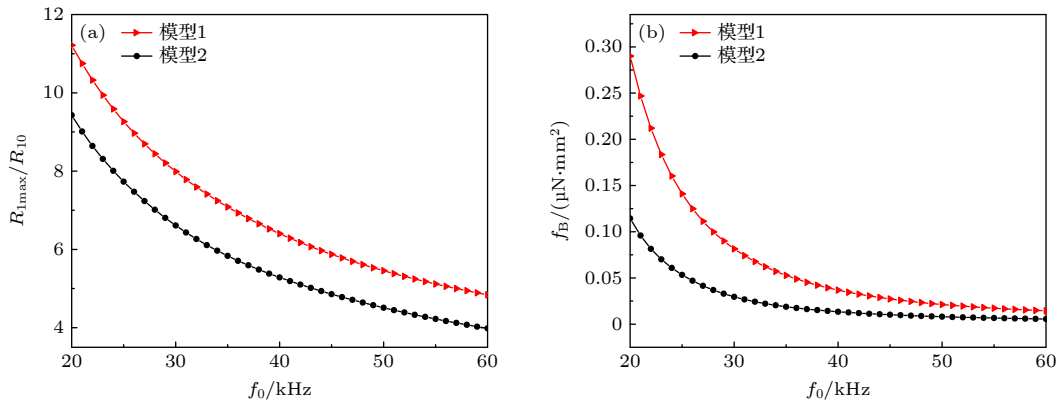


图 4 空化气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力系数随驱动频率的变化 (a) 归一化最大半径; (b) 次 Bjerknes 力系数

Fig. 4. Maximum normalized radius of cavitation the bubbles and the secondary Bjerknes force coefficient change with driving frequency: (a) Maximum normalized radius; (b) the secondary Bjerknes force coefficient.

## 4 结 论

本文利用 KM-NASG 模型, 研究了具有传质传热及扩散效应的声空化双泡间的相互作用, 分别计算了气泡归一化最大半径和气泡间相互作用的次 Bjerknes 力 (系数), 并与没有传质传热及扩散效应的双泡系统中的气泡归一化最大半径和次 Bjerknes 力 (系数) 进行了比较. 结果表明, 相比于没有传质传热及扩散效应的双泡系统, 具有传质传热及扩散效应的双泡系统中的气泡归一化最大半径和气泡间相互作用的次 Bjerknes 力都要大. 随着双泡系统中某一气泡的初始半径的增大, 次 Bjerknes 力会增大, 两种情况下的次 Bjerknes 力的差别会逐渐增大; 随着驱动声压的增大, 次 Bjerknes 力也会增大, 两种情况下的次 Bjerknes 力的差别也会逐渐增大; 随着驱动频率的增大, 次 Bjerknes 力会减小, 两种情况下的次 Bjerknes 力的差别也会逐渐减小. 因此传质传热和扩散效应对空化气泡间相互作用的次 Bjerknes 力有很明显的影响, 是不能忽略的重要因素.

## 参考文献

- [1] Hilgenfeldt S, Lohse D, Brenner M P 1996 *Phys. Fluids* **8** 2808
- [2] Yasui K 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6750
- [3] Toegel R, Lohse D 2003 *J. Chem. Phys.* **118** 1863
- [4] Shen Y, Yasui K, Sun Z C, Mei B, You M Y, Zhu T 2016 *Ultrason. Sonochem.* **29** 394
- [5] Hu J, Lin S Y, Wang C H, Li J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 134303 (in Chinese) [胡静, 林书玉, 王成会, 李锦 2013 物理学报 **62** 134303]
- [6] Zhang P L, Lin S Y, Zhu H Z, Zhang T 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 134301 (in Chinese) [张鹏利, 林书玉, 朱华泽, 张涛 2019 物理学报 **68** 134301]
- [7] Qinghim, Naranmandula 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 184301 (in Chinese) [清河美, 那仁满都拉 2020 物理学报 **69** 184301]
- [8] Mettin R, Akhatov I, Parlitz U, Ohl C D, Lauterborn W 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2924
- [9] Doinikov A A 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026301
- [10] Sadighi-Bonabi R, Rezaee N, Ebrahimi H, Mirheydari M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 016316
- [11] Zhang Y N, Zhang Y N, Li S C 2016 *Ultrason. Sonochem.* **29** 129
- [12] Pandey V 2019 *Phys. Rev. E* **99** 042209
- [13] Luo J, Niu Z P 2019 *Sci. Rep.* **9** 1352
- [14] Zhang L L, Chen W Z, Zhang Y Y, Wu Y R, Wang X, Zhao G Y 2020 *Chin. Phys. B* **29** 034303
- [15] Li X, Chen Y, Feng H, Qi L 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 184703 (in Chinese) [李想, 陈勇, 封皓, 綦磊 2020 物理学报 **69** 184703]
- [16] Shen Y, Zhang L L, Wu Y R, Chen W Z 2021 *Ultrason. Sonochem.* **73** 105535
- [17] Qin D, Zou Q Q, Lei S, Wang W, Li Z Y 2021 *Ultrason. Sonochem.* **78** 105712
- [18] Zhang X M, Li F, Wang C H, Mo R Y, Hu J, Guo J Z, Lin S Y 2022 *Ultrason.* **126** 106809
- [19] Wang D X, Naranmandula 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 037802 (in Chinese) [王德鑫, 那仁满都拉 2018 物理学报 **67** 037802]
- [20] Wang X, Li A, Zhou M, Liang J F, Zhang Z K, Wu W 2022 *J. Appl. Acoust.* **41** 735 (in Chinese) [王寻, 黎奥, 周敏, 梁金福, 张泽坤, 吴伟 2022 应用声学 **41** 735]
- [21] Yasui K, Iida Y, Tuziuti T, Kozuka T, Towata A 2008 *Phys. Rev. E* **77** 016609
- [22] Shen Z Z 2020 *Chin. Phys. B* **29** 014304
- [23] Xu K, Xu L, Zhou G P 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 194301 (in Chinese) [徐珂, 许龙, 周光平 2021 物理学报 **70** 194301]
- [24] Métayer O L, Saurel R 2016 *Phys. Fluids* **28** 046102
- [25] Toegel R, Gompf B, Pecha R, Lohse D 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3165
- [26] Longwell P A, Olin J B, Sage B H 1958 *Ind. Eng. Chem. Chem. Eng. Data Series* **3** 175
- [27] Hirschfelder J A, Curtiss C F, Bird R B 1954 *Molecular Theory of Gases and Liquids* (New York: Wiley) pp293–302
- [28] Dehane A, Merouani S, Hamdaoui O, Alghyamah A 2021 *Ultrason. Sonochem.* **73** 105511
- [29] Yasui K, Tuziuti T, Kanematsu W 2016 *Phys. Rev. E* **94** 013106
- [30] Jishnu C R, Salih A M 2018 *Fluid Phase Equilib.* **483** 182
- [31] Yasui K 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **98** 2772

