

专题: 华南师范大学建校暨物理学科建立 90 周年

## 非厄米格点模型的经典电路模拟\*

徐灿鸿<sup>1)</sup> 许志聪<sup>1)</sup> 周子榆<sup>1)</sup> 成恩宏<sup>1)†</sup> 郎利君<sup>1)‡</sup>

1) (华南师范大学物理学院, 广州 510006)

2) (华南师范大学, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

(2023 年 6 月 1 日收到; 2023 年 8 月 7 日收到修改稿)

量子模拟是研究和理解量子世界中奇异物理现象的重要手段. 近年来, 人们发现除了量子平台, 经典系统 (如光子晶体、声子晶体和机械振子等) 也能通过类比薛定谔方程的方式模拟量子模型. 其中, 经典电路因具有成本低廉、技术成熟和易于扩展等特点, 成为一个新兴的模拟平台, 并成功模拟了许多重要的量子现象. 与此同时, 非厄米物理突破了传统量子力学中系统哈密顿量的厄米性, 为人们理解量子系统, 尤其是开放量子系统中的物理, 提供了一种新的视角. 非厄米系统由于展现出不同于厄米系统的新奇现象, 在物理学的多个领域中成为新兴的研究对象. 然而, 许多非厄米现象所要求的奇异构型在量子平台上实现的技术门槛相对较高, 例如非厄米趋肤效应通常需要系统具备非互易的格点间跃迁. 因此, 利用操控灵活的经典电路模拟非厄米物理成为一种自然的选择. 本文旨在通过简要介绍非厄米物理的相关知识 (包括数学基础和新奇现象) 以及经典电路的模拟理论 (包括对格点模型的映射理论、非厄米的引入和物理量的测量等), 概述当前经典电路模拟非厄米格点模型的实验进展, 为相关研究工作提供参考, 以推动该领域的进一步发展.

**关键词:** 非厄米物理, 经典电路模拟, PT 对称破缺, 非厄米趋肤效应, 非厄米拓扑**PACS:** 03.67.Ac, 03.65.Vf, 73.43.Nq**DOI:** 10.7498/aps.72.20230914

## 1 引言

量子模拟的概念最早由著名物理学家费曼提出<sup>[1]</sup>, 以解决复杂量子系统无法用经典计算机模拟的问题, 从而更好地理解奇异的量子世界. 随着低温、超导等极端技术的发展, 人造量子平台 (如冷原子<sup>[2-4]</sup>、离子阱<sup>[5-7]</sup>、超导量子比特<sup>[8-10]</sup>等) 表现出系统纯净、可控性强等优势, 成功模拟了许多重要的量子现象. 然而, 量子模拟平台对技术条件要求苛刻且容易受环境影响而发生退相干<sup>[11]</sup>, 导致实验成本很高. 近些年, 研究者们发现主导经典系统的物态方程在一定条件下可以与量子系统所遵循的薛定谔方程相对应<sup>[12]</sup>, 因此, 经典系统 (如光

子晶体<sup>[13-18]</sup>、声子晶体<sup>[19-24]</sup>、机械振子<sup>[25-30]</sup>等) 同样可以用来模拟量子现象, 并且具有成本低廉、技术成熟和扩展性强等特点. 尤其是近期兴起的经典电路系统<sup>[31,32]</sup>, 原则上可以模拟任意维度和任意边界条件下具有任意格点间跃迁的量子紧束缚模型 (即格点模型). 利用经典电路, 人们已经成功模拟了许多量子现象<sup>[33-49]</sup>, 比如拓扑边缘态<sup>[35,39,46,48]</sup>以及高阶拓扑角态<sup>[36,40,43,47]</sup>等.

另一方面, 非厄米系统作为量子开放系统的一种有效描述<sup>[12,50,51]</sup>, 本身带来许多不同于传统厄米系统的独特现象, 比如复能谱的出现、宇称-时间反演对称 (parity-time-reversal symmetry, PT 对称) 破缺<sup>[52-56]</sup>、传统体边对应关系 (bulk-boundary correspondence) 的失效<sup>[57-70]</sup>、非厄米动力学<sup>[71-73]</sup>

\* 广东省基础与应用基础研究基金 (批准号: 2019A1515111101) 和华南师范大学科研启动基金资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ehcheng@m.scnu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: ljlang@scnu.edu.cn

等, 已经成为当下凝聚态领域中一个新兴的研究热点. 鉴于经典电路对量子厄米拓扑系统的成功模拟, 人们自然也希望能用它模拟非厄米系统, 以期更好地研究和理解新奇的非厄米物理现象. 实验上, 研究者在利用经典电路模拟非厄米物理方面已经取得了很大进展<sup>[32]</sup>, 比如成功模拟具有非互易跃迁的 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型<sup>[41]</sup>, 观测到由增益/损耗 (gain/loss) 诱导的非厄米拓扑边缘态<sup>[74]</sup> 等. 本文将聚焦于经典电路对非厄米格点模型的模拟, 对当前的实验进展进行综述, 为相关研究提供参考, 以推动该领域进一步发展.

本文的剩余部分大致安排如下: 第 2 节简要介绍非厄米物理中的一些数学知识和新奇现象; 第 3 节介绍经典电路模拟的理论基础; 第 4 节概述当下经典电路模拟非厄米格点模型的实验进展; 第 5 节进行总结.

## 2 非厄米物理简介

非厄米物理的研究对象既可以是量子系统也可以是经典系统, 其特征是系统的性质可以通过有效的非厄米矩阵进行描述<sup>[12]</sup>. 系统的非厄米性通常来源于系统与环境之间的耦合, 比如系统与环境之间的能量交换, 对系统的测量等<sup>[50,51]</sup>.

早期的研究主要关注于 PT 对称的非厄米系统<sup>[52,53]</sup>, 因为这类系统在特定参数下具有类似厄米系统的纯实数能谱, 以保证态的演化不分散或不消逝. 同时, 此类系统能谱的实复转变对应于本征态的 PT 对称破缺, 其转变点即为异常点 (exceptional point, EP)<sup>[75]</sup>. 随后, 人们建立了非厄米系统的一般性理论——非厄米量子力学<sup>[76]</sup>, 给出了描述非厄米系统的基本数学范式.

近些年, 传统体边对应关系在非厄米拓扑系统的失效引起新一轮对非厄米物理研究的浪潮. 在重建非厄米体边对应关系的过程中, 人们逐渐发现一些非厄米系统所特有的现象, 比如非厄米趋肤效应<sup>[57–59,77–79]</sup>, 也建立起一些新的非厄米理论, 比如非布洛赫理论<sup>[59,80–88]</sup>、非厄米拓扑分类<sup>[89–92]</sup> 等. 这些研究在理论上揭示出非厄米系统不同于厄米系统的独特性质<sup>[12,86,92]</sup>. 近期随着非厄米领域的不断发展, 人们开始将非厄米理论应用于对开放系统的研究中<sup>[63,93–101]</sup>.

本节根据理解相关实验的需要, 简要介绍一些

实验中所涉及的非厄米理论的基本数学知识以及非厄米系统所特有的新奇现象.

### 2.1 非厄米理论的数学基础

#### 2.1.1 非厄米矩阵及双正交基

非厄米系统通常可以用非厄米矩阵  $H$  (相当于传统量子力学中系统的哈密顿量) 来描述, 其非厄米性表现为  $H^\dagger \neq H$ . 对于可对角化的非厄米矩阵而言 (不可对角化的情况随后介绍), 其本征值分解如下<sup>[102]</sup>:

$$S^{-1}HS = \Lambda, \quad (1)$$

其中,  $\Lambda$  为对角矩阵, 其对角项  $\{E_n\}$  为本征值 (相当于传统量子力学中系统的本征能量), 可以为任意复数;  $S$  为相似矩阵, 其中的列向量被称为  $H$  的右本征矢, 记作  $\{|\psi_n^{(r)}\rangle\}$ , 而  $S^{-1}$  中的行向量被称为  $H$  的左本征矢, 记作  $\{\langle\psi_n^{(l)}|\}$ . 将 (1) 式写成本征方程的形式:

$$H|\psi_n^{(r)}\rangle = E_n|\psi_n^{(r)}\rangle, \quad H^\dagger|\psi_n^{(l)}\rangle = E_n^*|\psi_n^{(l)}\rangle, \quad (2)$$

表示非厄米系统的定态薛定谔方程. 由相似矩阵的性质可知, 左右本征矢之间满足双正交归一关系:

$$\langle\psi_m^{(l)}|\psi_n^{(r)}\rangle = \delta_{mn}, \quad (3)$$

从而具有如下完备性:

$$\sum_n |\psi_n^{(r)}\rangle\langle\psi_n^{(l)}| = 1. \quad (4)$$

因此, 左右矢可构成非厄米矩阵的双正交基 (biorthogonal basis)<sup>[76]</sup>.

特别地, 对于厄米矩阵 ( $H^\dagger = H$ ) 而言, 其本征值分解中的相似矩阵变为酉矩阵 ( $S^{-1} = S^\dagger$ ), 即左右矢之间满足  $|\psi_n^{(l)}\rangle = |\psi_n^{(r)}\rangle$  的关系, 因此双正交基退化为大家所熟知的正交基, 相应的本征值  $E_n$  也变为实数. 不同于厄米矩阵的本征矢, 非厄米矩阵对应不同本征值的右本征矢通常不交 (左本征矢类似), 即  $\langle\psi_m^{(l)}|\psi_n^{(r)}\rangle \neq 0$  ( $m \neq n$ ).

#### 2.1.2 缺陷矩阵及 EP

当非厄米矩阵不可对角化 (被称为缺陷矩阵) 时, 无法对其进行本征值分解, 取而代之的是更一般的约当分解 (Jordan decomposition)<sup>[12,103]</sup>:

$$S^{-1}HS = J. \quad (5)$$

其中,  $S$  仍为相似矩阵,

$$J = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & J_s(E) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad (6)$$

是在相似变换下最接近完全对角化的块对角矩阵, 其对角块  $J_s(E)$  具有如下形式: 对角元均为  $E$ , 上次对角元均为 1, 其他为 0. 具有这样形式的  $J$  被称为  $H$  的约当标准型 (Jordan canonical form), 其中  $J_s(E)$  为第  $s$  个约当块 (Jordan block). 每个约当块  $J_s(E)$  都有且仅有一个本征矢  $(1, 0, \dots)^T$ ,  $E$  为相应的本征值. 因此, 当存在约当块的维度  $p_s(E) = \dim J_s(E) > 1$  时,  $H$  即为缺陷矩阵. 具有相同本征值  $E$  的约当块的个数  $\alpha(E)$  即为缺陷矩阵  $H$  在  $E$  处的简并度. 特别地, 当所有约当块的维度均为 1 时, 约当分解则退化为本征值分解, 即  $H$  不再是缺陷矩阵.

如果调节系统参数, 使描述非厄米系统的非厄米矩阵恰好为缺陷矩阵, 此参数即为非厄米系统的 EP<sup>[75]</sup>. 不同于厄米矩阵的简并点, 在 EP 处不仅本征值重合, 本征矢也会部分或全部合并 (coalesce), 即  $H$  的左右本征矢无法提供完备的双正交基, 此时需要用广义本征矢 (generalized eigenvector) 来补足. 通常大家定义在本征值  $E$  处的 EP 阶数为  $p(E) = \sum_{s=1}^{\alpha(E)} p_s(E)$ , 但此定义只适合对 EP 的粗糙描述, 并不能反映在此系统参数下是否发生了本征矢合并以及合并的细节. 只有给出本征值  $E$  对应的每一个约当块的维度信息  $p_s(E)$ , 才能更好地表征 EP 的性质.

为了度量系统参数离 EP 的远近程度, 可以定义平均的相刚度 (phase rigidity)<sup>[104]</sup>:

$$r(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle \psi_n^{(l)}(z) | \psi_n^{(r)}(z) \rangle}{\sqrt{\langle \psi_n^{(l)}(z) | \psi_n^{(l)}(z) \rangle \langle \psi_n^{(r)}(z) | \psi_n^{(r)}(z) \rangle}}, \quad (7)$$

其中,  $N$  为可对角化矩阵  $H(z)$  的维度,  $|\psi_n^{(l/r)}(z)\rangle$  为其在参数  $z$  处的第  $n$  个左/右本征矢. 当系统参数接近 EP 值  $z_0$  时, 相刚度  $r(z \rightarrow z_0) \rightarrow 0$ ; 对于厄米矩阵, 左右本征矢互为复共轭, 所以相刚度  $r(z) = 1$ , 即厄米矩阵不存在 EP.

## 2.2 非厄米系统中的新奇现象

### 2.2.1 PT 对称破缺及赝厄米

在传统的量子力学中, 系统的哈密顿量为厄米

算符 (对应于厄米矩阵), 其本征谱全为实数, 反映系统能量为实数的物理事实. 1998 年, Bender 和 Boettcher<sup>[52,53]</sup> 发现, PT 对称的非厄米哈密顿量 (对应于非厄米矩阵) 同样可以具有全实能谱. 这里的 P 和 T 分别表示空间反演和时间反演. 当非厄米强度 (比如增益/损耗强度)  $\gamma$  比较弱时, 系统的所有本征态均具有 PT 对称性, 从而具有全实的能谱, 此时系统处于 PT 对称相, 任何量子态在此系统下均具有稳定的动力学. 当非厄米强度很强时, 系统的部分或全部本征态不再具有 PT 对称性, 其能谱也出现复数, 此时系统处于 PT 对称破缺相, 量子态在其中的演化通常会发散或消逝. 因此, 在 PT 对称的非厄米系统里, 存在能谱由全实到复数的转变, 被称为 PT 转变 (PT transition), 如图 1 所示. 在转变点处部分或全部本征态会发生自发性 PT 对称破缺. 此转变点即为前面所提到的 EP. PT 转变是厄米系统所没有的.

