

# 自旋-轨道耦合玻色爱因斯坦凝聚中 多能级绝热消除理论\*

袁家望<sup>1)</sup> 陈立<sup>2)</sup> 张云波<sup>1)†</sup>

1) (浙江理工大学物理系, 浙江省光场调控重点实验室, 杭州 310018)

2) (山西大学理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

(2023年6月27日收到; 2023年8月6日收到修改稿)

在量子光学中, 绝热消除可以简化多能级量子系统, 它通过消除快速振荡自由度、保留慢变量动力学, 从而获得系统的有效描述. 绝热消除在量子模拟和量子精密测量中具有重要应用, 比如利用三能级拉曼耦合和绝热消除人们在超冷原子中实现了自旋-轨道耦合. 本文在三能级绝热消除的基础上研究三能级非厄米系统与多能级系统中绝热消除的理论方法及其推广, 验证了绝热消除理论在非厄米系统和多能级系统中的有效性与准确性. 本文研究可为耗散的多能级量子系统中的态制备和动力学操控提供理论基础.

**关键词:** 自旋-轨道耦合, 冷原子气体, 绝热消除, 拉曼过程**PACS:** 67.85.-d, 32.80.Qk, 03.75.Mn**DOI:** 10.7498/aps.72.20231052

## 1 引言

自旋-轨道耦合是量子物理中一个重要的现象, 其描述了粒子的外部轨道自由度和内部自旋自由度之间的相互作用. 在原子物理中, 电子的轨道磁矩和自旋天然地耦合在一起, 形成了内禀的自旋-轨道耦合<sup>[1]</sup>. 然而, 在冷原子系统中, 电中性的原子没有轨道磁矩因而无法形成内禀的自旋-轨道耦合. 为了在冷原子系统中实现人工自旋-轨道耦合, 人们往往采用拉曼光调控的技术, 即拉曼诱导的自旋-轨道耦合<sup>[2-6]</sup>. 在过去的十余年中, 人们在拉曼诱导的自旋-轨道耦合的冷原子系统中取得了许多重要的理论和实验进展<sup>[7-17]</sup>, 比如丰富的基态量子相变、拓扑物态的实现和观测等<sup>[18-24]</sup>.

在拉曼过程, 大失谐的拉曼光可以有效耦合原本偶极禁界的原子基态能级, 并在此过程中控制原子和光子之间的动量转移. 比如, 2011年, 在Lin等<sup>[25]</sup>

的实验中, 两束携带相反动量的拉曼光有效耦合Rb原子基态 $|F=1, m_F=-1, 0\rangle$ 两个塞曼能级, 从而实现了有效二能级(自旋 $1/2$ )的自旋和原子线轨道耦合, 其中 $F$ 和 $m_F$ 分别表示超精细角动量数和磁量子数. 这一方案之后被扩展到有效三能级(自旋 $1$ )和原子轨道角动量的耦合之中. 在拉曼过程的理论描述中, 绝热消除起到了关键作用, 它帮助消除高激发能级, 从而简化了模型并提供了清晰的物理图像.

一般而言, 如果一个量子系统的动力学可以分为快变和慢变两个部分, 绝热消除可以用来积掉快变的部分, 从而得到慢变动力学的有效描述. 具体到拉曼过程, 基态能级由于双光子近共振因而是慢变的, 而激发态能级由于大的单光子失谐而表现出快变行为, 因而绝热消除可帮助消除激发态自由度<sup>[26-30]</sup>. 然而, 目前的绝热消除理论一般应用于封闭(厄米)量子系统, 但对于具有增益和耗散的开

\* 国家自然科学基金(批准号: 12074340, 12174236)和浙江理工大学科学基金(批准号: 20062098-Y)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ybzhang@zstu.edu.cn

放量子系统却鲜有讨论<sup>[31,32]</sup>. 本文研究三能级非厄米系统和双 $\Lambda$ 型、双V型五能级系统中实现绝热消除的理论方案, 并依此建立了慢变系统的有效模型. 通过数值计算对比了原始模型和有效模型的动力学演化, 验证了绝热消除的有效性和准确性.

