

哈密顿量诱导的量子演化速度*

董珊珊¹⁾ 秦立国¹⁾ 刘福密¹⁾ 龚黎华²⁾ 黄接辉^{1)†}¹⁾ (上海工程技术大学数理与统计学院, 上海 201620)²⁾ (上海工程技术大学电子与电气学院, 上海 201620)

(2023 年 6 月 19 日收到; 2023 年 7 月 15 日收到修改稿)

在研究量子态的演化问题时, 量子演化速率往往定义为量子初态与其演化态之间的态距离随时间的变化率. 本文将量子演化的基本理论与线性代数方法相结合, 通过量子态演化的路径距离来研究量子系统的演化. 量子么正演化系统中, 量子演化算符包含了量子演化的路径信息, 路径距离的大小则决定于演化算符本征值的幅角主值分布. 由量子态演化的路径距离随时间的变化率而得到的量子瞬时演化速率则正比于系统哈密顿量的最大与最小本征值之差. 作为应用之一, 利用量子演化的路径距离及哈密顿量诱导的瞬时演化速率, 可以给出量子演化新的时间下限. 此时间下限只与系统的演化算符及哈密顿量有关, 而与量子初态的具体形式无关, 这与量子系统真实演化时间所具有的性质一致. 严格的理论证明以及两个演化实例的数值结果均表明, 在 $[0, \pi/(2\omega_H)]$ 时间范围内, 本文给出的演化时间下限与真实演化时间重合, 是真实演化时间的准确预测. 通过量子演化的路径距离及相应演化速率来研究量子系统的演化, 为相关问题的解答提供了新的思路和方法.

关键词: 量子演化, 路径距离, 量子演化速率**PACS:** 03.65.Ta, 03.65.Aa, 02.10.Ud**DOI:** 10.7498/aps.72.20231009

1 引言

量子态的演化速度是量子理论中的基本问题^[1-3]. 随着量子信息科学在近二三十年的蓬勃发展, 量子态的演化速度再次引起物理学工作者的高度重视, 因为它关系到量子计算的算力^[4,5]、量子信息转换率^[6-8]、量子测量的测量精度^[9-11]以及量子电池的充电量^[12,13]等. 在研究量子系统的演化问题时, 量子演化速度往往定义为量子初态与其演化态之间的“距离”随时间的变化率, 这使得量子演化速度的计算不但与量子系统的哈密顿量有关, 还与量子系统所处的状态有关. 但从另外一个角度来看量子态的演化问题. 量子系统的演化遵循薛定谔方程: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$, 为简单起见,

接下来设定 $\hbar = 1$. 若不考虑系统耗散, 则系统初态 $|\psi_0\rangle$ 可以通过一个么正算符 U_t 与其 t 时刻的演化态 $|\psi_t\rangle$ 关联: $|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$, 而这个么正算符完全由系统的哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 及演化时间 t 决定: $U_t = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right]$ ^[14]. 其中, $\mathcal{T}$ 为时序算符, 其依据时段先后对哈密顿量所对应的演化算符进行排序, 先作用的哈密顿量所对应的演化算符排在么正演化算符连乘形式的右侧. 这意味着, 非耗散量子系统中, 量子态的演化规律包含在么正算符 U_t 中, 不同量子初态可以看作量子系统演化的不同初始条件. 如果能提取么正算符 U_t 中所包含的“路径”信息, 那么这个路径所包含的演化距离, 以下简称路径距离, 随时间的变化率可以用来定义量子演化的瞬时速率. 不难推断, 通过这种方式定义的量子演化速率取决于量子系统的哈密顿量, 而

* 国家自然科学基金 (批准号: 11664018, 12174247, U2031145) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: huangjh@sues.edu.cn

与系统所处的量子态无关, 这个性质与经典物理学中质点运动的瞬时速率是一致的. 在经典物理学中, 一个质点的运动状态满足牛顿第二运动定律: $F = ma$. 只要给定质点运动的初始状态, 则其所受外力完全决定质点此后的运动状态, 包括其速度和位置等. 其中, 质点运动的瞬时速度定义为位移矢量随时间的变化率. 相应地, 质点运动的瞬时速率等于路程随时间的变化率, 本质上, 其大小取决于质点的初速度及其所受合外力, 而与质点所处的位置无关.

基于量子系统的演化算符, 本文定义了量子态演化的路径距离, 此路径距离仅取决于演化算符本征值的辐角主值. 可以证明, 量子演化的路径距离是所有量子初态与其量子演化态之间距离的上限. 演化算符本征值的辐角主值分布随时间的变化决定了量子演化的瞬时速率, 其值正好等于系统哈密顿量最大与最小本征值差值的一半. 作为应用之一, 给出了量子系统真实演化时间的又一个下限, 文中的理论证明及实例均表明, 此时间下限在一个特定范围内, 与真实演化时间完全重合, 是对量子系统真实演化时间的精准预测.