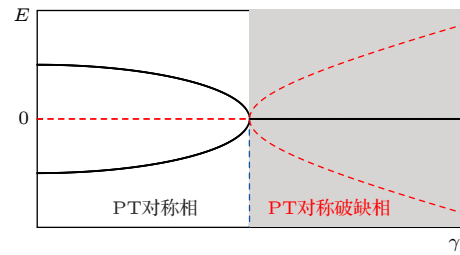


图 1 能量  $E$  的实部 (实线) 和虚部 (虚线) 随非厄米强度  $\gamma$  的变化. 点线处为 PT 转变点, 其左侧为 PT 对称相 (白色区域), 右侧为 PT 对称破缺相 (灰色区域)

Fig. 1. The real (solid lines) and imaginary (dashed lines) parts of the energy  $E$  versus the strength  $\gamma$  of the non-Hermiticity. The dotted line indicates the PT transition point, to the left side of which is the PT symmetric phase (white region) and to the right side of which is the PT-broken phase (gray region).

其实, 不只有 PT 对称的非厄米系统可以存在全实能谱. Mostafazadeh<sup>[105]</sup> 在 2002 年的研究发现, 每一个具有全实能谱的哈密顿量都是赝厄米的 (pseudo-Hermitian), 而 PT 对称只是赝厄米的一种特殊形式. 如果存在一个厄米的可逆算符  $\eta$ , 使得系统的哈密顿量  $H$  满足  $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ , 则称  $H$  是赝厄米的<sup>[12,105]</sup>. 如果  $\eta$  可以取单位算符, 则  $H$  退化为厄米的. 赝厄米哈密顿量的能谱一定具备以下性质之一: 1) 全实能谱; 2) 能谱以复共轭的形式成对出现, 且互为复共轭的能谱的简并度相同.

如果存在  $\eta$ , 它可以进一步写成  $\eta = OO^\dagger$  的形式, 其中  $O$  为线性可逆算符, 则厄米哈密顿量  $H$  一定具有全实能谱 [12,106]. 这是非厄米哈密顿量具有全实能谱的充分必要条件. 而 PT 对称仅能保证非厄米哈密顿量具有产生全实能谱的可能性, 既不是其具有全实能谱的充分条件, 也不是必要条件.

### 2.2.2 传统体边对应关系的失效及非厄米趋肤效应

体边对应关系是被体能隙保护的厄米拓扑系统遵循的一个基本原则, 它描述了系统的体态拓扑不变量与拓扑边缘态之间的关联. 然而, 此原则在某些非厄米系统中并不成立, 表现为开边界条件下的能谱和体态与周期边界下有很大的不同 [57,58], 如图 2(a) 所示. 这是因为此类非厄米系统对边界的选择表现出很强的敏感性, 开边界与周期边界的同一系统在热力学极限下并不等价 [57,58,107].

非厄米趋肤效应恰是这种边界敏感性的体现. 它具体表现为非厄米系统的体态在开边界条件下呈指数型地聚集在某一边界, 如图 2(c) 所示. 非厄米趋肤效应使具有体周期性的非厄米系统的体态丢失了布洛赫态的特性, 与厄米系统中体态弥散在全域的情形完全不同.

基于对非厄米趋肤效应的观察, Yao 等 [60] 在一维非厄米 SSH 模型中建立起非布洛赫理论 (non-Bloch theory), 成功重塑了此非厄米系统中的体边对应关系, 引起了后续的广泛研究 [80–88]. 在非布洛赫理论中, 对于热力学极限下的非厄米系统, 周期边界下的哈密顿量  $H(k)$  被开边界下的  $H(\beta)$  所取代. 这里, 原先定义在布里渊区上的晶格动量  $k$  被扩展为一个复变量  $\beta = re^{ik}$ , 它在复平面的集合被称为广义布里渊区 (generalized Brillouin zone). 广义布里渊区通常为一个闭合路径, 如图 2(b) 所示, 其与原点的距离  $r$  反映系统在开边界条件下体态的趋肤性质:  $r = 1$  代表布洛赫态, 即没有非厄米趋肤效应;  $r < 1$  和  $r > 1$  分别对应趋向于不同边界的体趋肤态 [60,81]. 类比厄米情形 [108], 可以用非布洛赫态在广义布里渊区中定义非布洛赫的拓扑不变量, 从而重构非厄米拓扑系统的体边对应关系, 即非布洛赫拓扑不变量与非厄米拓扑边缘态之间的关联: 拓扑不变量为 0 表示不存在拓扑边缘态的拓扑平庸相, 非 0 表示存在拓扑边缘态的非厄米

拓扑相.

例如, 对于具有手征对称性的一维非厄米系统, 其非布洛赫缠绕数可定义为 [59]

$$w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{GBZ}} \text{tr}[q^{-1}(\beta)dq(\beta)], \quad (8)$$

其中, 矩阵  $q(\beta)$  由哈密顿量  $H(\beta)$  的  $Q$ -矩阵来定义:

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \sum_{n \in N_-} \left[ \Gamma |u_n^{(r)}(\beta)\rangle \langle u_n^{(l)}(\beta)| \Gamma \right. \\ &\quad \left. - |u_n^{(r)}(\beta)\rangle \langle u_n^{(l)}(\beta)| \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & q(\beta) \\ q^{-1}(\beta) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

由于系统具有手征对称性  $\{H(\beta), \Gamma\} = 0$  ( $\Gamma$  为相应的手征算符), 导致能谱关于零点对称, 因此可以将  $H(\beta)$  的本征态  $\{|u_n^{(r,l)}(\beta)\rangle\}$  ( $n$  为能带指标) 按本征能量  $\{E_n(\beta), -E_n(\beta)\}$  划分成两个子空间  $N_+$  和  $N_-$ . 以手征算符  $\Gamma$  的本征态为基, 手征对称的  $Q$ -矩阵便可写成 (9) 式中第 2 行的反对角形式.

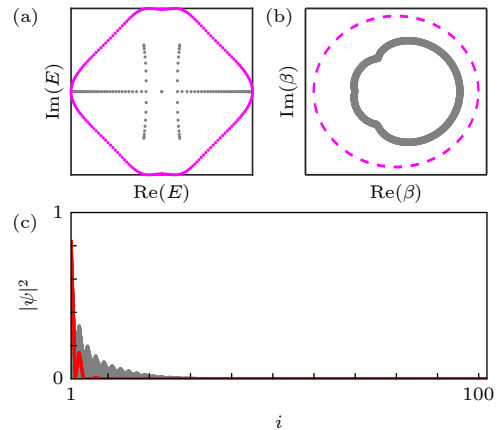


图 2 (a) 非厄米 SSH 模型 [59] 分别在开边界 (粉色) 和周期边界 (灰色) 条件下的能谱  $E$  在复平面的示意图; (b) 与 (a) 中能谱相对应的布里渊区 (灰色) 和广义布里渊区 (粉色) 的示意图, 其中  $\beta$  的定义见正文; (c) 开边界条件下拓扑边缘态 (红色) 和趋肤态 (灰色) 的在实空间的几率分布  $|\psi_i|^2$  示意图,  $i$  为格点标记

Fig. 2. (a) The sketch of the energy spectra in complex plane for the non-Hermitian SSH model in Ref. [59] respectively under open (pink) and periodic (gray) boundary conditions; (b) the sketch of the Brillouin zone (black) and the generalized Brillouin zone (pink) corresponding to the spectra with the same colors in (a), where the definition of  $\beta$  can be referred to in the main text; (c) the sketch of probability distribution  $|\psi_i|^2$  of the topological end state (red) and the skin bulk states (gray) in real space under open boundary conditions, where  $i$  is the site index.

又如, 二维非厄米系统的非布洛赫陈数可定义为<sup>[60,109]</sup>

$$C = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{GBZ}} \text{tr}[F_{xy}(\boldsymbol{\beta})] d\beta_x d\beta_y, \quad (10)$$

其中  $(\partial_{\mu=x,y} \equiv \partial/\partial\beta_{\mu})$ ,

$$F_{xy}(\boldsymbol{\beta}) = \partial_x A_y(\boldsymbol{\beta}) - \partial_y A_x(\boldsymbol{\beta}) - i[A_x(\boldsymbol{\beta}), A_y(\boldsymbol{\beta})], \quad (11)$$

$$A_{\mu}^{nm}(\boldsymbol{\beta}) = i\langle u_n^{(l)}(\boldsymbol{\beta}) | \partial_{\mu} u_m^{(r)}(\boldsymbol{\beta}) \rangle \quad (12)$$

分别为非布洛赫贝里曲率 (Berry curvature) 和贝里联络 (Berry connection).

以上用非布洛赫本征态定义的拓扑不变量, 虽然能很好地反映非厄米系统在开边界条件下的拓扑相变, 包括能隙的关闭以及拓扑边缘态的产生, 但并没有体现出非厄米趋肤态本身的拓扑性质. 借助于非厄米系统的能谱一般为复数的特性, 可以定义能量缠绕数<sup>[12,67]</sup>:

$$w_{C,E_b} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz} \ln \det [H(z) - E_b] dz, \quad (13)$$

其中,  $C$  为积分回路, 可以是布里渊区 (BZ) 或广义布里渊区 (GBZ), 也可以是其他周期参数空间;  $E_b$  是能量复平面内的基准能量. 对于一维单带非厄米系统, 周期边界下的能量缠绕数  $w_{\text{BZ},E_b}$  可以反映相应开边界下趋肤态的性质:  $w_{\text{BZ},E_b} \neq 0$  表明存在非厄米趋肤效应, 其正负反映趋肤态的趋肤方向<sup>[67]</sup>. 这种周期边界下能谱的拓扑性质与开边界下非厄米趋肤态的对应关系是非厄米拓扑系统所独有的.

### 2.2.3 EP 诱导的高灵敏度及分数级数展开

与传统的简并点 (此处仅是能量重合而态并不合并) 不同, EP 能使非厄米系统的能量对微扰产生更灵敏的响应. 对于一个  $p$  阶 EP, 能谱对微扰  $z$  的响应  $\varepsilon$  在一定条件下最大可以达到  $\varepsilon \propto z^{1/p}$  的量级, 而传统的简并点仅为  $\varepsilon \propto z$ <sup>[110]</sup>, 如图 3 所示. 基于这一特性, EP 可以用于制造高灵敏度的传感器, 其最早方案由 Wiersig<sup>[111]</sup> 于 2014 年提出.

EP 产生高灵敏度的原因可以通过数学上的皮瑟级数 (Puiseux series) 来理解. 已知非厄米系统  $H(z)$  (参数  $z \in \mathbb{C}$ ) 在  $z = 0$  处有一个能量为  $E_0$  的  $p$  阶 EP. 当系统偏离 EP 时, 假设能量完全劈裂为  $p$  支不同的能量函数  $E_h(z)$  ( $h = 0, \dots, p-1$ ) 且它们恰好构成以  $z = 0$  为  $p-1$  阶支点的  $p$  叶黎曼面 (即这  $p$  支能量函数之间在  $z = 0$  附近是连续解析

的, 且函数值绕  $p$  圈才能回到初始值), 则能量函数在 EP 附近展开有如下皮瑟级数<sup>[92,112]</sup>:

$$E_h(z) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{i2\pi n h/p} z^{n/p}, \quad (14)$$

其中  $\alpha_n$  是展开系数. 因为  $|z| \ll 1$ , 所以能量在 EP 附近的劈裂由领头项  $z^{1/p}$  主导. 皮瑟级数是分数级数, 当 EP 阶数  $p > 1$  时, 能量劈裂对参数偏离的响应比传统的简并点 (对应于泰勒级数) 要大. 这就是 EP 能导致高灵敏度的来源.

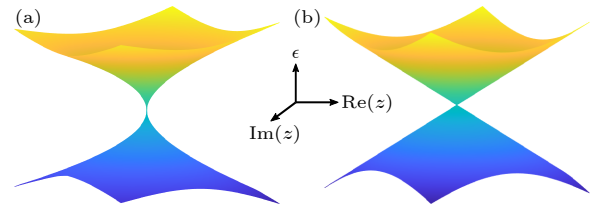


图 3 (a) 能谱  $\varepsilon$  随微扰  $z$  在二阶 EP 附近劈裂的示意图, 具有  $\varepsilon \propto z^{1/2}$  的形式<sup>[110]</sup>; (b) 能谱  $\varepsilon$  随微扰  $z$  在传统的二重简并点附近劈裂的示意图, 具有  $\varepsilon \propto z$  的形式<sup>[110]</sup>

Fig. 3. (a) The sketch of energy spectra  $\varepsilon$  versus the perturbation  $z$  around a two-order EP, satisfying  $\varepsilon \propto z^{1/2}$ <sup>[110]</sup>; (b) the sketch of energy spectra  $\varepsilon$  versus the perturbation  $z$  around a traditional two-fold degenerate point, satisfying  $\varepsilon \propto z$ <sup>[110]</sup>.