## 2 三能级系统绝热消除

本节首先介绍三能级 $\Lambda$ 型原子的绝热消除理论. 如图1所示, 两个基态 $|g_i\rangle$  ( $i=1, 2$ )通过两束激光耦合到激发态 $|e\rangle$ , 这里 $\omega_i$ 是激光频率,  $\omega_{0i}$ 是原子能级频率差,  $\Delta_i = \omega_i - \omega_{0i}$ 是两束激光和原子的单光子失谐. 为简单起见本文仅考虑红失谐情况 ( $\Delta_i < 0$ ). 以激发态的能量为能量零点, 自由原子的哈密顿量可以表示为

$$H_A = \frac{p^2}{2m} - \hbar\omega_{01}|g_1\rangle\langle g_1| - \hbar\omega_{02}|g_2\rangle\langle g_2|, \quad (1)$$

式中 $p$ 是动量,  $m$ 是原子质量. 由于原子动能在绝热消除中始终位于对角项上, 因此本文仅考虑哈密顿量在忽略动能的条件下不同能级的原子布居数随时间变化的情况. 在偶极近似和旋波近似的基础上, 可以得到原子和光场相互作用的哈密顿量:

$$H_{AF} = \frac{\hbar\Omega_1}{2}\sigma_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega_1 t} + \frac{\hbar\Omega_2}{2}\sigma_2 e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega_2 t} + \text{h.c.}, \quad (2)$$

式中 $\sigma_i = |g_i\rangle\langle e|$ 是原子下降算符;  $\mathbf{k}_i$ 是波矢;  $\mathbf{r}$ 是空间位置; 拉比频率 $\Omega_i$ 定义为能量 $E_{0i}$ 的光将 $|g_i\rangle$ 耦合到 $|e\rangle$ 的耦合强度,

$$\Omega_i = -\langle g_i|\hat{\epsilon}_i \cdot \mathbf{d}|e\rangle E_{0i}/\hbar. \quad (3)$$

其中,  $\hat{\epsilon}_i$ 表示场的单位偏振矢量,  $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ 是偶极算子. 为简单起见仅考虑原子内部自由度. 这等价于原子是静止的, 故而原子线度远小于光波长. 旋转坐标系下, 系统总哈密顿量 $H = H_A + H_{AF}$ 在 $|g_2, e, g_1\rangle$ 空间中的矩阵形式为

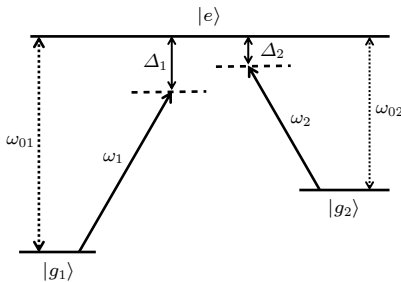


图1 三能级 $\Lambda$ 型系统能级图  
Fig. 1. Three-level  $\Lambda$  type system.

$$H = \begin{pmatrix} \hbar(\Delta_2 - \Delta) & \frac{\hbar\Omega_2}{2} & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_2}{2} & -\hbar\Delta & \frac{\hbar\Omega_1}{2} \\ 0 & \frac{\hbar\Omega_1}{2} & \hbar(\Delta_1 - \Delta) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

其中 $\Delta = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$ 为单光子失谐的平均值. 当系统处在弱场中 ( $\Omega_i \ll \Delta_i$ ), 在大失谐条件下, 激发态 $|e\rangle$ 的衰变速率 $\gamma$ 、双光子失谐 $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$ 均远小于单光子失谐 $\Delta_i$ , 即 $\delta, \gamma \ll \Delta_i$ , 激发态的布居数很小可通过绝热消除得到有效的二能级哈密顿量<sup>[26]</sup>, 其在 $|g_2, g_1\rangle$ 空间中的矩阵形式为

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_2 & \hbar\Omega_R/2 \\ \hbar\Omega_R/2 & \epsilon_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