2 量子演化算符包含的路径距离

在一个非耗散量子系统中, 系统哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 决定量子态的演化算符, $U_t = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right]$. 为简单起见, 本文从不含时的哈密顿量系统展开讨论. 此时, 量子系统的演化算符与哈密顿量的关系可以简化为: $U_t = \exp(-i\hat{H}t)$. 在此演化算符作用下, 量子初态 $|\psi_0\rangle$ 演化为 $|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$, 其对应的密度矩阵演化方程为 $\rho_t = U_t \rho_0 U_t^\dagger$. 因为以上演化方程随时间的变化关系只包含在演化算符 U_t 中, 所以可以通过 U_t 来定义量子系统演化过程中的路径距离. 对一个非耗散量子系统, 量子演化算符 U_t 是一个幺正算符, 满足关系 $U_t U_t^\dagger = E$ (E 为单位算符). 这说明量子演化算符 U_t 本征值的模始终为 1.

在经典物理的运动学中, 如果一个质点一直沿某个方向作直线运动, 那么它所经历的路程等于质点始末位置的距离, 除此之外, 质点所经历的路程都大于质点始末位置的距离. 以此为借鉴, 定义量子演化算符 U_t 所包含的路径距离, 使其不小于通过 U_t 关联起来的所有量子态对 $\{\rho_0, \rho_t\}$ 之间的态

距离:

$$d(U_t) \geq \Theta_B(\rho_0, \rho_t), \quad (1)$$

其中, $\rho_t = U_t \rho_0 U_t^\dagger$ 定义为量子初态 ρ_0 在 t 时刻的演化态. 本文采用量子初态和目标态之间的 Bures 角 $\Theta_B(\rho_0, \rho_t) = \arccos [\mathcal{F}(\rho_0, \rho_t)]$ 来度量两量子态间的态距离^[15], 其中 ρ_0 和 ρ_t 之间的 Uhlmann 保真度^[16,17] 为 $\mathcal{F}(\rho_0, \rho_t) = \text{Tr}[\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_t \sqrt{\rho_0}}]$.

首先给出量子初态 ρ_0 和量子演化算符 U_t 的本征态分解形式, 即 $\rho_0 = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^\dagger$ 和 $U_t = \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{S}^\dagger$. $\mathbf{V}$ 由量子初态 ρ_0 的本征态列向量构成, $\mathbf{V} = (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle)$, 其对应的本征值构成对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角元, $\Lambda_{jj} = \lambda_j$, 满足 $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$. 类似地, $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 分别由演化算符 U_t 的本征态和本征值构成, 即 $\mathbf{S} = (|\psi'_1\rangle, |\psi'_2\rangle, \dots, |\psi'_N\rangle)$ 和 $T_{jj} = e^{i\phi_j}$. 其中 $\{\phi_j\}$ 是演化算符 U_t 本征值的辐角主值, 限制在 $(-\pi, \pi]$ 范围内. 不失一般性, 设定辐角主值 $\{\phi_j\}$ 在对角矩阵 $\mathbf{T}$ 的对角元中按升序排列, 满足 $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_N$. 量子态 ρ_0 和它的演化量子态 ρ_t 之间的 Uhlmann 保真度可以改写为^[18]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho_0, \rho_t) &= \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_t \sqrt{\rho_0}} \right] = \text{Tr} \left[\sqrt{\rho_0} \sqrt{\rho_t} \right] \\ &= \text{Tr} \left| \mathbf{V} \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{V}^\dagger U_t \mathbf{V} \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{V}^\dagger U_t^\dagger \right|, \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\text{Tr}|\cdot|$ 表示矩阵本征值的绝对值之和. 而一个矩阵 $\mathbf{A}$ 的本征值的绝对值等于矩阵 $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ 或 $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ 本征值的算术平方根, 这意味着, 一个矩阵左乘或者右乘任意幺正矩阵都不会改变其本征值的绝对值. 注意到 $\mathbf{V}$ 及 $U_t^\dagger$ 均为幺正矩阵, 故 (2) 式可改写为

$$\begin{aligned} F(\rho_0, \rho_t) &= \text{Tr} \left| \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{V}^\dagger U_t \mathbf{V} \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \right| \\ &\geq \left| \text{Tr} \left(\sqrt{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{V}^\dagger U_t \mathbf{V} \sqrt{\mathbf{\Lambda}} \right) \right| = \left| \text{Tr} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^\dagger U_t \mathbf{V}) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle \psi_j | U_t | \psi_j \rangle \right|. \end{aligned} \quad (3)$$