值得注意的是, 展开式 (14) 假设了  $p$  阶 EP 恰好是其附近能量函数的  $p-1$  阶支点, 但这些能量函数也可以形成  $\alpha$  个各自连续解析的函数族, 每族函数以  $p$  阶 EP 作为其  $p_s-1$  阶支点 (满足  $\sum_{s=1}^{\alpha} p_s = p$ ). 此时, 每一族能量函数的展开式都具有 (14) 式的形式, 只是将  $p$  换成  $p_s$ , 这会导致能量对参数偏离的响应相对较弱<sup>[103]</sup>. 因此, 能谱对微扰的响应并非只由 EP 的阶数决定, 还跟具体的微扰形式有关.

## 3 经典电路模拟的理论基础

### 3.1 经典电路对格点模型的映射

利用经典电路模拟物理现象的基本逻辑为, 基于电路的基尔霍夫定律, 通过合理近似, 建立起电路中描述某物理量的运动方程与模拟对象所遵循的运动方程之间的映射关系, 以达到通过观测此物理量在电路中的行为从而获知模拟对象相关性质的目的. 由于基尔霍夫方程的离散属性, 经典电路主要用于模拟量子力学中的紧束缚模型 (即格点模

型). 所以, 本节主要介绍用于映射格点模型薛定谔方程的 3 种电路理论: 拉普拉斯形式 (Laplacian formalism)<sup>[35]</sup>、刘维尔形式 (Liouvillian formalism)<sup>[113]</sup> 以及耦合模理论 (coupled mode theory)<sup>[114–116]</sup>.

### 3.1.1 拉普拉斯形式

对于任意线性电路构成的网络, 元件从节点  $i$  到节点  $j$  (有方向性) 的特性可以通过线性的等效电阻  $R_{ij}$ 、等效电感  $L_{ij}$  和等效电容  $C_{ij}$  来描述. 如果元件的等效值依赖于节点  $i$  与  $j$  之间的方向, 则称此元件为非互易的 (nonreciprocal). 定义节点的外部输入电流  $I_i(t)$  和对地电压  $V_i(t)$ , 根据基尔霍夫定律可得矩阵形式的线性微分方程<sup>[117]</sup>:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) = \mathcal{C}_C \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{V}(t) + \mathcal{C}_R \frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) + \mathcal{C}_L \mathcal{V}(t), \quad (15)$$

其中,  $\mathcal{I}(t)$  和  $\mathcal{V}(t)$  分别为  $I_i(t)$  和  $V_i(t)$  的矢量形式, 系数矩阵:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_C)_{ii} &= C_{ig} + \sum_{k \neq i} C_{ik}, & (\mathcal{C}_C)_{ij} &= -C_{ij} \quad (i \neq j), \\ (\mathcal{C}_R)_{ii} &= R_{ig}^{-1} + \sum_{l \neq i} R_{il}^{-1}, & (\mathcal{C}_R)_{ij} &= -R_{ij}^{-1} \quad (i \neq j), \\ (\mathcal{C}_L)_{ii} &= L_{ig}^{-1} + \sum_{k \neq i} L_{ik}^{-1}, & (\mathcal{C}_L)_{ij} &= -L_{ij}^{-1} \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (16)$$

分别具有 [电容]、[电阻]<sup>-1</sup> 和 [电感]<sup>-1</sup> 的量纲,  $g$  表示对地.

对电路注入驱动频率为  $\omega \in \mathbb{R}$  的交变电流  $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}e^{i\omega t}$ , 电路节点将具有稳定的电压响应  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}e^{i\omega t}$ , 其电流幅  $\mathcal{I}$  和电压幅  $\mathcal{V}$  之间满足如下关系:

$$\mathcal{I} = (i\omega\mathcal{C}_C + \mathcal{C}_R - i\mathcal{C}_L/\omega)\mathcal{V} \equiv \mathcal{J}(\omega)\mathcal{V}. \quad (17)$$

式中  $\mathcal{J}(\omega)$  具有 [导纳] 的量纲, 被称为导纳矩阵 (admittance matrix) 或电路拉普拉斯量 (circuit Laplacian)<sup>[35]</sup>. 它是驱动频率  $\omega$  的函数, 其矩阵元  $\mathcal{J}_{ij}$  表示节点  $i$  到  $j$  的导纳. 其逆矩阵  $\mathcal{G} = \mathcal{J}^{-1}$  被称为电路格林函数 (circuit Green function), 具有 [阻抗] 的量纲, 反映了节点电压  $\mathcal{V}$  对节点输入电流  $\mathcal{I}$  的响应. 有时为了方便起见, 也可将导纳矩阵分解为三部分:

$$\mathcal{J} = \mathcal{A} + \mathcal{D} + \mathcal{W}, \quad (18)$$

其中,  $\mathcal{A}$  代表导纳矩阵的非对角部分,  $\mathcal{D}$  和  $\mathcal{W}$  分

别代表对角部分中的节点间耦合部分和对地部分, 其矩阵元分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} &= (1 - \delta_{ij}) [-i\omega C_{ij} - R_{ij}^{-1} - (i\omega L_{ij})^{-1}], \\ \mathcal{D}_{ij} &= \delta_{ij} \sum_{k \neq i} [i\omega C_{ik} + R_{ik}^{-1} + (i\omega L_{ik})^{-1}], \\ \mathcal{W}_{ij} &= \delta_{ij} [i\omega C_{ig} + R_{ig}^{-1} + (i\omega L_{ig})^{-1}], \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 函数.

如果将导纳矩阵  $\mathcal{J}$  看作格点模型的哈密顿量, 则电路节点对应格点的位置,  $\mathcal{J}$  的对角元和非对角元分别对应格点上的在位势能和格点间的跃迁振幅, 而导纳矩阵的本征方程,

$$\mathcal{J}v_n^{(r)} = j_n v_n^{(r)}, \quad \mathcal{J}^\dagger v_n^{(l)} = j_n^* v_n^{(l)}, \quad (20)$$

便可用于模拟格点模型的定态薛定谔方程 (2) 式. 这里的  $j_n$  表示导纳矩阵  $\mathcal{J}$  的第  $n$  个本征值,  $v_n^{(l,r)}$  为相应的左右本征矢. 因此,  $j_n$  对应格点模型的本征能量  $E_n$ , 而  $v_n^{(l,r)}$  对应格点模型的本征态  $|\psi_n^{(l,r)}\rangle$ . 需要注意的是, 在此对应关系中, 驱动频率  $\omega$  是作为模拟参数而存在的, 并非直接对应于格点模型的本征能量.

特别地, 当无外界输入电流 (即  $\mathcal{I} = 0$ ) 时, (17) 式变为本征方程  $\mathcal{J}(\omega)\mathcal{V} = 0$ , 其存在非平庸解的条件为

$$\det[\mathcal{J}(\tilde{\omega})] = \prod_n j_n(\tilde{\omega}) = 0, \quad (21)$$

其中使条件成立的  $\tilde{\omega}$  即为电路的本征频率, 非平庸解  $\mathcal{V}(\tilde{\omega})$  为本征频率  $\tilde{\omega}$  所对应的电路的本征电压. 条件 (21) 式说明本征频率  $\tilde{\omega}$  至少使一个导纳矩阵的本征值为零, 即存在  $n$  使  $j_n(\tilde{\omega}) = 0$ . 换言之, 导纳矩阵  $\mathcal{J}(\omega)$  的本征值  $j_n(\omega)$  作为  $\omega$  的连续函数族, 与  $j = 0$  的交点所对应的频率即为电路的本征频率  $\tilde{\omega}$ , 而相应的右本征矢  $v_n^{(r)}(\tilde{\omega})$  即为电路的本征电压. 注意以上结论并不限于本征频率是实数, 对于复本征频率同样适用.

由 (17) 式可知, 当电路中仅含有被动 (passive) 电阻时 (即纯耗散电路),  $\mathcal{J}$  是厄米的, 而仅含有被动电容和电感时 (即纯振荡电路),  $\mathcal{J}$  是反厄米的, 即  $\mathcal{J}^\dagger = -\mathcal{J}$ . 因此, 通常用  $i\mathcal{J}$  建立与格点模型哈密顿量  $H$  的映射, 用仅含有被动电容和电感的电路模拟厄米格点模型<sup>[33,35,45]</sup>, 而通过引入被动电阻以及主动 (active) 元件来模拟非厄米格点模型<sup>[41,74,118–129]</sup>. 只要对电路元件及排布进行合理的

设计并采取合适的驱动频率,原则上可以用导纳矩阵模拟任意格点模型的稳态性质,包括本征能和态以及由它们定义的各种物理量.

### 3.1.2 刘维尔形式

如果要模拟格点模型的动力学,需要将描述电路动力学的 (15) 式与描述格点模型动力学的含时薛定谔方程  $i\partial_t|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$  ( $\hbar = 1$ ) 相联系. 由于含时薛定谔方程是齐次方程,所以这里考虑无外界电流输入的情况,即  $\mathcal{I}(t) = 0$ . 此时, (15) 式变为关于时间的二阶齐次微分方程而含时薛定谔方程是一阶的,因此,需要通过变量替换将 (15) 式降为一阶:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) &\equiv \mathcal{W}(t), \\ \frac{d}{dt} \mathcal{W}(t) &= -\mathcal{C}_C^{-1} \mathcal{C}_R \mathcal{W}(t) - \mathcal{C}_C^{-1} \mathcal{C}_L \mathcal{V}(t). \end{aligned} \quad (22)$$

定义新变量  $\Phi(t) = [\mathcal{V}(t), \mathcal{W}(t)]^T$ , (22) 式可改写为如下刘维尔方程的形式<sup>[113]</sup>:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \mathcal{L} \Phi(t), \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{C}_C^{-1} \mathcal{C}_L & -\mathcal{C}_C^{-1} \mathcal{C}_R \end{pmatrix}. \quad (23)$$

这里的  $\mathcal{L}$  被称为电路刘维尔量 (circuit Liouvillian),  $\mathcal{E}$  为单位矩阵. 刘维尔方程将微分方程 (15) 从二阶降为一阶,但变量的个数扩大为原来的 2 倍.

显然,电路的刘维尔方程类似含时薛定谔方程,  $i\mathcal{L}$  具有哈密顿量的地位. 此方程具有形为  $\Phi(t) = \Phi e^{-i\tilde{\omega}t}$  的稳态解,其中  $i\mathcal{L}$  的本征值  $\tilde{\omega}$  即为电路的本征频率,模拟格点模型的本征能  $E_n$ <sup>[122,130]</sup>; 矢量  $\Phi(t)$  反映电路中电压随时间的演化情况,模拟格点模型中量子态的动力学<sup>[131]</sup>.

### 3.1.3 耦合模理论

因为格点模型直接来源于凝聚态物理中的紧束缚近似 (即将不同的原子轨道弱耦合在一起),所以同样可以用电路重构类似的近似过程:将多个具有独自振荡频率的 RLC 电路,通过某种形式的弱耦合连接起来,从而模拟格点模型. 这种近似方法被称为耦合模理论<sup>[114–116]</sup>.

为了清楚地展示耦合模理论的近似过程,这里选取通过电感元件间的互感  $M$  耦合的两个 RLC 回路作为例子<sup>[115]</sup>,如图 4 所示. 根据基尔霍夫电压定律,可得

$$i\omega(LI_{l,r} + MI_{r,l}) + R_{l,r}I_{l,r} + \frac{I_{l,r}}{i\omega C} = 0, \quad (24)$$

其中,电阻  $R_{l,r} = \mp R$  (关于负电阻的实现可参见 3.2 节),且设参数  $R, L, C, M$  均为正数. 定义特征量  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\gamma = R\sqrt{C/L}$  和  $\mu = M/L$ , 则 (24) 式可改写为

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + i\frac{\gamma\omega_0}{\omega} & \mu \\ \mu & 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - i\frac{\gamma\omega_0}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

当考虑弱耦合的情况时,即

$$\mu \ll 1, \quad \gamma \ll 1, \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \ll 1, \quad (26)$$

(25) 式可化为

$$\begin{pmatrix} \omega - \omega_0 + i\frac{\gamma\omega_0}{2} & \frac{\mu\omega_0}{2} \\ \frac{\mu\omega_0}{2} & \omega - \omega_0 - i\frac{\gamma\omega_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \end{pmatrix} = 0. \quad (27)$$

此方程等价于振荡电流  $I_{l,r}(t) = I_{l,r}e^{i\omega t}$  所满足的耦合模方程:

$$i\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_l(t) \\ I_r(t) \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} I_l(t) \\ I_r(t) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

其中,

$$\mathcal{H} = \omega_0 \begin{pmatrix} -1 + i\gamma/2 & \mu/2 \\ \mu/2 & -1 - i\gamma/2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

显然, (28) 式与含时薛定谔方程形式一致,可以用来模拟相应的动力学以及稳态性质.

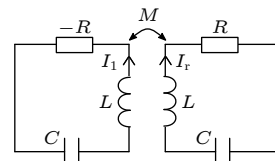


图 4 二聚体电路示意图<sup>[132]</sup>. 由电感耦合的两个 RLC 回路构成,其中  $M$  为互感,  $-R$  代表负电阻

Fig. 4. The sketch of the dimer circuit consisting of two inductively coupled RLC tanks<sup>[132]</sup>, where  $M$  is the mutual inductance and  $-R$  represents a negative resistance.

值得注意的是,电路的耦合模方程 (28) 与刘维尔方程 (23) 的形式相同,但却没有增加变量的个数,这是因为耦合模理论在弱耦合近似下将 (25) 式中  $\omega$  的平方项降成了 (27) 式中的线性项,等价于将基尔霍夫方程 (15) 中关于时间的二阶导数降到了一阶. 这便是耦合模理论能直接模拟含时

薛定谔方程的原因. 由于弱耦合近似 (26) 式的限制, 耦合模理论适用范围较窄. 目前在电路系统中主要用于高灵敏 EP 传感器的设计 [114–116,130].