# Interaction of two bubbles with mass transfer heat transfer and diffusion effects\*

Wurilege Naranmandula †

(College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia Minzu University, Tongliao 028043, China)

( Received 25 May 2023; revised manuscript received 17 July 2023 )

## Abstract

In this paper, the interaction between the two bubbles with the effects of mass transfer, heat transfer and diffusion was investigated under ultrasonic action by using the model combining the modified Keller-Miksis equation with Noble-Abel-Stiffend-Gas equation of state. The maximum normalized radius of cavitation the bubbles and the secondary Bjerknes force (coefficient) of the interaction between the bubbles are calculated respectively, and compared with the maximum normalized radius of the bubbles and the secondary Bjerknes force (coefficient) in the two bubbles system without the effects of mass transfer, heat transfer and diffusion given by Mettin et al [Mettin R, Akhatov I, Parlitz U, Ohl C D, Lauterborn W 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2924]. The results show that the maximum normalized radius of the bubbles and the secondary Bjerknes forces between the bubbles are larger in the two bubbles system with the effects of mass transfer, heat transfer and diffusion than in the two bubbles system without the effects of mass transfer, heat transfer and diffusion. The main reason for this result is that the effects of mass transfer, heat transfer and diffusion can increase the amount of gas contained in the cavitation bubble. With the increase of the initial radius of a certain the bubble in the two bubbles system, the secondary Bjerknes force will increase and the difference between the secondary Bjerknes forces in the two cases will gradually increase. With the increase of the driving sound pressure amplitude, the secondary Bjerknes force will also increase and the difference between the secondary Bjerknes forces in the two cases will also gradually increase. With the increase of the driving frequency, the secondary Bjerknes force will decrease and the difference between the secondary Bjerknes forces in the two cases will also gradually decrease. Therefore, the effects of mass transfer, heat transfer and diffusion have a significant effect on the secondary Bjerknes force of the interaction between cavitation the bubbles, which is an important factor that cannot be ignored. The research results of this article have positive significance for further understanding of the secondary Bjerknes force of the interaction between the two bubbles under ultrasonic action.

**Keywords:** cavitation two bubbles, secondary Bjerknes force, mass transfer and heat transfer effect, diffusion effect

**PACS:** 47.55.dd, 47.55.dp, 43.25.+y, 44.20.+b

**DOI:** 10.7498/aps.72.20230863

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11462019).

† Corresponding author. E-mail: [nrmdlbf@126.com](mailto:nrmdlbf@126.com)



## 具有传质传热及扩散效应的双气泡的相互作用

乌日乐格 那仁满都拉

### Interaction of two bubbles with mass transfer heat transfer and diffusion effects

Wurilege Naranmandula

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 194703 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230863

CSTR:  $\${metaArticle.multidivStyle}$

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230863>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 空化多泡中大气泡对小气泡空化效应的影响

Influence of large bubbles on cavitation effect of small bubbles in cavitation multi-bubbles

物理学报. 2019, 68(23): 234302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191198>

#### 耦合双泡声空化特性的理论研究

Theoretical study of coupling double-bubbles ultrasonic cavitation characteristics

物理学报. 2018, 67(3): 037802 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171805>

#### 二维湍流热对流羽流运动路径对传热特性的影响

Effect of plume motion path on heat transfer characteristics in two-dimensional turbulent thermal convection

物理学报. 2019, 68(16): 164701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190323>

#### 组织内包膜微泡声空化动力学及其力学效应分析

Acoustic cavitation of encapsulated microbubble and its mechanical effect in soft tissue

物理学报. 2021, 70(15): 154701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210194>

#### 横向磁场对绝缘/导电圆管中磁气体动力学流动和传热特性的影响

Effect of transverse magnetic field on magnetogasdynamic flow and heat transfer characteristics in insulated / conductive circular tubes

物理学报. 2022, 71(16): 164702 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220051>

#### 浮升力和流动加速对超临界CO<sub>2</sub>管内流动传热影响

Effects of buoyancy and acceleration on heat transfer of supercritical CO<sub>2</sub> flowing in tubes

物理学报. 2020, 69(6): 064401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191521>