众所周知, 两个量子态间的保真度在幺正变换下是保持不变的. 我们总可以选择合适的幺正变换, 使得量子初态 ρ_0 的本征态过渡到演化算符 U_t 的本征态, $|\psi_j\rangle \rightarrow |\psi'_j\rangle$. 上面的 Uhlmann 保真度过渡为

$$F(\rho_0, \rho_t) \geq \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle \psi'_j | U_t | \psi'_j \rangle \right| = \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{i\phi_j} \right|. \quad (4)$$

接下来根据演化算符 U_t 本征值的辐角主值 $\{\phi_j\}$ 的分布, 来确定上面的 Uhlmann 保真度的最

小值. 毫无疑问, 如果锁定 $\{\phi_j\}$ 中绝对值最大的相位, 比如 $\phi_M \equiv \max\{|\phi_j|\}$, 并忽略 (4) 式中求和结果中的虚部, 那很容易可得到 Uhlmann 保真度的一个下限:

$$\begin{aligned} F(\rho_0, \rho_t) &\geq \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{i\phi_j} \right| \geq \left| \sum_{j=1}^N \lambda_j \cos(\phi_j) \right| \\ &\geq \sum_{j=1}^N \lambda_j \cos(|\phi_j|) \\ &\geq \sum_{j=1}^N \lambda_j \cos(\phi_M) = \cos(\phi_M), \end{aligned} \quad (5)$$

最后一步用到了等式 $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$. 注意, 演化算符 U_t 本征值的辐角主值 $\{\phi_j\}$ 已经被限制在 $(-\pi, \pi]$ 范围内. 而当 $\phi_M > \pi/2$ 时, $\cos(\phi_M) < 0$, (5) 式自然成立, 因为 Uhlmann 保真度不可能小于 0. 如果对 (5) 式的最终结果: $F(\rho_0, \rho_t) \geq \cos(\phi_M)$, 两端取反余弦, 并定义 ϕ_M 为演化算符 U_t 所包含的路径距离 $d(U_t)$, 则我们直接证明了 (1) 式中的关系, 即: 量子演化算符 U_t 所包含的路径距离是通过 U_t 关联起来的所有量子态对 $\{\rho_0, \rho_t\}$ 之间的态距离的上限.

通过以上方式得到的 Uhlmann 保真度下限 $\cos(\phi_M)$ 并不能保证其紧致性. 注意到

$$\left| \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{i\phi_j} = \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{i(\phi_j - \phi_0)} \right|,$$

其中, ϕ_0 可以为任意位相常量, 则 $\{|\phi_j - \phi_0|\}$ 的最大值可以用来计算 ϕ_M . 同时, 为了保证所得到的 Uhlmann 保真度下限的紧致性, 我们又必须选取合适的 ϕ_0 , 使得 ϕ_M 尽量小, 所以 ϕ_M 定义为

$$\phi_M \equiv \min_{\{\phi_0\}} \left\{ \max_{\{\phi_j\}} (|\phi_j - \phi_0|) \right\}. \quad (6)$$

为了让相关讨论更直观, 我们把辐角主值 $\{\phi_j\}$ 的分布在一个极坐标系的单位圆中表示出来. N 维量子系统中, 量子演化算符 U_t 有 N 个本征值, 其辐角主值与单位圆中 N 条半径的极角相对应, 此单位圆的圆心取为极坐标系的极点.

现在我们通过以下 4 步来找出 (6) 式中的目标 ϕ_0 及相应的 ϕ_M .

1) 在以上单位圆与辐角主值 $\{\phi_j\}$ 相对应的 N 条半径中, 找出相邻且夹角最大的两条半径. 如果辐角主值 $\{\phi_j\}$ 按升序排列, 那相邻两条半径之间的夹角为

$$D_j = \begin{cases} \phi_{j+1} - \phi_j, & j = 1, 2, \dots, N-1 \\ 2\pi + \phi_1 - \phi_N, & j = N. \end{cases} \quad (7)$$

在图 1 中, 夹角最大的两条半径为 OC 和 OD , 这两条半径对应的辐角主值为 ϕ_3 和 ϕ_4 .

2) 若 $\{D_j\}$ 中的第 k 个为最大值, 即 $D_k = \max\{D_j\}$, 将其所对应的两条半径的极角标记为 ϕ_+ 和 ϕ_- , 则:

$$\begin{aligned} \phi_- &= \phi_k, \\ \phi_+ &= \begin{cases} \phi_{k+1}, & k = 1, 2, \dots, N-1 \\ 2\pi + \phi_1, & k = N. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

3) $\{D_j\}$ 中值最大的那个夹角的角平分线的反向延长线的极角即对应方程 (6) 中目标位相 ϕ_0 (见图 1 中的半径 OP), 即 $\phi_0 = \frac{1}{2}(\phi_+ + \phi_-) \pm \pi$, 其中“ $\pm$ ”二选其一, 使得 ϕ_0 限定在 $(-\pi, \pi]$ 范围内.