### 3.2 非厄米在经典电路中的引入

为了用经典电路模拟非厄米格点模型, 需要在以上电路理论中引入等效的非厄米项, 主要包括格点上的复在位势和格点间的非互易跃迁, 分别对应于哈密顿量矩阵中的复对角元和不满足复共轭关系的非对角元, 它们均可以使描述系统的矩阵失去厄米性.

#### 3.2.1 损耗和增益

由于电阻天然的耗散属性, 在电路中引入非厄米最自然且最简单的方式就是加入电阻. 根据电路的拉普拉斯形式, 在电路中添加电阻或等效的负电阻可以模拟非厄米格点模型中的损耗或增益, 使得  $i\mathcal{J} \neq (i\mathcal{J})^\dagger$ . 具体地, 由 (16) 式和 (17) 式可知, 节点对地的电阻  $R_{ng}$  使  $i\mathcal{J}$  的对角元产生虚部, 可以模拟格点的复在位势; 节点间的电阻  $R_{nm}$  则会在对角元和非对角元上同时引入虚部, 额外模拟格点间的复跃迁 [118].

由此可知, 电阻的引入产生损耗, 但如要产生增益, 需引入等效的负电阻. 文献 [133] 给出了利用运算放大器 (简称运放) 实现一般负阻抗 (负电阻是其特殊情况) 的方案, 如图 5(a) 所示, 其中包括对地端口 (上) 和两端口间 (下) 的负阻抗方案,

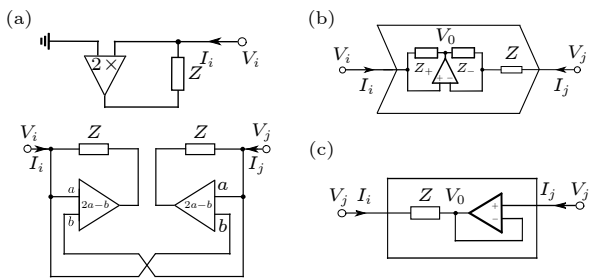


图 5 (a) 负阻抗的电路原理图 [133], 上下图分别表示对地端口和自由双端口的情况; (b) INIC 的电路原理图 [137]; (c) 电压跟随器的电路原理图 [136]. 以上所用运放的等效增益函数可用加法器和乘法器实现

Fig. 5. (a) The schematic circuit for negative impedance [133], where the upper and lower panels represent the one-port and two-port cases, respectively; (b) the schematic circuit for INIC [137]; (c) the schematic circuit for a voltage follower [136]. The equivalent gain functions of the operational amplifiers used above can be implemented using adders and multipliers.

其阻抗值可由基尔霍夫电流定律分别求得

$$Z_{ig} \equiv \frac{V_i}{I_i} = -Z, \quad Z_{ij} \equiv \frac{V_i - V_j}{I_i} = -Z = Z_{ji}, \quad (30)$$

其中,  $Z$  为需要变负值的目标阻抗. 图中运放的等效增益函数可用简单的加法器和乘法器实现. 应用负电阻的典型实例是对 PT 对称破缺的电路模拟 [113,134,135].

#### 3.2.2 非互易跃迁

相比于增益/损耗, 非互易跃迁的实现更具有挑战性. 在交流源的驱动下, 被动元件 (如电阻、电容和电感) 的阻抗/导纳值都与测量方向无关, 即被动元件是互易的 (reciprocal). 为了使电路元件具有非互易性, 从而实现对格点间非互易跃迁的模拟, 必须引入主动元件打破其互易性.

实验上常见的方案是使用电流型负阻抗变换器 (negative impedance converter with current inversion, INIC) [136], 它由运放和若干线性元件组成, 其原理如图 5(b) 所示. 由基尔霍夫定律易得

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = Z^{-1} \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_j \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中  $\beta = Z_-/Z_+$ . 当  $\beta = 1$  时, 不同端口测量的导纳反号, 即  $Y_{ij} \equiv Z_{ij}^{-1} = I_i/(V_i - V_j) = -Z^{-1} = -Y_{ji}$ . 将此 INIC 与被动元件 X (设导纳为  $Y_X$ ) 并联后再置于节点间, 便实现非互易跃迁的效果, 即  $Y'_{ij} = Y_X - Z^{-1}$  和  $Y'_{ji} = Y_X + Z^{-1}$ . 在用经典电路模拟格点模型方面, INIC 最早用于打破时间反演对称性 [137], 之后被应用到模拟具有非互易跃迁的非厄米格点模型的实验中, 观测到了与非厄米趋肤效应相关的现象 [41,119,121,123,125,128,138]. 当 INIC 对地连接时, 其效果与负电阻类似, 也常被用作模拟具有复在位势能的非厄米模型 [74,114,122].

此外, 电压跟随器 (voltage follower) [136] 也可以用来实现非互易跃迁, 如图 5(c) 所示. 根据理想运放正负两输入端口的电压相同的特点, 当负输入端口与输出端口相连时, 输出端口的电压  $V_0$  则与正输入端口的电压  $V_j$  相同, 从而实现电压跟随. 由此可得,  $Y_{ij} = I_i/(V_i - V_j) = Z^{-1}$ . 又由于理想运放的输入阻抗趋于无穷大, 导致  $I_j \sim 0$ , 所以  $Y_{ji} = I_j/(V_j - V_i) \sim 0$ . 显然,  $Y_{ij} \neq Y_{ji}$ . 将电压跟随器与被动元件并联同样能实现非互易跃迁的效果 [124,139], 尤其是对单向跃迁 (unidirectional hopping) 的实现 [129], 相比 INIC 更为简单.

### 3.3 经典电路中物理量的测量与表征

建立好经典电路对非厄米格点模型的映射后,则需要考虑如何通过电路测量反映模型中的物理性质.在非厄米系统中,大家主要关心的是复能谱和本征态以及由它们所构造的各种物理量等静态性质,或者是量子态演化等动力学性质.因此,本节将概述经典电路实验中常用的测量方法与物理量之间的对应.

#### 3.3.1 导纳矩阵

根据电路的拉普拉斯形式,测量出导纳谱  $\{j_n\}$  便可得到相应格点模型能谱  $\{E_n\}$  的信息.但导纳谱通常无法被直接测量,因为根据导纳矩阵的定义 (17) 式,节点电压  $\mathcal{V}$  对节点输入电流  $\mathcal{I}$  的响应直接反映的是电路格林函数  $\mathcal{G}$ .所以,可以先测出电路格林函数,再根据  $\mathcal{J} = \mathcal{G}^{-1}$  得到导纳矩阵,进而将其对角化得到导纳谱.

下面介绍如何测量电路格林函数.假设电路有  $N$  个节点,如果仅在第  $j$  节点注入频率为  $\omega$  的交变电流  $I_j e^{i\omega t}$ ,由  $\mathcal{V} = \mathcal{G}\mathcal{I}$  可得稳态响应电压的幅矢量为

$$\mathcal{V} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{1j} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{Nj} \end{pmatrix} I_j. \quad (32)$$

于是通过测量每个节点的稳态电压幅  $V_i$ ,便可得到电路格林函数第  $j$  列的矩阵元  $\mathcal{G}_{ij} = V_i/I_j$ .当以相同的频率对电路中所有节点遍历上述电流驱动,利用频谱分析仪测量每次驱动下所有节点的稳态电压幅,即可完全重构电路格林函数,进而得到导纳矩阵 [38].这个过程所需要的总的测量次数为  $N^2$ .而对于具有平移不变性的周期性电路而言,仅需遍历一个电路原胞即可,测量次数可以减少到  $N^2/N_c$ ,其中  $N_c$  表示原胞数 [41].将得到的导纳矩阵  $\mathcal{J}$  对角化,便可得到本征值  $j_n$  和左右本征矢  $v_n^{(l,r)}$  以及由它们所构成的其他静态物理量;本征频率  $\tilde{\omega}$  也可以通过  $\det[\mathcal{J}(\tilde{\omega})] = 0$  得到.

在实验中更高效的方法是,利用矢量网络分析仪 (vector network analyzer, VNA) 对电路各节点的散射信号进行扫描,再将包含散射信息的 S 参数矩

阵 (S-parameter matrix) 变换到导纳矩阵,便可计算出电路的导纳谱和本征频率谱 [114,115,130,132,134,139–142].

另外,如果仅是定性地表征导纳矩阵本征矢的特性,也可以直接测量各个节点对交变电流的电压响应 [41].根据下式

$$\mathcal{V} = \mathcal{G}\mathcal{I} = \sum_n j_n^{-1} v_n^{(r)} \left[ v_n^{(l)*} \mathcal{I} \right] \quad (33)$$

可知,电压响应  $\mathcal{V}$  是所有导纳矩阵右本征矢的某种线性叠加.据此可以从电压在节点间的分布粗略判断系统是否发生类似非厄米趋肤效应或安德森局域化的现象 [117].

#### 3.3.2 两点间阻抗

电路实验中也经常通过测量两点间阻抗 (two-point impedance) 来表征所关心的模拟量的性质.节点  $i$  到  $j$  的阻抗  $Z_{ij}$  可以通过输入交变电流  $I_i e^{i\omega t}$  并测量两节点的响应电压  $V_i e^{i\omega t}$  和  $V_j e^{i\omega t}$  得到.利用 (20) 式中导纳矩阵  $\mathcal{J}$  的本征值  $j_n$  和本征矢  $v_n^{(l,r)}$ ,可以将两点间阻抗表示为 [143]

$$\begin{aligned} Z_{ij} &\equiv \frac{V_i - V_j}{I_i} = \sum_k \frac{\mathcal{G}_{ik} I_k - \mathcal{G}_{jk} I_k}{I_i} \\ &= \sum_n \frac{[v_{ni}^{(l)*} + v_{nj}^{(l)*} I_j/I_i] [v_{ni}^{(r)} - v_{nj}^{(r)}]}{j_n}. \end{aligned} \quad (34)$$

其中,  $v_{ni}^{(l,r)}$  代表  $v_n^{(l,r)}$  的第  $i$  个矩阵元. (34) 式说明,当驱动频率  $\omega$  接近电路的某个本征频率  $\tilde{\omega}$  时,阻抗  $Z_{ij}$  将由值很小的  $j_n(\omega \sim \tilde{\omega})$  项主导从而趋于发散,即  $Z_{ij}(\omega)$  在  $\tilde{\omega}$  处出现共振峰.更简单的方案是测量对地阻抗,即令 (34) 式中的  $v_{ng}^{(l,r)} = 0$ ,可得

$$Z_{ig} \equiv \frac{V_i}{I_i} = \sum_n j_n^{-1} v_{ni}^{(l)*} v_{ni}^{(r)}. \quad (35)$$

这样可以通过对每个节点扫频测得两点间阻抗的共振峰的位置,从而确定电路的本征频率谱.固定本征频率  $\tilde{\omega}$ ,测量对地阻抗  $Z_{ig}(\tilde{\omega})$  随节点  $i$  的变化也反映了导纳本征矢  $v_{ni}^{(l,r)}(\tilde{\omega})$  (即电路的本征电压) 在节点间的分布特点,常被应用于拓扑边缘态和非厄米趋肤效应 [35,74,119,128,144,145] 以及高阶拓角态 [126,127,146] 的测量.不过需要注意的是,本方法只适用于本征频率谱为近实谱 (即本征频率的虚部很小) 的情况,因为扫描频率  $\omega$  只能是实数.

#### 3.3.3 动力学

前两种测量主要模拟的是格点模型的静态性

质, 对于动力学性质的模拟, 可直接利用电路的刘维尔方程 (23)<sup>[131,137,147]</sup> 或耦合模方程 (28)<sup>[114,115,130]</sup>, 类比格点模型的含时薛定谔方程. 此类测量非常简单, 只要按模拟需求给电路各节点注入相应的初始电压或电流, 随后测量其随时间的变化即可.

利用动力学也能验证格点模型的部分静态性质. 比如利用导纳矩阵根据  $\det[\mathcal{J}(\tilde{\omega})] = 0$  已得到了系统的本征频率  $\tilde{\omega}$  (一般为复数), 通过动力学的办法可以观测到此本征频率且判断其正确性. 方法是, 将与本征频率  $\tilde{\omega}$  相应的本征电压  $v_0$  设为电路的初态, 随后撤掉外部源, 则初态将会按照刘维尔方程 (23) 进行演化, 其任意时刻的电压应满足:

$$V(t) = v_0 e^{i\tilde{\omega}t} = v_0 e^{-\text{Im}(\tilde{\omega})t} e^{i\text{Re}(\tilde{\omega})t}. \quad (36)$$

因此, 可根据电压随时间的振荡频率和幅值的放大/衰减程度分别拟合出本征频率  $\tilde{\omega}$  的实部和虚部, 与理论相比较<sup>[122,135,148]</sup>.

虽然电压的动力学行为并不是遵从于导纳矩阵  $\mathcal{J}(\tilde{\omega})$  的本征值  $j_n(\tilde{\omega})$ , 而是依赖于本征频率  $\tilde{\omega}$ , 但是由于本征频率谱与导纳谱结构上的相似性, 可以用本征电压的动力学定性的反映导纳矩阵本征矢的动力学, 进而模拟相关的行为, 例如拓扑边缘态和非厄米趋肤效应的动力学行为<sup>[137,147]</sup> 以及场相干的演化<sup>[127]</sup> 等.