式中,  $\epsilon_i = \hbar\Delta_i + \hbar\omega_{AC}^i$ , 其中 $\omega_{AC}^i = \Omega_i^2/4\Delta$ 代表交流斯塔克位移;  $\Omega_R = \Omega_1\Omega_2/(2\Delta)$ 为有效二能级系统的拉比频率. 对角化该哈密顿量可以得到系统本征值为

$$\lambda_{g_2, g_1} = \frac{1}{2}[\epsilon_1 + \epsilon_2 \pm \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4\Omega_R^2}]. \quad (6)$$

将系统制备在初态 $|\psi_0\rangle$ , 则 $|\psi\rangle = \mathbf{W}\mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}|\psi_0\rangle$ 为系统 $t$ 时刻的状态, 其中 $\mathbf{W}$ 是哈密顿量本征矢组成的幺正变换矩阵, 而 $\mathbf{U}$ 是由时间演化算符 $e^{-i\lambda_\alpha t}$ 所构成的对角矩阵, 其中 $\alpha$ 取 $g_1$ 或 $g_2$ . 密度矩阵 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 的对角元 $\rho_\alpha$ 代表态 $|\alpha\rangle$ 上的布居数

$$\rho_\alpha = |\langle\alpha|\psi\rangle|^2, \quad (7)$$

该式适用于任意维度的哈密顿量矩阵, 对绝热消除后的(5)式,  $\alpha = g_2, g_1$ ; 对绝热消除前的(4)式,  $\alpha = g_2, e, g_1$ . 取系统初态 $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ , 单光子失谐 $\Delta_1 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 605\pi$  MHz, 拉比频率 $\Omega_1 = \Omega_2 = 120\pi$  MHz, 数值计算可得到系统各态上布居数随时间的演化, 见图2, 其中实线为三能级系统布居数, 圆点为消除后有效二能级系统布居数, 二者在较长演化时间内符合很好. 可以看出处于初态 $g_1$ 的粒子因受激辐射而发生能级跃迁, 粒子数会在两个基态 $|g_1\rangle$ 和 $|g_2\rangle$ 态间转移并振荡, 几乎没有粒子处于激发态 $|e\rangle$ 上, 大失谐条件下系统激发态被绝热消除. 为排除差的参数条件下也能产生好的高能级绝热消除的可能, 给出三能级厄米系统在以平均值 $\Delta = 600\pi$  MHz为中心, 双光子失谐和Rabi频率分别为 $\delta = 10\pi$  MHz,  $\Omega = 60\pi$  MHz;  $\delta = 20\pi$  MHz,  $\Omega = 120\pi$  MHz和 $\delta = 100\pi$  MHz,  $\Omega = 240\pi$  MHz时的布居数动力学, 如图3所示, 为简单起见只给

出了其中一个基态  $|g_1\rangle$  上的布居数. 结果表明, 满足大失谐条件的动力学在相当长时间内绝热消除理论都能给出非常精确的结果 (图 3(a)). 当双光子失谐和 Rabi 频率逐渐增大, 绝热消除模型的动力学开始偏离原始模型 (图 3(b)). 当大失谐条件  $\Omega, \gamma, \delta \ll \Delta$  被完全破坏, 有效二能级模型即使在很短演化时间内已经不能描述系统的快变动力学, 如图 3(c) 所示, 此时该近似不再适用. 因此系统参数的选择会影响到高能级绝热消除的效果.

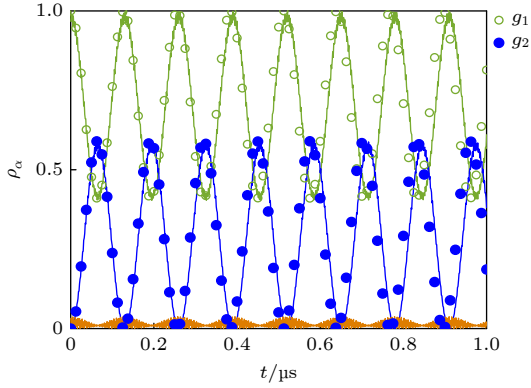


图 2 三能级  $\Lambda$  系统布居数动力学. 单光子失谐  $\Delta_1 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 605\pi$  MHz 及  $\Omega_1 = \Omega_2 = 120\pi$  MHz, 初态  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ , 其中实线为消除前三能级布居数 (绿线、蓝线、橙线分别代表  $|g_1\rangle, |g_2\rangle, |e\rangle$  态), 圆点为消除后有效二能级系统布居数 (绿点和蓝点分别代表  $|g_1\rangle$  和  $|g_2\rangle$  态)