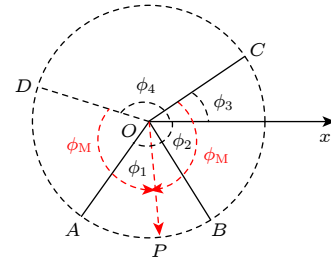


图 1 在极坐标系的单位圆中, 不同半径的极角与演化算符本征值的辐角主值相对应. 具有最大夹角的两相邻半径, 其夹角平分线的反向延长线的极角即为 ϕ_0 取值, 而 ϕ_M 则为此反向延长线与前述两相邻半径的夹角. ϕ_M 也有如下等效理解: 演化算符本征值的每个辐角主值与一个半径对应, 找到能覆盖所有半径的最小扇形, 此最小扇形的圆心角的一半即为目标 ϕ_M 值

Fig. 1. In the polar coordinate system, the polar angle of a radius in the unit circle corresponds to the principal argument of an eigenvalue of the evolution operator. The angular bisector of two neighboring radii, which form the largest included angle among all neighboring radii, is the reverse extension line of the radius with polar angle ϕ_0 , and ϕ_M is equal to half the largest included angle among all neighboring radii. Equivalently speaking, the principal argument of each eigenvalue of the evolution operator corresponds to a radius in the unit circle. If we find out the smallest sector in this unit circle to cover all radii mentioned above, ϕ_M is then equal to half the sector angle.

4) ϕ_0 与 ϕ_+ 和 ϕ_- 所对应半径间的夹角相同, 这个夹角大小就是方程 (6) 中 ϕ_M 值,

$$\phi_M = \pi - \frac{1}{2}(\phi_+ - \phi_-) = \pi - \frac{1}{2} \max\{D_j\}. \quad (9)$$

通过这个方式得到的 ϕ_M 值有如下直观解释: 在以上单位圆中画一个能覆盖辐角主值 $\{\phi_j\}$ 所对应

N 条半径的扇形, 那么满足这个条件的最小扇形的圆心角的一半即为方程 (6) 中 ϕ_M 值. 这个最小扇形的对称轴对应方程 (6) 中的 ϕ_0 位相.

基于此 ϕ_M 而得到的 Uhlmann 保真度下限, $\mathcal{F}(\rho_0, \rho_t) \geq \cos(\phi_M)$, 相比 $\mathcal{F}(\rho_0, \rho_t) \geq \cos(\max\{\phi_j\})$ 显然更紧凑, 因为不等式 $\phi_M \leq \max\{|\phi_j|\}$ 始终成立. 保真度的反余弦值, 即 Bures 角度, 可以用来度量两个量子态之间的态距离. 因此把 ϕ_M 作为量子演化算符 U_t 所包含的路径距离:

$$d(U_t) = \phi_M = \pi - \frac{1}{2} \max\{D_j\}. \quad (10)$$

既然 $\cos(\phi_M)$ 是 Uhlmann 保真度的下限, 可以得出如下结论: 量子演化算符 U_t 所包含的路径距离不小于通过其连接起来的任意量子态对之间的 Bures 角. 通俗点讲, 就是量子态与其演化态之间的距离不大于演化过程中的路径距离. 这与经典物理中, 一个质点运动轨迹上任意两点之间的距离不大于这两点之间路程的结论相一致.

3 哈密顿量诱导的瞬时演化速率

基于以上对量子演化算符 U_t 所包含的路径距离的定义, 来计算量子系统演化时的瞬时速率. 在一个不含时非耗散量子系统中, 量子系统从 t 时刻演化到 $(t + dt)$ 时刻 ($dt \rightarrow 0$) 所对应的演化算符为 $U_{dt} = \exp(-i\hat{H}dt)$. 不含时哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值为实数, 本文采用 $D_{\{\lambda\}}$ 表示哈密顿量 $\hat{H}$ 最大本征值与最小本征值的差值, $D_{\{\lambda\}} \equiv \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$. 不难看出, 当 $dt \rightarrow 0$ 时, 演化算符为 U_{dt} 的本征值的辐角主值即为哈密顿量 $\hat{H}$ 本征值的 $(-dt)$ 倍, 并且均为小量. 所以这些辐角主值中, 相邻辐角主值夹角的最大值为: $\max\{D_j\} = 2\pi - dt(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) = 2\pi - D_{\{\lambda\}}dt$. 根据 (10) 式, 演化算符 U_{dt} 所包含的路径距离为: $d(U_{dt}) = \phi_M = \frac{1}{2}D_{\{\lambda\}}dt$. 由此可得到量子系统在哈密顿量 $\hat{H}$ 作用下的瞬时演化速率:

$$\omega_H = \frac{d}{dt}d(U_{dt}) = \frac{1}{2}D_{\{\lambda\}} = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}), \quad (11)$$

其中, $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别为哈密顿量 $\hat{H}$ 的最大和最小本征值. 由此可得出结论: 不含时哈密顿量诱导的瞬时演化速率仅取决于哈密顿最大与最小本征值的差值.