#### 4 经典电路模拟非厄米格点模型的实验进展

目前, 人们利用经典电路在实验上已经成功模拟和观测了非厄米格点模型的许多性质. 本节将

从 PT 对称破缺、多种非厄米趋肤效应、其他非厄米拓扑态以及 EP 在传感器上的应用这 4 个方面介绍相关的实验进展.

##### 4.1 PT 对称破缺

PT 对称破缺是非厄米系统所独有的现象. 在经典电路实验中, 人们将增益电路与损耗电路耦合形成二聚体 (dimer) 电路<sup>[113,133,135,148]</sup> 或者在二聚体电路中进一步添加一个中性电路构成的三聚体 (trimer) 电路<sup>[130,141]</sup>, 观测电路的本征频率谱随增益/损耗强度的变化, 从而对 PT 对称破缺进行研究. 本节将从不同的电路模型出发对相关实验进展进行介绍.

最早在电路平台上研究 PT 对称破缺的是 Schindler 等<sup>[113]</sup>. 他们在 2011 年设计了一个由一对 RLC 电路耦合形成的二聚体电路 [图 6(a)]<sup>[133]</sup>, 其中增益和损耗部分分别由接地运放和电阻实现. 他们根据基尔霍夫定律写出描述电量和电流变化的刘维尔方程 (23) 式, 建立起与含时薛定谔方程的对应关系, 在实验上观测本征频率随增益/损耗强度的变化. 如图 6(b) 所示, 在  $\gamma/\gamma_{PT} > 1$  时, 观测到复本征频率出现, 对应于 PT 对称破缺. 2017 年, 该研究组<sup>[148]</sup> 基于 Floquet 理论对一系列由 EP 分隔开的 PT 对称相与 PT 对称破缺相进行了研究. 他们在增益电路中用光电池 (photocell) 连接金属-氧化物场效应晶体管 (MOSFET) 的源极与电感, 并将 MOSFET 的漏极接入振荡电路. 当光电池两端的电压降低时, 其电流会流入电路, 从而实现增益. 在损耗电路中使用接地的光电池连接电感,

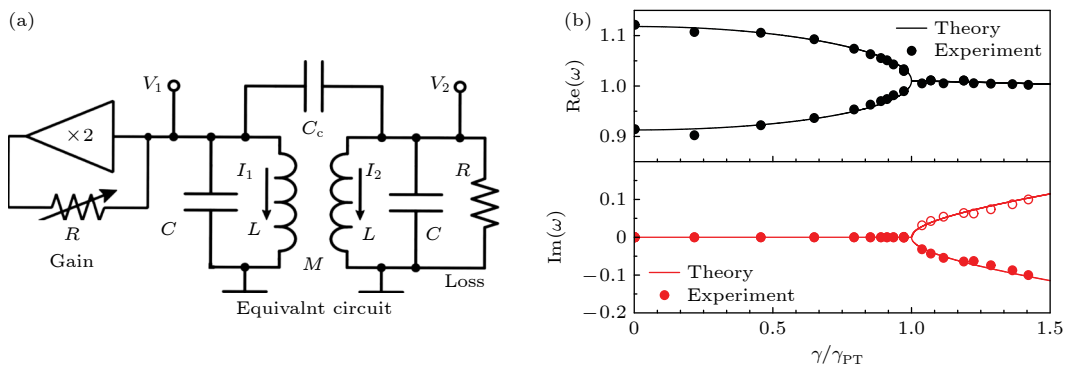


图 6 (a) PT 对称的二聚体电路, 电路中的增益和损耗部分通过电容或互感耦合; (b) 实验测量的本征频率随着增益/损耗参数  $\gamma/\gamma_{PT}$  的变换, 在  $\gamma/\gamma_{PT} = 1$  时发生 PT 对称破缺. 图来源于文献<sup>[113]</sup>, 版权属于美国物理学会

Fig. 6. (a) Circuit diagram of a PT-symmetric dimer, where the gain and loss parts are capacitively or inductively coupled; (b) experimentally measured eigenfrequencies versus the gain/loss parameter  $\gamma/\gamma_{PT}$ , where the PT symmetry breaking occurs at  $\gamma/\gamma_{PT} = 1$ . All figures are adapted from Ref.[113] with the copyright © 2011 by the American Physical Society.

其电流由于接地会耗散, 从而实现损耗. 利用变容二极管 (varactor diode) 耦合增益电路与损耗电路, 实现对电路耦合强度的控制.

2020年, Wang等<sup>[135]</sup>利用接地的 INIC 实现等效负阻抗, 搭建了由两个 RLC 回路组成的对称二聚体电路, 在频谱中观测到一阶和二阶 EP 以及 PT 对称相和 PT 对称破缺相. 次年, Zhou等<sup>[115]</sup>同样搭建了由两个 RLC 回路耦合的二聚体电路, 基于耦合模理论 (25) 式对格点模型进行模拟, 研究了微扰对 PT 对称系统的影响. 实验将 VNA 的输入端连接到电路实现等效的负阻抗, 同时将另一端连接到读取器 (reader) 中测量频率. VNA 自身带有阻抗, 连接输入源端口到闭合回路中可以输入电能, 在电路中可以起到增益的作用.

随着人们对于 PT 对称认识的加深, 对其模拟的电路平台不仅局限于二聚体电路. 三聚体电路由于中性电路的加入具有更强的可扩展性, 同样也是重要的模拟平台. 2019年, Sakhdari等<sup>[141]</sup>在原来的二聚体电路之间添加了一个 LC 振荡电路, 并利用 VNA 实现等效负阻抗并同时进行频率测量. 他们比较了二聚体与三聚体电路的实验结果, 观测到三聚体频谱中接近发散 EP (divergent exceptional points, DEP) 的频率偏移程度较二聚体更大. 2023年, Yin等<sup>[130]</sup>采用了与 Zhou等<sup>[115]</sup>类似的方法, 利用 VNA 同时实现负阻抗与测量, 构建了一个由 3 个 RLC 回路耦合的三聚体电路, 并观测到环绕周期为 3 的三阶 EP.

除了二聚体或三聚体电路之外, 2021年, Stegmaier等<sup>[120]</sup>构建了一个类 SSH 模型的电路来研究 PT 对称性. 他们根据电路的拉普拉斯形式 (17) 式, 利用导纳矩阵建立起电路与格点模型之间的对应关系. 他们在电路的每个节点上添加接地电阻以实现格点上的增益和损耗, 并测量了不同增益和损耗强度下的导纳谱. 通过这些测量, 他们观察到了 PT 对称、PT 对称破缺和反 PT 对称这 3 种情况. 该实验为研究 PT 对称破缺提供了一个新的平台, 并为进一步将 EP 应用在传感器上提供了新的思路.

## 4.2 多种非厄米趋肤效应

非互易跃迁往往可以诱导出非厄米趋肤效应, 从而导致传统体边对应关系的失效. 在经典电路的实验中, 研究者们通常在电路节点间加入 INIC<sup>[41,74,121,123,127,138,145,146]</sup> 或电压跟随器<sup>[119,124,129]</sup>

等主动元件实现对非互易跃迁的模拟, 通过电路中电压响应的分布观测非厄米趋肤效应. 目前, 利用经典电路已实现对非厄米系统中多种非厄米趋肤效应及相关奇异现象的研究和模拟, 包括一维非厄米趋肤效应和传统体边对应关系的失效<sup>[41,119]</sup>、非布洛赫波的演化和广义布里渊区<sup>[127]</sup>、高维非厄米趋肤效应<sup>[118]</sup>、高阶非厄米趋肤效应<sup>[121,124,128]</sup>、多体非厄米趋肤效应<sup>[123]</sup>、临界非厄米趋肤效应<sup>[125]</sup>以及尺寸依赖的非厄米趋肤效应<sup>[129]</sup>等.

2020年, Helbig等<sup>[41]</sup>首次在电路实验中观测到传统体边对应关系的失效与非厄米趋肤效应的出现. 他们研究了一维非厄米 SSH 模型, 在电路节点间加入 INIC 实现对等效的非互易跃迁的模拟, 并通过电路的拉普拉斯形式 (17) 式建立起导纳矩阵与 SSH 模型的对应关系. 他们利用测量节点电压响应的方法 (33) 式, 对电路中所有节点施加了电流驱动, 测量各节点上的电压响应, 观测到节点上的电压响应局域在电路的一侧边界, 即在该电路中实现了非厄米趋肤效应. 次年, Liu等<sup>[119]</sup>利用电压跟随器构建了具有非互易跃迁的 SSH 电路. 他们观察到由传统体边对应关系失效引起的电路本征频率谱的变化. 与此同时, 他们基于广义布里渊区的理论对能量缠绕数 (13) 式进行了计算, 验证了这种新的体边对应关系.

非厄米趋肤效应本质上是一种非布洛赫效应. 在经典电路平台上研究者们已经实现了非布洛赫波的演化及对广义布里渊区的验证. 2023年, Wu等<sup>[127]</sup>构建了如图 7(a) 所示的二维电路来观测非布洛赫动力学. 实验中, 他们利用 INIC 实现了格点间等效的非互易跃迁, 利用傅里叶变换场扫描 (Fourier-transformed field scan) 的方法对节点的电压分布进行测量, 将其进行拉普拉斯变换 (Laplace transform) 后得到在广义布里渊区的分布 [图 7(b)], 结果与理论一致. 由此验证了广义布里渊区在描述非布洛赫动力学上的有效性.

人们在经典电路实验里还研究了更多影响非厄米趋肤效应的因素. 2022年, Zhang等<sup>[125]</sup>研究了一个由两条 Hatano-Nelson 链耦合成的类梯子模型. 他们在实验中测量了在开边界和周期边界条件下各节点的阻抗, 发现当节点数增多到一定程度时, 周期边界的阻抗与开边界的阻抗比值明显大于 1, 进一步表明边界连接对远距离的阻抗响应应具有非局域的影响, 即具有临界非厄米趋肤效应.

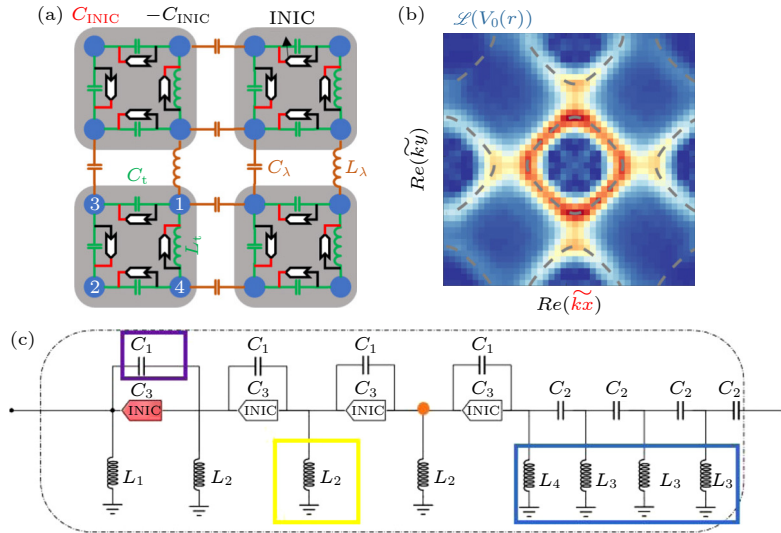


图 7 (a) 非布洛赫演化的拓扑电路; (b) 实验测得的电压分布经拉普拉斯变换后在广义布里渊区中的等频分布; (c) 四次方根非厄米 SSH 模型的电路图. 图 (a) 和 (b) 来源于文献 [127], 图 (c) 来源于文献 [145]. 版权属于美国物理学会

Fig. 7. (a) Topological circuit for the non-Bloch dynamics; (b) the isofrequency contour of the measured voltage distribution through the Laplace transform in the GBZ; (c) circuit diagram of a 4th-root non-Hermitian SSH model. Subfigures (a) and (b) are adapted from Ref. [127], and Figure (c) from Ref. [145]. Copyright © 2023 and 2022 by the American Physical Society.

2023 年, Su 等<sup>[129]</sup>在电路平台上对单向跃迁的格点模型进行了研究. 他们利用电压跟随器在电路中模拟单向跃迁, 并在不同的节点数量下测量了导纳谱研究发现随着节点数目的增多, 集中在一侧的局域化程度会降低, 实现了对尺寸依赖的非厄米趋肤效应的观测. 同年, 他们也对非厄米趋肤效应与安德森局域化之间的竞争进行了研究<sup>[149]</sup>. 实验仅采用了线性元件, 通过赋予元件幂指数变化的参数值以模拟格点间的非互易跃迁, 成功实现了非厄米趋肤效应. 在引入准无序后成功观测到非厄米趋肤效应与安德森局域化的竞争, 发现当无序强度足够大时, 本征态从非厄米趋肤相转变为局域相. 类似地, Tang 等<sup>[146]</sup>基于二维非互易蜂窝 (honeycomb) 电路对非厄米趋肤效应与角态之间的竞争关系进行了研究. 实验中, 他们通过调整 INIC 里电容的大小以改变非互易强度, 并对电路节点的电压响应进行测量, 发现随着非互易强度的增强, 节点电压会从电路两端逐渐转移到同一端, 呈现出角态的特征.

随着对非厄米趋肤效应研究的不断深入以及经典电路模拟方法的不断发展, 研究者们开始将对非厄米趋肤效应的经典电路模拟推向高维、高阶以及多体等更为复杂的系统. 2021 年, Zou 等<sup>[121]</sup>基于电路的拉普拉斯形式 (17) 式, 分别建立了电路的导纳矩阵与二维格点模型以及三维格点模型之间

的对应关系. 对杂化高阶拓扑趋肤效应 (hybrid higher-order topological skin effect) 进行了研究. 杂化高阶拓扑趋肤效应是在高维系统中, 由非厄米趋肤效应以及拓扑局域态相互影响所形成的一种拓扑现象<sup>[150]</sup>. 实验中, 他们在电路耦合处引入 INIC 实现等效的非互易跃迁, 继而测量各节点上的电压响应分布, 通过调整 INIC 的连接方向实现不同的杂化方式, 观测到二阶杂化趋肤-拓扑效应 (即电压集中分布在二维平面中的一组对角节点)、二阶杂化趋肤-趋肤效应 (即电压分布在二维平面中的其中一个角节点上)、三阶杂化趋肤-趋肤-趋肤效应 (即电压集中分布在三维立体中的角节点上) 以及三阶杂化趋肤-拓扑-拓扑效应 (即电压分布在一对平面上的对角节点上). 2022 年, Deng 等<sup>[145]</sup>研究了一个一维  $N$  次方根非厄米 SSH 模型 [图 7(c)], 其中  $N$  的大小可以通过调整原胞内电容电感等元器件的数目实现. 实验中, 他们选择了不同的  $N$  对节点电压进行测量, 观测到电压分布集中在电路节点的一侧, 即出现了非厄米趋肤效应, 并发现非厄米趋肤效应随  $N$  的增大变得更加明显. 同年, 他们还对一个一维三粒子 Bose-Hubbard 模型进行了研究<sup>[123]</sup>. 他们将此模型的本征态在希尔伯特空间中重新表示为 Fock 态的形式后, 写出系统的薛定谔方程, 并根据基尔霍夫定律直接构造电路模拟该薛定谔方程. 该团队测量了节点上的阻抗分布, 发现

阻抗值集中在一个节点上, 观察到了多体系统中由阻抗表征的非厄米趋肤效应, 这被称为非厄米聚集效应 (non-Hermitian aggregation effect). 2023 年, 他们在三维电路系统中基于 INIC 设计了一个拓扑开关, 也可以用于研究非厄米趋肤效应<sup>[138]</sup>.

2022 年, Shang 等<sup>[124]</sup> 研究了一个二维的非互易格点模型, 他们在实验中计算了二维的非布洛赫能量缠绕数, 发现由其表征的二阶非厄米趋肤效应. 2023 年, Zhu 等<sup>[126]</sup> 构建了一个具有二阶手性的二维电路. 他们利用标准电阻引入非厄米项, 重构电路格林函数以测量每个节点的电压响应, 观测到阻抗的响应集中在边界局域态上, 展示了二维二阶非厄米趋肤效应.

基于经典电路平台同样可以实现互易非厄米趋肤效应. 2020 年, Hofmann 等<sup>[118]</sup> 通过在二维电路中的对角节点连接电阻引入非厄米, 研究了一个具有  $\pi$ -通量的格点模型. 实验中, 他们测量并计算了导纳矩阵本征矢 [由 (20) 式定义] 的倒参与率 (inverse participation ratio), 对动量空间中  $k_y$  方向上的局域态进行了研究, 观察到在  $k_y = \pi/2$ ,  $k_y = 3\pi/2$  处的局域化程度最高, 与理论预测的非厄米  $\pi$ -通量模型呈现出互易趋肤效应时的特征相同.

### 4.3 其他非厄米拓扑态

在用经典电路模拟非厄米趋肤效应的同时, 人们也对其他非厄米拓扑物态进行了模拟, 包括单纯由增益/耗损诱导的非厄米拓扑态<sup>[74]</sup>、非厄米连续谱中的束缚态 (bound state in the continuum)<sup>[144]</sup>、杂化高阶趋肤拓扑态<sup>[121]</sup>、高阶拓扑角态<sup>[122,127]</sup>、N 次方根拓扑相<sup>[145]</sup>、二阶手性系统中的拓扑态及动力学<sup>[126]</sup>、非厄米拓扑开关<sup>[138]</sup> 以及非厄米 Hopf 束<sup>[128]</sup> 等.

2020 年, Liu 等<sup>[74]</sup> 首次实现了单纯由增益/损耗诱导的一维非厄米拓扑模型 [图 8(a)]. 他们在电路 [图 8(b)] 中引入 INIC 实现等效负电阻, 通过调控接地电阻  $R_0$  以及代表增益 (损耗) 的正 (负) 电阻  $R_1$  ( $R_2$ ), 可观测到不同的拓扑相. 同年, Li 等<sup>[144]</sup> 利用电路研究了一个由两条 SSH 链耦合构成的梯子模型, 在两条链之间引入耦合电阻使其变成非厄米模型. 实验中, 他们测量了特定节点上的阻抗随输入频率的变化, 发现阻抗的峰值处于特定频率, 对应于非厄米连续谱中的束缚态.

2021 年, Zou 等<sup>[121]</sup> 设计了一个二维格点模型, 对杂化二阶趋肤-拓扑态进行了研究. 实验中, 他们设计了 3 种不同的 INIC, 并通过改变节点间 INIC 的连接方向实现对趋肤-趋肤和趋肤-拓扑两种态的模拟. 通过测量不同输入频率下电路节点的电压响应, 观测到在杂化二阶趋肤-拓扑或趋肤-趋肤情况下的角态、边缘态以及体态. 杂化趋肤-拓扑态可被用于拓扑开关的设计上<sup>[151]</sup>, 可以通过控制电路内的能量传递实现对趋肤效应的“开关”<sup>[121]</sup>. 2023 年, Zhang 等<sup>[138]</sup> 在电路实验中实现拓扑开关. 他们在节点间连接 INIC 实现对非互易跃迁的模拟, 观测到在三维系统中趋肤-拓扑-趋肤效应以及趋肤-拓扑-拓扑效应之间的转变, 表明利用 INIC 设计拓扑开关的可行性.

2022 年, Wu 等<sup>[43]</sup> 在研究非厄米二维电路的基础上, 设计了一个模拟二阶拓扑绝缘体的二维拓扑电路 [图 9(a)]<sup>[122]</sup>. 实验中, 他们通过电阻引入非厄米项, 并调整两种电阻的大小关系以诱导不同的拓扑态. 通过对电路本征频率以及节点电压响应的测量, 他们观察到带隙中的一维边缘态 [图 9(b)] 以及零维角态 [图 9(c)]. 此外, 他们还测量了在电路的角态、边缘态和体态的阻抗响应随驱动频率的变化 [图 9(d)].

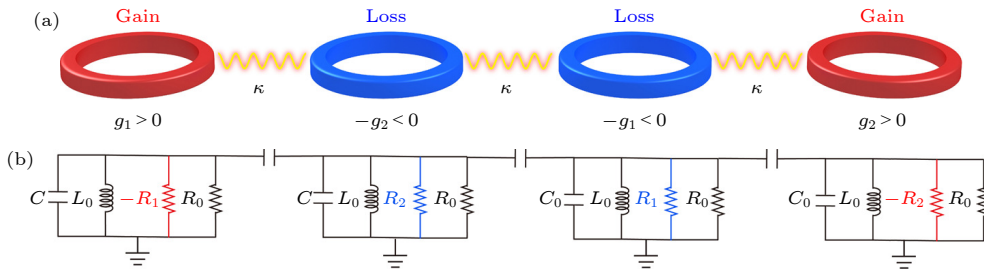


图 8 (a) 单纯由增益/损耗诱导的非厄米拓扑模型; (b) 实现 (a) 中模型的电路图. 图均来源于文献 [74], 版权属于美国物理学会  
 Fig. 8. (a) A non-Hermitian topological model whose topology is purely induced by gain/loss; (b) circuit diagram for the realization of the model in (a). All figures are adapted from Ref.[74] with the copyright © 2020 by the American Physical Society.

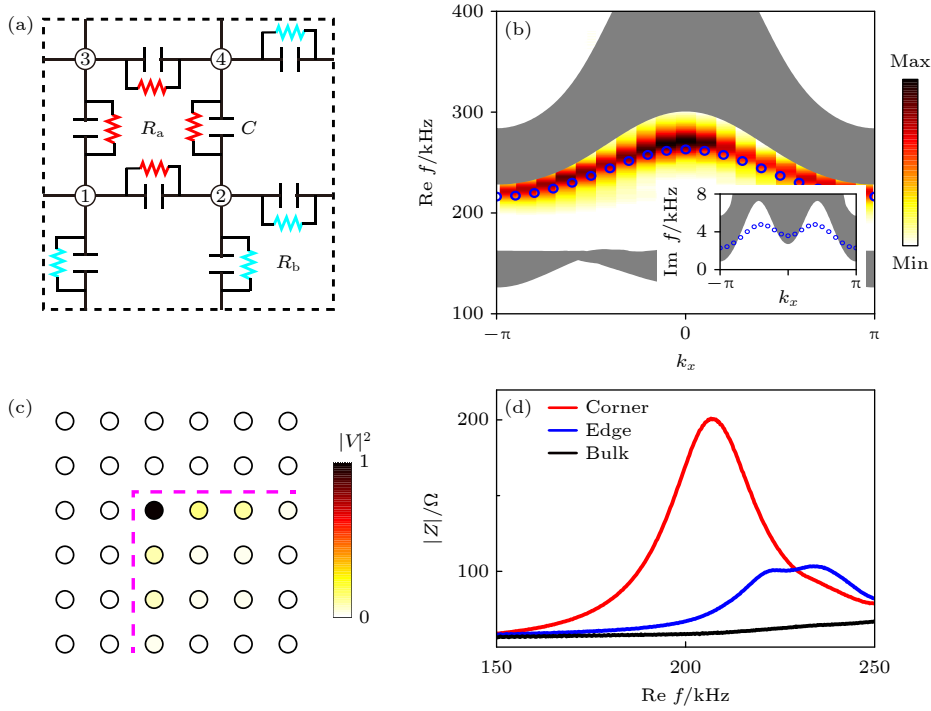


图 9 (a) 非厄米二阶拓扑电路的原胞示意图; (b) 能隙间的一维边缘态, 彩色和圆圈分别表示实验测量和理论计算的结果; (c) 实验测量的零维角态的电压分布; (d) 实验测量的角态、边缘态和体态的阻抗响应随驱动频率的变化. 图均来源于文献 [122], 版权属于美国物理学会

Fig. 9. (a) Circuit diagram of a unit cell of the non-Hermitian second-order topological electric circuit; (b) one-dimensional gapped edge states, where the color map and the blue circles represent the data from the experiment and the theoretical calculation, respectively; (c) experimental voltage distributions of the zeroth dimensional corner states; (d) experimental impedance responses of corner states, edge states, and bulk states to the driving frequency. All figures are adapted from Ref. [122] with the copyright © 2022 by the American Physical Society.

2023 年, Zhu 等 [126] 构建了一个具有二阶手性的二维电路. 他们利用标准电阻引入非厄米项, 观测到阻抗响应局域在电路节点平面的角、边和体三种情况, 分别表征二阶手性二维格点模型中的角态、边缘态和体态.

#### 4.4 EP 在传感器上的应用

EP 在传感器上的应用与 PT 对称破缺的实验研究密切相关. 实现 EP 传感器的电路一般也采取 PT 对称二聚体电路 [114,115,132,140,142] 或三聚体电路 [116,152] 的结构. 实验中通常采用测得的反射谱 (reflection spectra) 来对传感器的灵敏度进行表征 [116,132,140,142,152], 反射谱的响应越大, 即反射谱曲线中波谷所处位置越深 [图 10(b)], 传感器越灵敏.

2018 年, Chen 等 [140] 成功将 EP 应用于无线压力传感器 (wireless pressure sensor) 中, 该传感器通过电容的阻值对压力进行表征. 在增益电路中, 他们改用了可以调参的电感与损耗电路进行耦合, 由此实现了更一般情况下的 PTX 对称电路,

这里的 X 表示一种互易的标度操作 (reciprocal-scaling operation). 实验中, 他们选择 EP 附近和非 EP 处的多个不同耦合强度来对反射谱进行测量与对比, 观测到在相同频段内, 选在 EP 附近的耦合强度, 反射会更强, 由此表明 EP 可以增强传感器的灵敏度. 在实际压力传感测试中, 实验人员利用 VNA 分别对 PTX 电路、PT 电路以及未应用 EP 的普通传感器的反射谱进行了测量, 在相同的频段内, PTX 电路和 PT 电路都可以增强反射. 由于 PTX 电路相比于 PT 电路具有不同的电路特征模式, 可以放大特定频率的反射系数, 具有更大的操作空间.