如果以量子初态为基准, 则量子系统的演化态与此量子初态之间的路径距离随时间的变化率必

然以上面得到的瞬时演化速率为上限. 因此, 在一个不含时量子系统中, 量子系统从初态演化到目标态所需的时间有一个下限:

$$\tau_H = \frac{d(U_t)}{\omega_H}. \quad (12)$$

早在 20 世纪上半叶, Mandelstam 和 Tamm^[1] 研究了一个量子纯态自由演化到与其正交的量子态所需的最短时间, $\tau_{MT} = \pi/(2\Delta E)$, ΔE 是量子系统的能量带宽. 这个结论说明, 若以量子态之间的态距离为距离量度, 量子系统的能量带宽与量子态演化速率直接相关. 相关研究很快被推广到一般情形, 当目标态与初态不正交时, 在这两个量子态之间自由演化的 Mandelstam-Tamm 时间下限是^[19,20]:

$$\tau_{MT} = \frac{\Theta_B}{\Delta E}. \quad (13)$$

4 举例和讨论

形如 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 的量子态, 其自由演化时的哈密顿量可以写为: $\hat{H} = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|$, 其中, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为量子系统的基态和某激发态, 对应的能量本征值分别为 E_0 和 E_1 . 已有研究表明, 此量子态在自由演化时能以最快的演化速率达到它的正交态, 演化时间正好满足 (13) 式中的时间下限 $t = \tau_{MT}$. 此系统自由演化过程中, t 时刻所对应的演化算符为 $U_t = e^{-iE_0t}|0\rangle\langle 0| + e^{-iE_1t}|1\rangle\langle 1|$. 由上文 (10) 式和 (11) 式可得, 在 $t \in [0, \pi/(E_1 - E_0)]$ 演化时间范围内, 此系统演化算符 U_t 所包含的路径距离为: $d(U_t) = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)t$. 哈密顿量 $\hat{H}$ 所诱导的演化速率为: $\omega_H = \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$. 根据 (12) 式, 可得到本文定义的演化时间下限: $\tau_H = \frac{d(U_t)}{\omega_H} = t$. 由此可见, 量子态 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 自由演化过程中, 无论是 Mandelstam-Tamm 时间下限, 还是本文提出的 τ_H 时间下限, 都作出了最准确的预测, 其值正好与实际演化时间相同: $\tau_H = \tau_{MT} = t$.

考虑一个三能级量子态的演化. 在以不含时哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征态 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ 为基矢的希尔伯特空间, 哈密顿量 $\hat{H}$ 可以用一个实对角矩阵表示, 设为: $\hat{H} = \text{Diag}(E_0, E_1, E_2)$. 当前只讨论非简并的简单情形, 并设定 $E_0 < E_1 < E_2$. 量子态的演化

遵从薛定谔方程, $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$, 所以量子初态 $|\psi_0\rangle = \sum_{j=0}^2 c_j |j\rangle$ 在 t 时刻的演化态可以表示为 $|\psi_t\rangle = \sum_{j=0}^2 c_j e^{-iE_j t} |j\rangle$. 此时刻对应的演化算符为: $U_t = \text{Diag}(e^{-iE_0 t} e^{-iE_1 t} e^{-iE_2 t})$. 根据这些信息, 不难得到 t 时刻的演化态与初态之间的态距离, 即 Bures 角:

$$U_t = \text{Diag}(e^{-iE_0 t} e^{-iE_1 t} e^{-iE_2 t}).$$

根据这些信息, 不难得到 t 时刻的演化态与初态之间的态距离, 即 Bures 角为

$$\begin{aligned} \Theta_B(|\psi_0\rangle, |\psi_t\rangle) &= \arccos |\langle\psi_0|\psi_t\rangle| \\ &= \arccos \left| \sum_{j=0}^2 |c_j|^2 e^{-iE_j t} \right|, \end{aligned}$$

系统的能量带宽为

$$\Delta E = \sqrt{\sum_{j=0}^2 |c_j|^2 E_j^2 - \left(\sum_{j=0}^2 |c_j|^2 E_j \right)^2}.$$

进而可用 (13) 式来估算从初态到 t 时刻演化态之间的 Mandelstam-Tamm 时间下限 τ_{MT} . 同时, 在演化时间 $t \in [0, \pi/(2\omega_H)]$ 范围内, 由 (10) 式可以给出演化算符 U_t 所包含的路径距离: $d(U_t) = \frac{1}{2}(E_2 - E_0)t$, 而由 (11) 式得到的哈密顿量 $\hat{H}$ 所诱导的演化速率为 $\omega_H = \frac{1}{2}(E_2 - E_0)$. 所以, 在演化时间 $t \in [0, \pi/(2\omega_H)]$ 范围内, 采用 (12) 式能准确预测量子系统的真实演化时间: $\tau_H = t$, 这一结论与上面讨论的二维纯态情形相同. 值得关注的是, 这一结论不依赖于量子初态中 c_j 参数的选择. 实际上, 可以把此结论推广到一般情形: 在么正演化系统中, 基于哈密顿量诱导的量子演化速率 ω_H 而得到的演化时间下限 τ_H , 在 $\in [0, \pi/(2\omega_H)]$ 范围内, 其预测值与系统真实演化时间完全相等.