2019 年, Dong 等 [114] 在动物表皮层植入用于测量生物体征 (压力, 温度等) 的传感器, 并利用读取器对感应频率的偏移进行了测量, 通过频率偏移变化曲线对测量的物理量进行表征. 实验观测到, 随耦合强度变化的频率偏移在 EP 附近明显增高. 该团队将基于 EP 设计的传感器的灵敏度提升至当时极限的 3.2 倍. 2020 年, Zhou 等 [132] 比较了传

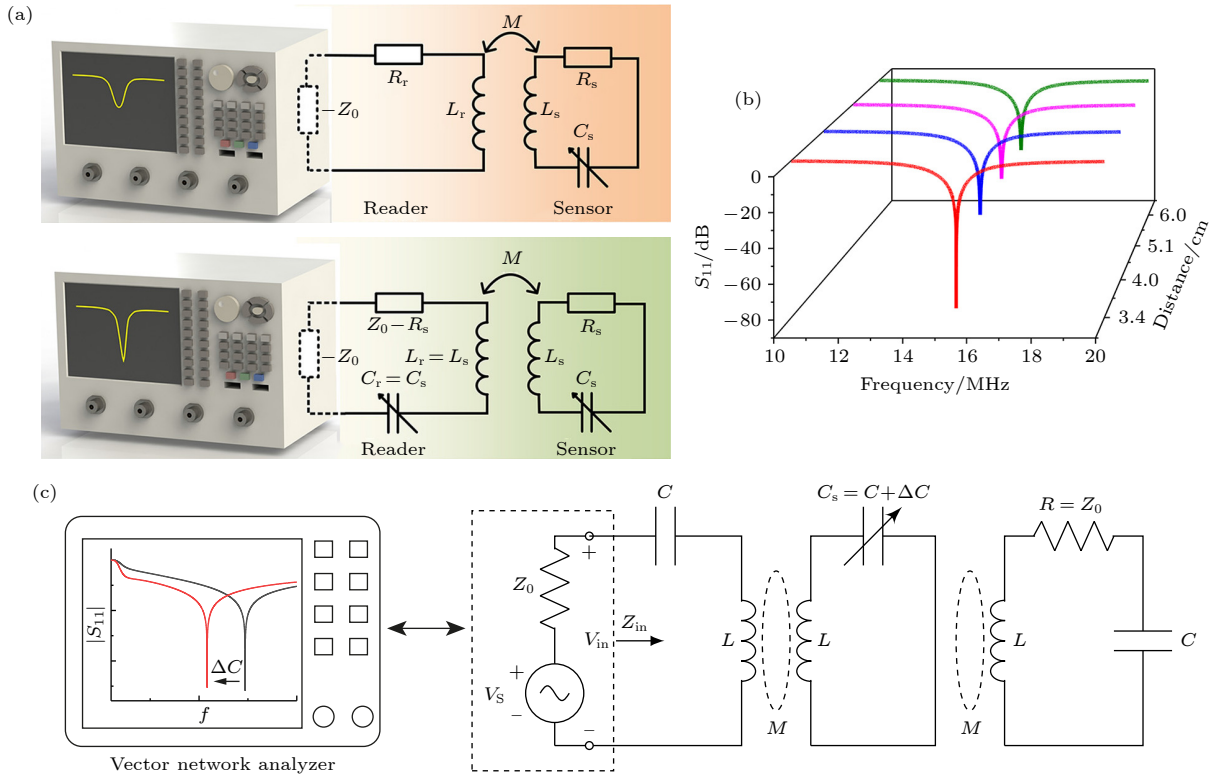


图 10 (a) 传统的被动无线传感器与基于 PT 对称性的被动无线传感器的电路图; (b) 基于 PT 对称性的被动无线传感器的反射谱的测量结果; (c) 具有 PT 对称性的三阶无线传感器的电路图. 图 (a) 和 (b) 来源于文献 [132], 图 (c) 来源于文献 [152], 版权属于美国物理学会

Fig. 10. (a) Circuit diagrams of a conventional passive wireless sensor and a PT-symmetry-based passive wireless sensor; (b) measured reflection spectra for the PT-symmetry-based passive wireless sensor; (c) circuit diagram of a PT symmetric third-order wireless sensing system. Subfigures (a) and (b) are adapted from Ref. [132] and subfigure (c) from Ref. [152], with copyright © 2020 and 2022 by the American Physical Society.

统的被动无线传感器与基于 PT 对称性的被动无线传感器在灵敏度上的差别 [图 10(a)], 根据实验中 VNA 测得的反射谱 [图 10(b)], 在增大传感器距离的同时, 响应仍然能够保持在较强的范围内, 即 EP 可提升传感器的控制距离. 2021 年, Zeng 等 [116] 将三阶 EP 应用到传感器中, 设计了一个三线圈耦合的电路. 与二阶 EP 传感器相比, 实验测得的反射谱反映出高阶 EP 对灵敏度的增强更为显著. 2022 年, Yin 等 [142] 利用运放在增益侧实现了等效的负阻抗, 进而设计了一个不需要引入 VNA 的无线传感器. 得益于运放的非线性饱和效应, 该传感器可以通过观测读取器对电容的阻值进行实时读出. 同年, 他们在二聚体电路的基础上加入了一个由电感与可变电容构成的振荡电路, 设计了一个三聚体电路 [图 10(c)] [152]. 相比于二聚体电路, 三聚体电路测得的反射谱具有更强的响应. 选取多组阻值的电容进行实验, 三聚体电路测得的反射谱稳定在较强的响应区间, 比二聚体电路具有更高的品质

因子 ( $Q$  factor).

SSH 电路同样可应用在 EP 传感器上. 2023 年, Yuan 等 [139] 在实验上采用具有非互易跃迁的 SSH 模型作为平台设计传感器, 原胞内通过电压跟随器实现格点间的非互易跃迁. 该传感器根据电容的阻值以及测得的频率偏移可以对位置、角度以及水位变化高度等物理量进行表征.

非厄米系统中的增益和损耗不可避免地会引入噪声 [153]. 最近, 研究者们注意到在利用 EP 传感器进行信号放大的过程中往往伴随着噪声的增强, 因此亟待解决的问题是如何提高 EP 传感器的信噪比. 噪声增强的来源可分为两种: 一是物理上的, 来源于产生 EP 过程中本征矢的重合; 另一种是技术上的, 来源于 EP 传感器实现中的放大机制 [154]. 物理学家尝试从多个角度解决噪声对 EP 传感器的影响. 理论上, Langbein [155] 在 2018 年讨论了 EP 传感器的量子有限信噪比与扰动, Zhang 等 [153] 在 2019 年提出计算 EP 传感器信噪比的量子噪声

理论; 实验上, Kononchuk 等<sup>[154]</sup>在 2022 年设计了 PT 对称式的机电 EP 传感器等.

## 5 总 结

本文通过简单介绍非厄米物理的基本理论和新奇现象, 结合经典电路模拟的理论基础, 概述了当下经典电路模拟非厄米格点模型的实验进展. 目前的实验进展主要涵盖对 PT 对称破缺、非厄米趋肤效应以及各类新奇非厄米拓扑物态的经典电路模拟. 实验的模拟对象也从简单的一维单体格点模型逐渐推广至高维多体等更复杂的格点模型. 此外, 基于经典电路对非厄米新奇效应的应用也是重要的研究方向, 比如高灵敏度的 EP 传感器等. 相比于量子模拟平台的高技术门槛, 经典电路的低成本、易扩展等特点使其成为模拟和研究丰富的非厄米新奇现象的首选平台, 表现出广阔的研究和应用前景.

## 参考文献

- [1] Feynman R P 1982 *Int. J. Theor. Phys.* **21** 467
- [2] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [3] Billy J, Josse V, Zuo Z, Bernard A, Hambrecht B, Lugan P, Clement D, Sanchez-Palencia L, Bouyer P, Aspect A 2008 *Nature* **453** 891
- [4] Zhang D W, Zhu Y Q, Zhao Y X, Yan H, Zhu S L 2018 *Adv. Phys.* **67** 253
- [5] Friedenauer A, Schmitz H, Glueckert J T, Porras D, Schaetz T 2008 *Nat. Phys.* **4** 757
- [6] Barreiro J T, Müller M, Schindler P, Nigg D, Monz T, Chwalla M, Hennrich M, Roos C F, Zoller P, Blatt R 2011 *Nature* **470** 486
- [7] Blatt R, Roos C F 2012 *Nat. Phys.* **8** 277
- [8] You J Q, Shi X F, Hu X, Nori F 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014505
- [9] Georgescu I, Ashhab S, Nori F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 153
- [10] Barends R, Kelly J, Megrant A, Veitia A, Sank D, Jeffrey E, White T C, Mutus J, Fowler A G, Campbell B, Chen Y, Chen Z, Chiaro B, Dunsworth A, Neill C, O'Malley P, Roushan P, Vainsencher A, Wenner J, Korotkov A N, Cleland A N, Martinis J M 2014 *Nature* **508** 500
- [11] Buluta I, Nori F 2009 *Science* **326** 108
- [12] Ashida Y, Gong Z P, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 249
- [13] Raghu S, Haldane F D M 2008 *Phys. Rev. A* **78** 033834
- [14] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [15] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 196
- [16] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photonics* **7** 1001
- [17] Yan Q, Liu R, Yan Z, Liu B, Chen H, Wang Z, Lu L 2018 *Nat. Phys.* **14** 461
- [18] Ozawa T, Price H M, Amo A, Goldman N, Hafezi M, Lu L, Rechtsman M C, Schuster D, Simon J, Zilberberg O, Carusotto I 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 015006
- [19] Hussein M I, Leamy M J, Ruzzene M 2014 *Appl. Mech. Rev.* **66** 040802
- [20] Wang P, Lu L, Bertoldi K 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 104302
- [21] Xiao Y X, Ma G, Zhang Z Q, Chan C T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 166803
- [22] Li F, Huang X, Lu J, Ma J, Liu Z 2018 *Nat. Phys.* **14** 30
- [23] Li X X, Li B, Li P B 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 013121
- [24] Li X X, Li P B, Li H R, Gao H, Li F L 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 013025
- [25] Kane C L, Lubensky T C 2014 *Nat. Phys.* **10** 39
- [26] Chen B G, Upadhyaya N, Vitelli V 2014 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **111** 13004
- [27] Nash L M, Kleckner D, Read A, Vitelli V, Turner A M, Irvine W T M 2015 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **112** 14495
- [28] Chaunsali R, Kim E, Thakkar A, Kevrekidis P G, Yang J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 024301
- [29] Brandenbourger M, Locsin X, Lerner E, Coulais C 2019 *Nat. Commun.* **10** 4608
- [30] Ghatak A, Brandenbourger M, van Wezel J, Coulais C 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **117** 29561
- [31] Luo K F, Yu R 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 220305 (in Chinese) [罗开发, 余睿 2019 物理学报 **68** 220305]
- [32] Liu S, Zhang S, Cui T J 2021 *Chinese Optics* **14** 736 (in Chinese) [刘硕, 张霜, 崔铁军 2021 中国光学 **14** 736]
- [33] Albert V V, Glazman L I, Jiang L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 173902
- [34] Ningyuan J, Owens C, Sommer A, Schuster D, Simon J 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021031
- [35] Lee C H, Imhof S, Berger C, Bayer F, Brehm J, Molenkamp L W, Kiessling T, Thomale R 2018 *Commun. Phys.* **1** 39
- [36] Imhof S, Berger C, Bayer F, Brehm J, Molenkamp L W, Kiessling T, Schindler F, Lee C H, Greiter M, Neupert T, Thomale R 2018 *Nat. Phys.* **14** 925
- [37] Ezawa M 2018 *Phys. Rev. B* **98** 201402
- [38] Helbig T, Hofmann T, Lee C H, Thomale R, Imhof S, Molenkamp L W, Kiessling T 2019 *Phys. Rev. B* **99** 161114
- [39] Liu S, Gao W, Zhang Q, Ma S, Zhang L, Liu C, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2019 *Research* **2019** 8609875
- [40] Bao J, Zou D, Zhang W, He W, Sun H, Zhang X 2019 *Phys. Rev. B* **100** 201406
- [41] Helbig T, Hofmann T, Imhof S, Abdelghany M, Kiessling T, Molenkamp L W, Lee C H, Szameit A, Greiter M, Thomale R 2020 *Nat. Phys.* **16** 747
- [42] Lee C H, Sutrisno A, Hofmann T, Helbig T, Liu Y, Ang Y S, Ang L K, Zhang X, Greiter M, Thomale R 2020 *Nat. Commun.* **11** 4385
- [43] Wu J, Huang X, Lu J, Wu Y, Deng W, Li F, Liu Z 2020 *Phys. Rev. B* **102** 104109
- [44] Kotwal T, Moseley F, Stegmaier A, Imhof S, Brand H, Kießling T, Thomale R, Ronellenfisch H, Dunkel J 2021 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **118** e2106411118
- [45] Dong J, Juričić V, Roy B 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 023056
- [46] Yang Y, Zhu D, Hang Z, Chong Y 2021 *Sci. China: Phys., Mech. Astron.* **64** 257011
- [47] Zhang W, Zou D, Pei Q, He W, Bao J, Sun H, Zhang X 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 146802
- [48] Wu J, Wang Z, Biao Y, Fei F, Zhang S, Yin Z, Hu Y, Song Z, Wu T, Song F, Yu R 2022 *Nat. Electron.* **5** 635
- [49] Wang Z, Zeng X T, Biao Y, Yan Z, Yu R 2023 *Phys. Rev.*

- Lett.* **130** 057201
- [50] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press)
- [51] Daley A J 2014 *Adv. Phys.* **63** 77
- [52] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [53] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [54] Longhi S 2019 *Opt. Lett.* **44** 5804
- [55] Pan J S, Yi W, Gong J 2021 *Commun. Phys.* **4** 261
- [56] Moca C P, Sticlet D, Dóra B, Zaránd G 2023 *Phys. Rev. B* **107** 115111
- [57] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [58] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [59] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [60] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [61] Edvardsson E, Kunst F K, Bergholtz E J 2019 *Phys. Rev. B* **99** 081302
- [62] Ghatak A, Das T 2019 *J. Phys.: Condens. Matter* **31** 263001
- [63] Song F, Yao S, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 170401
- [64] Song F, Yao S, Wang Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 246801
- [65] Borgnia D S, Kruchkov A J, Slager R J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 056802
- [66] Xiao L, Deng T, Wang K, Zhu G, Wang Z, Yi W, Xue P 2020 *Nat. Phys.* **16** 761
- [67] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [68] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
- [69] Okuma N, Sato M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 176601
- [70] Liang Q, Xie D, Dong Z, Li H, Li H, Gadway B, Yi W, Yan B 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 070401
- [71] Milburn T J, Doppler J, Holmes C A, Portolan S, Rotter S, Rabl P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 052124
- [72] Zhong Q, Christodoulides D N, Khajavikhan M, Makris K G, El-Ganainy R 2018 *Phys. Rev. A* **97** 020105
- [73] Zhang K L, Wang P, Song Z 2019 *Phys. Rev. A* **99** 042111
- [74] Liu S, Ma S, Yang C, Zhang L, Gao W, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 014047
- [75] Heiss W D 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 2455
- [76] Moiseyev N 2011 *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [77] Okugawa R, Takahashi R, Yokomizo K 2020 *Phys. Rev. B* **102** 241202
- [78] Zhang X, Tian Y, Jiang J H, Lu M H, Chen Y F 2021 *Nat. Commun.* **12** 5377
- [79] Zhang X, Zhang T, Lu M H, Chen Y F 2022 *Adv. Phys.: X* **7** 2109431
- [80] Deng T S, Yi W 2019 *Phys. Rev. B* **100** 035102
- [81] Yokomizo K, Murakami S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 066404
- [82] Zhu X, Wang H, Gupta S K, Zhang H, Xie B, Lu M, Chen Y 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 013280
- [83] Yokomizo K, Murakami S 2020 *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 12A102
- [84] Xiao L, Deng T, Wang K, Wang Z, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 230402
- [85] Wang K, Li T, Xiao L, Han Y, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 270602
- [86] Yokomizo K 2022 *Non-Bloch Band Theory of Non Hermitian Systems* (Singapore: Springer Nature)
- [87] Yokomizo K, Murakami S 2023 *Phys. Rev. B* **107** 195112
- [88] Shi K, Tian M, Sun F X, Zhang W 2023 *Phys. Rev. B* **107** 205154
- [89] Zhou H, Lee J Y 2019 *Phys. Rev. B* **99** 235112
- [90] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015
- [91] Kawabata K, Okuma N, Sato M 2020 *Phys. Rev. B* **101** 195147
- [92] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [93] Liu C H, Zhang K, Yang Z, Chen S 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 043167
- [94] He P, Liu Y G, Wang J T, Zhu S L 2022 *Phys. Rev. A* **105** 023311
- [95] Niu X, Li J, Wu S L, Yi X X 2023 *Phys. Rev. A* **108** 032214
- [96] Nakanishi Y, Sasamoto T 2022 *Phys. Rev. A* **105** 022219
- [97] Li T, Zhang Y S, Yi W 2022 *Phys. Rev. B* **105** 125111
- [98] Purkayastha A 2022 *Phys. Rev. A* **105** 062204
- [99] Roccati F, Palma G M, Ciccarello F, Bagarello F 2022 *Open Syst. Inf. Dyn.* **29** 2250004
- [100] Niu X, Wang J 2023 arXiv: 2211.04233 [quant-ph]
- [101] Liu Y G, Chen S 2023 *Phys. Rev. B* **107** 134307
- [102] Strang G 2023 *Introduction to Linear Algebra* (6th Ed.) (Wellesley-Cambridge Press)
- [103] Demange G, Graefe E M 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 025303
- [104] Rotter I 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 153001
- [105] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
- [106] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 3944
- [107] Xiong Y 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 035043
- [108] Ryu S, Schnyder A P, Furusaki A, Ludwig A W W 2010 *New J. Phys.* **12** 065010
- [109] Xu Z C, Zhou Z, Cheng E, Lang L J, Zhu S L 2022 *Sci. China: Phys., Mech. Astron.* **65** 283011
- [110] Chen W, Kaya Özdemir Ş, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
- [111] Wiersig J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 203901
- [112] Kato T 1995 *Perturbation Theory for Linear Operators* (Berlin, Heidelberg: Springer)
- [113] Schindler J, Li A, Zheng M C, Ellis F M, Kottos T 2011 *Phys. Rev. A* **84** 040101
- [114] Dong Z, Li Z, Yang F, Qiu C W, Ho J S 2019 *Nat. Electron.* **2** 335
- [115] Zhou B B, Wang L F, Dong L, Huang Q A 2021 *J. Phys. Commun.* **5** 045010
- [116] Zeng C, Zhu K, Sun Y, Li G, Guo Z, Jiang J, Li Y, Jiang H, Yang Y, Chen H 2021 *New J. Phys.* **23** 063008
- [117] Cheng E H, Lang L J 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 160301 (in Chinese) [成恩宏, 郎利君 2022 物理学报 **71** 160301]
- [118] Hofmann T, Helbig T, Schindler F, Salgo N, Brzezińska M, Greiter M, Kiessling T, Wolf D, Vollhardt A, Kabaši A, Lee C H, Bilušić A, Thomale R, Neupert T 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 023265
- [119] Liu S, Shao R, Ma S, Zhang L, You O, Wu H, Xiang Y J, Cui T J, Zhang S 2021 *Research* **2** 5608038
- [120] Stegmaier A, Imhof S, Helbig T, Hofmann T, Lee C H, Kremer M, Fritzsche A, Feichtner T, Klembt S, Höfling S, Boettcher I, Fulga I C, Ma L, Schmidt O G, Greiter M, Kiessling T, Szameit A, Thomale R 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 215302
- [121] Zou D, Chen T, He W, Bao J, Lee C H, Sun H, Zhang X 2021 *Nat. Commun.* **12** 7201
- [122] Wu J, Huang X, Yang Y, Deng W, Lu J, Deng W, Liu Z 2022 *Phys. Rev. B* **105** 195127
- [123] Zhang W, Di F, Yuan H, Wang H, Zheng X, He L, Sun H, Zhang X 2022 *Phys. Rev. B* **105** 195131
- [124] Shang C, Liu S, Shao R, Han P, Zhang X, Zhang X, Salama K N, Gao W, Lee C H, Thomale R, Manchon A, Zhang S,

- Cui T J, Schwingenschlögl U 2022 *Adv. Sci.* **9** 2202922
- [125] Zhang X, Zhang B, Zhao W, Lee C H 2022 arXiv: 2211.09152 [cond-mat.mes-hall]
- [126] Zhu P, Sun X Q, Hughes T L, Bahl G 2023 *Nat. Commun.* **14** 720
- [127] Wu M, Zhao Q, Kang L, Weng M, Chi Z, Peng R, Liu J, Werner D H, Meng Y, Zhou J 2023 *Phys. Rev. B* **107** 064307
- [128] Kim Y, Park H C, Kyung M, Lee K, Ryu J W, You O, Zhang S, Min B, Park M J 2023 arXiv: 2303.13721 [cond-mat.mes-hall]
- [129] Su L, Guo C X, Wang Y, Li L, Ruan X, Du Y, Chen S, Zheng D 2023 *Chin. Phys. B* **32** 038401
- [130] Yin K, Hao X, Huang Y, Zou J, Ma X, Dong T 2023 *Phys. Rev. Applied* **20** L021003
- [131] Ezawa M 2019 *Phys. Rev. B* **99** 121411
- [132] Zhou B B, Deng W J, Wang L F, Dong L, Huang Q A 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 064022
- [133] Schindler J, Lin Z, Lee J M, Ramezani H, Ellis F M, Kottos T 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444029
- [134] Ramezani H, Schindler J, Ellis F M, Günther U, Kottos T 2012 *Phys. Rev. A* **85** 062122
- [135] Wang T, Fang J, Xie Z, Dong N, Joglekar Y N, Wang Z, Li J, Luo L 2020 *Eur. Phys. J. D* **74** 167
- [136] Chen W K 2002 *The Circuits and Filters Handbook* (CRC Press)
- [137] Hofmann T, Helbig T, Lee C H, Greiter M, Thomale R 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 247702
- [138] Zhang H, Chen T, Li L, Lee C H, Zhang X 2023 *Phys. Rev. B* **107** 085426
- [139] Yuan H, Zhang W, Zhou Z, Wang W, Pan N, Feng Y, Sun H, Zhang X 2023 *Adv. Sci.* 2301128
- [140] Chen P Y, Sakhdari M, Hajizadegan M, Cui Q, Cheng M M C, El-Ganainy R, Alù A 2018 *Nat. Electron.* **1** 297
- [141] Sakhdari M, Hajizadegan M, Zhong Q, Christodoulides D N, El-Ganainy R, Chen P Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 193901
- [142] Yin K, Huang Y, Ma C, Hao X, Gao X, Ma X, Dong T 2022 *Appl. Phys. Lett.* **120** 194101
- [143] Wu F Y 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 6653
- [144] Li Z, Wu J, Huang X, Lu J, Li F, Deng W, Liu Z 2020 *Appl. Phys. Lett.* **116** 263501
- [145] Deng W, Chen T, Zhang X 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 033109
- [146] Tang C, Yang H, Song L, Yao X, Yan P, Cao Y 2023 *Phys. Rev. B* **108** 035410
- [147] Lang L J, Weng Y, Zhang Y, Cheng E, Liang Q 2021 *Phys. Rev. B* **103** 014302
- [148] Chitsazi M, Li H, Ellis F M, Kottos T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 093901
- [149] Su L, Jiang H, Wang Z, Chen S, Zheng D 2023 *Phys. Rev. B* **107** 184108
- [150] Lee C H, Li L, Gong J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 016805
- [151] Li L, Lee C H, Gong J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 250402
- [152] Yin K, Huang Y, Yin W, Hao X, Ma X, Dong T 2022 *Phys. Rev. Appl.* **18** 064020
- [153] Zhang M, Sweeney W, Hsu C W, Yang L, Stone A D, Jiang L 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 180501
- [154] Kononchuk R, Cai J, Ellis F, Thevamaran R, Kottos T 2022 *Nature* **607** 697
- [155] Langbein W 2018 *Phys. Rev. A* **98** 023805

SPECIAL TOPIC — The 90th Anniversary of South China Normal University and Physics Discipline

**Electrical circuit simulation of non-Hermitian lattice models\***Xu Can-Hong<sup>1)</sup> Xu Zhi-Cong<sup>1)</sup> Zhou Zi-Yu<sup>1)</sup>Cheng En-Hong<sup>1)†</sup> Lang Li-Jun<sup>1)2)‡</sup>1) (*School of Physics, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)2) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

( Received 1 June 2023; revised manuscript received 7 August 2023 )

**Abstract**

Quantum simulation serves as a significant tool for studying and understanding novel phenomena in the quantum world. In recent years, it has been realized that apart from quantum platforms, classical systems like photonic crystals, phononic crystals, and mechanical oscillators can also be used to simulate quantum models by analogizing the Schrödinger equation. Among these systems, electrical circuits have emerged as a promising simulation platform owing to their low cost, technological maturity, and ease of scalability, successfully simulating numerous important quantum phenomena. Meanwhile, non-Hermitian physics breaks the Hermiticity of systems' Hamiltonians in traditional quantum mechanics, providing a fresh perspective for understanding the physics of quantum systems, particularly open quantum systems. Non-Hermitian systems, owing to their manifestation of unique phenomena absent in Hermitian systems, have become emerging research subjects in various fields of physics. However, many non-Hermitian phenomena require specialized configurations that pose relatively high technical thresholds on quantum platforms. For instance, the non-Hermitian skin effect typically requires systems to possess non-reciprocal hopping between lattice sites. Therefore, utilizing flexible electrical circuits to simulate non-Hermitian physics becomes a natural choice.

This paper provides a short review of the current experimental progress in simulating non-Hermitian lattice models by using electrical circuits. It offers a brief introduction to the relevant knowledge of non-Hermitian physics, including mathematical concepts and novel phenomena, as well as the simulation theory of electrical circuits, including the mapping theory of the lattice models, the introduction of non-Hermiticity, and the measurement of physical quantities. The aim is to provide readers with a reference for better understanding or engagement in related researches, thus promoting further development in this field.

**Keywords:** non-Hermitian physics, electrical circuit simulation, PT symmetry breaking, non-Hermitian skin effect, non-Hermitian topology

**PACS:** 03.67.Ac, 03.65.Vf, 73.43.Nq**DOI:** [10.7498/aps.72.20230914](https://doi.org/10.7498/aps.72.20230914)

\* Project supported by the Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation, China (Grant No. 2019A1515111101) and the Startup Funding from South China Normal University, China.

† Corresponding author. E-mail: [ehcheng@m.scnu.edu.cn](mailto:ehcheng@m.scnu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [ljiang@scnu.edu.cn](mailto:ljiang@scnu.edu.cn)



## 非厄米格点模型的经典电路模拟

徐灿鸿 许志聪 周子榆 成恩宏 郎利君

### Electrical circuit simulation of non-Hermitian lattice models

Xu Can-Hong Xu Zhi-Cong Zhou Zi-Yu Cheng En-Hong Lang Li-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 200301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20230914

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230914>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 畴壁系统中的非厄米趋肤效应

Non-Hermitian skin effect in a domain-wall system

物理学报. 2022, 71(17): 170306 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221087>

#### 无序非厄米Su-Schrieffer-Heeger中的趋肤效应

Skin effect in disordered non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger

物理学报. 2022, 71(22): 227402 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221151>

#### 非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>

#### 非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

#### 基于Aharonov-Bohm笼的非厄米趋肤效应抑制现象

Suppression of non-Hermitian skin effect via Aharonov-Bohm cage

物理学报. 2022, 71(17): 174201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220978>

#### 广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908>