如图 2 所示, 设定系统的哈密顿量为 $\hat{H} = \text{Diag}(1 \ 2 \ 4)$, 以初态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{2}|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ 与其演化态 $|\psi_t\rangle$ 之间的 Bures 角为横坐标, 画出了量子系统的真实演化时间 t , 本文提出的基于哈密顿量诱导的演化速率的演化时间下限 τ_H , 以及 Mandelstam-Tamm 演化时间下限的变化曲线. 可以看到, 在 $t \in [0, \pi/(2\omega_H)]$ 内, τ_H 始终与量子系统的真实演化时间 t 完美重合, 而 Mandelstam-Tamm 时间下限曲线位于真实演化时间曲线的下方, 表明其值始终小于系统的真实演化时间, 其差值随着演化时间的延长而增大.

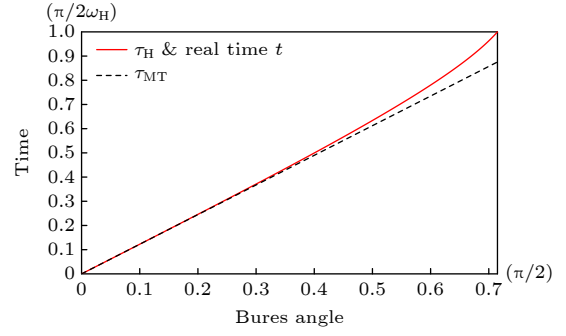


图 2 三能级量子纯态 $|\psi_0\rangle$ 在 $t \in [0, \frac{\pi}{2\omega_H}]$ 时间范围内的自由演化过程中, 本文提出的演化时间下限 τ_H 始终与真实演化时间 t 重合, 见红色实线. 而 Mandelstam-Tamm 时间下限位于真实演化时间曲线的下方, 见黑色短划线

Fig. 2. During the evolution of a qutrit prepared in a pure state $|\psi_0\rangle$, the lower bound of the evolution time proposed here meets the real evolution time perfectly in the range $t \in [0, \frac{\pi}{2\omega_H}]$. The curve of the Mandelstam-Tamm bound is below the curve of the real evolution time, see the black dashed line.

本文提出的演化时间下限 τ_H 只依赖于系统的演化算符及哈密顿量诱导的演化速率, 而与量子初态无关, 这个性质也是其与 Mandelstam-Tamm 时间下限的又一重要区别. 现在研究以上例子中的量子纯态 $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{2}|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ 和一个量子混合态 $\rho_0 = \frac{1}{3}(|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|)$, 其中, $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 和 $|\psi_2\rangle = |0\rangle$, 在相同哈密顿量 $\hat{H} = \text{Diag}(1 \ 2 \ 4)$ 作用下的演化速率, 并把本文提出的时间下限 τ_H 与 Mandelstam-Tamm 时间下限作对比. 在图 3 中以真实的演化时间 t 为横坐标, 画出了以上纯态和混合态演化特例中时间下限 τ_H 与 Mandelstam-Tamm 时间下限的变化曲线. 可以看到, 无论系统的初态是纯态还是混合态, 只要系统的哈密顿量相同, 那么系统的演化速度就相同, 在 $t \in [0, \pi/(2\omega_H)]$ 演化时间范围内, 本文提出的演化时间下限 τ_H 与真实的演化时间 t 完全重合, 这一结论对纯态和混合态的演化都成立. 而无论是量子纯态 $|\psi_0\rangle$, 还是混合态 ρ_0 的演化, 若用 Mandelstam-Tamm 下限来估算量子系统的真实演化时间, 其值都比真实值小. 相比较而言, 量子混合态 ρ_0 的演化过程中, Mandelstam-Tamm 下限与真实时间的误差比量子纯态的演化过程中的误差大, 这与文献 [21,22] 得到的结论相一致.

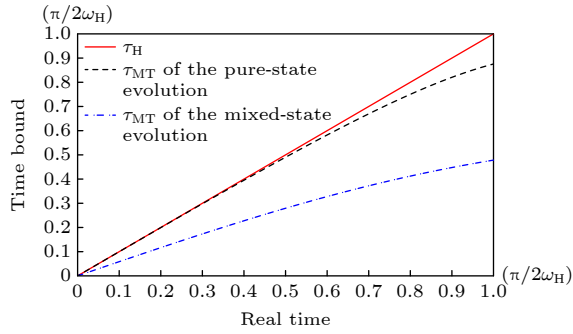


图 3 在相同的哈密顿量作用下, 三能级量子纯态 $|\psi_0\rangle$ 和混合态 ρ_0 在演化过程中, 依据本文提出的时间下限 τ_H 在 $[0, \pi/(2\omega_H)]$ 范围内与真实演化时间相等, 见红色实线. 量子纯态 $|\psi_0\rangle$ 演化过程中的 Mandelstam-Tamm 时间下限小于真实演化时间, 见黑色短划线. 对混合态 ρ_0 的演化而言, 其 Mandelstam-Tamm 时间下限与真实演化时间的偏差最大, 见蓝色点线

Fig. 3. During the evolution of a qutrit prepared in a pure state $|\psi_0\rangle$ and in a mixed state ρ_0 , governed by the same Hamiltonian, the lower bound of the evolution time proposed here meets the real evolution time perfectly in the range $t \in [0, \pi/(2\omega_H)]$, see the black dashed line. In the evolution of the mixed state ρ_0 , the Mandelstam-Tamm bound is deviated from the real evolution time substantially, see the blue dotted line.

5 结 论

量子态的演化速度关系到很多量子信息处理过程的速度, 是量子信息相关领域的重要课题, 正吸引越来越多的关注^[23–30]. 在以往的研究中, 量子系统的演化速度往往定义为量子初态与其量子演化态之间的态距离随时间的变化率. 实际上, 量子态在幺正系统中的演化过程完全体现在其演化算符中, 量子系统演化的距离可以通过演化算符来量化. 从量子基本原理出发, 采用线性代数方法定义了量子幺正系统的路径距离, 发现其只与演化算符的本征值的辐角主值分布有关. 换句话说, 量子系统的路径距离只取决于系统的哈密顿量及演化时间, 而与量子态的具体形式无关. 这一性质与不同量子态在相同哈密顿量作用下的演化特性吻合: 在相同哈密顿量相同时间的作用下, 不同量子态经历相同的演化算符作用, 可视为经历了相同的演化“路径”, 但不同量子初态与其量子演化态之间的态距离是不一样的.

基于以上的演化路径距离, 量子系统的瞬时演化速率 ω_H 可定义为瞬时路径距离对时间的变化率, 其值正好等于哈密顿量最大与最小本征值之差

的一半. 哈密顿量诱导的瞬时演化速率表示量子系统演化的快慢, 从而决定了量子系统从一个量子态到一个目标态之间的演化时间. 如果量子系统以哈密顿量诱导的瞬时演化速率 ω_H 沿测地线向某目标态演化, 则量子初态与目标态之间的路径距离与瞬时演化速率的比值为真实演化时间的一个下限. 本文在理论上证明: 在 $[0, \pi/(2\omega_H)]$ 演化时间内, 以上演化时间下限与真实演化时间完美重合, 是真实演化时间的精准预测. 而广泛应用的 Mandelstam-Tamm 时间下限只有在二维特殊纯态情况下才与真实演化时间重合. 采用二维量子比特系统及三维 qutrit 系统中量子纯态和量子混合态的演化实例对相关结论进行了验证. 通过量子演化的路径距离及相应演化速率来研究量子系统的演化, 为相关问题的解答提供了新的思路和方法.

参考文献

- [1] Mandelstam L, Tamm I 1945 *J. Phys. (USSR)* **9** 249
- [2] Vaidman L 1992 *American J. Phys.* **60** 182
- [3] Margolus N and Levitin L B 1998 *Physica D* **120** 188
- [4] Lloyd S 2000 *Nature* **406** 1047
- [5] Lloyd S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 237901
- [6] Bekenstein J D 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 623
- [7] Murphy M, Montangero S, Giovannetti V, Calarco T 2010 *Phys. Rev. A* **82** 022318
- [8] Mohan B, Das S, Pati A K 2022 *New J. Phys.* **24** 065003
- [9] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [10] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5** 222
- [11] Chin A W, Huelga S F, Plenio M B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 233601
- [12] Binder F C, Vinjanampathy S, Modi K, Goold J 2015 *New J. Phys.* **17** 075015
- [13] Campaioli F, Pollock F A, Binder F C, Céleri L, Goold J, Vinjanampathy S, Modi K 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 150601
- [14] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp204–205
- [15] Bures D 1969 *Trans. Am. Math. Soc.* **135** 199
- [16] Wootters W K 1981 *Phys. Rev. D* **23** 357
- [17] Uhlmann A 1992 *Groups and Related Topics* (New York: Kluwer Academic) pp267–274
- [18] Uhlmann A 1976 *Rep. Math. Phys.* **9** 273
- [19] Bhattacharyya K 1983 *J. Phys. A* **16** 2993
- [20] Huang J H, Hu L Y, Liu F Y 2020 *Phys. Rev. A* **102** 062221
- [21] Campaioli F, Pollock F A, Binder F C, Modi K 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 060409
- [22] Huang J H, Qin L G, Chen G L, Hu L Y, Liu F Y 2022 *Chin. Phys. B* **31** 110307
- [23] Levitin L B, Toffoli T 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 160502
- [24] Pires D P, Cianciaruso M, Céleri L C, Adesso G, Soares-Pinto D O 2016 *Phys. Rev. X* **6** 021031
- [25] Alberti A, Ness G, Sagi Y 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 140403
- [26] Shiraishi N, Funo K, Saito K 2019 *New J. Phys.* **21** 013006

- [27] Hörnedal N, Allan D, Sönnernborn O 2022 *New J. Phys.* **24** 055004
- [28] Tian C, Lu X, Zhang Y J, Xia Y J 2019 *Acta. Phys. Sin.* **68** 150301 (in Chinese) [田聪, 鹿翔, 张英杰, 夏云杰 2019 物理学报 **68** 150301]
- [29] Liu T, Li Z L, Zhang Y H, Lan K 2023 *Acta. Phys. Sin.* **72** 047301 (in Chinese) [刘天, 李宗良, 张延惠, 蓝康 2023 物理学报 **72** 047301]
- [30] Ma Y J, Gao X C, Wu S X, Yu C S 2023 *Chin. Phys. B* **32** 040308

Quantum evolution speed induced by Hamiltonian*

Dong Shan-Shan¹⁾ Qin Li-Guo¹⁾ Liu Fu-Yao¹⁾

Gong Li-Hua²⁾ Huang Jie-Hui^{1)†}

1) (School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

2) (School of Electronic and Electrical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

(Received 19 June 2023; revised manuscript received 15 July 2023)

Abstract

In the issue of quantum evolution, quantum evolution speed is usually quantified by the time rate of change of state distance between the initial state and its time evolution. In this paper, the path distance of quantum evolution is introduced to study the evolution of a quantum system, through the approach combined with basic theory of quantum evolution and the linear algebra. In a quantum unitary system, the quantum evolution operator contains the path information of the quantum evolution, where the path distance is determined by the principal argument of the eigenvalues of the unitary operator. Accordingly, the instantaneous quantum evolution speed is proportional to the distance between the maximum and minimum eigenvalues of the Hamiltonian. As one of the applications, the path distance and the instantaneous quantum evolution speed could be used to form a new lower bound of the real evolution time, which depends on the evolution operator and Hamiltonian, and is independent of the initial state. It is found that the lower bound presented here is exactly equal to the real evolution time in the range $[0, \pi/(2\omega_H)]$. The tool of path distance and instantaneous quantum evolution speed introduced here provides new method for the related researches.

Keywords: quantum evolution, path distance, quantum evolution speed

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Aa, 02.10.Ud

DOI: 10.7498/aps.72.20231009

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11664018, 12174247, U2031145).

† Corresponding author. E-mail: huangjh@sues.edu.cn

哈密顿量诱导的量子演化速度

董珊珊 秦立国 刘福窑 龚黎华 黄接辉

Quantum evolution speed induced by Hamiltonian

Dong Shan-Shan Qin Li-Guo Liu Fu-Yao Gong Li-Hua Huang Jie-Hui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 220301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231009

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231009>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

纠缠相干光场对量子态最大演化速率的操控

Control of maximum evolution speed of quantum states by two-mode entangled light field

物理学报. 2019, 68(15): 150301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190385>

纳米机械谐振器耦合量子比特非厄米哈密顿量诱导的声子阻塞

Phonon blockade induced by a non-Hermitian Hamiltonian in a nanomechanical resonator coupled with a qubit

物理学报. 2019, 68(11): 114203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182263>

关联退极化量子信道中qutrit-qutrit系统的量子相干性演化

Evolution of quantum coherence of qutrit-qutrit system under correlated depolarizing channels

物理学报. 2022, 71(7): 070303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212067>

量子扩散通道中Wigner算符的演化规律

Time evolution law of Wigner operator in diffusion channel

物理学报. 2020, 69(9): 090301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200106>

初态对线型分子体系量子速度极限度量的影响

Impact of initial states on the quantum speed limits metric in linear molecules

物理学报. 2019, 68(5): 050201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181942>

非对称自旋-轨道耦合系统的多体量子相干含时演化

Dynamics of multipartite quantum coherence in asymmetric spin-orbit coupled system

物理学报. 2021, 70(1): 010301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201199>