Fig. 2. Population dynamics of the three-level  $\Lambda$  system and the effective two-level system for  $\Delta_1 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 605\pi$  MHz and  $\Omega_1 = \Omega_2 = 120\pi$  MHz starting from the initial state  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ . Green, blue, and orange line denote the population of  $|g_1\rangle, |g_2\rangle, |e\rangle$  state before adiabatic elimination, respectively. Green and blue dots denote the population of  $|g_1\rangle$  and  $|g_2\rangle$  state after adiabatic elimination, respectively.

### 3 三能级非厄米系统绝热消除

本节探讨三能级非厄米系统绝热消除的过程. 在如图 1 所示的三能级原子的基础上考虑两个基态  $|g_1\rangle$  和  $|g_2\rangle$  分别存在耗散 ( $-i\gamma_1$ ) 和增益 ( $+i\gamma_2$ ), 其哈密顿量是非厄米的:

$$H = \begin{pmatrix} \hbar(\Delta_2 - \Delta) + i\gamma_2 & \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} & -\hbar\Delta & \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\ 0 & \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} & \hbar(\Delta_1 - \Delta) - i\gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

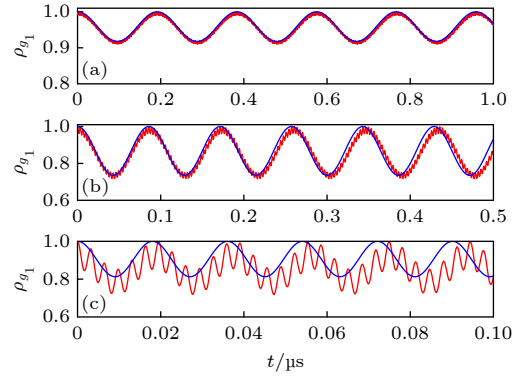


图 3 三能级  $\Lambda$  系统  $|g_1\rangle$  态布居数动力学. 初态  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ , 其中红线为消除前  $|g_1\rangle$  态布居数, 蓝线为消除后  $|g_1\rangle$  态布居数. 图 (a)–(c) 中, 双光子失谐和 Rabi 频率分别为  $\delta = 10\pi$  MHz,  $\Omega = 60\pi$  MHz;  $\delta = 20\pi$  MHz,  $\Omega = 120\pi$  MHz;  $\delta = 100\pi$  MHz,  $\Omega = 240\pi$  MHz

Fig. 3. Population dynamics of the  $|g_1\rangle$  state of the three-level  $\Lambda$  system for (a)  $\delta = 10\pi$  MHz,  $\Omega = 60\pi$  MHz; (b)  $\delta = 20\pi$  MHz,  $\Omega = 120\pi$  MHz; (c)  $\delta = 100\pi$  MHz,  $\Omega = 240\pi$  MHz starting from the initial state  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ . Red and blue line denote the population of  $|g_1\rangle$  state before and after adiabatic elimination, respectively.

$$H = -(\hbar\omega_{02} - i\gamma_2)|g_2\rangle\langle g_2| - \hbar(\omega_{01} + i\gamma_1)|g_1\rangle\langle g_1| + \sum_{i=1}^2 \frac{\hbar\Omega_i}{2} (\sigma_i e^{i\omega_i t} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \text{h.c.}). \quad (8)$$

系统  $t$  时刻波函数可在  $|g_2, e, g_1\rangle$  空间展开为  $|\psi\rangle = c_{g_2}|g_2\rangle + c_e|e\rangle + c_{g_1}|g_1\rangle$ , 这里  $c_{g_1}$ ,  $c_{g_2}$  和  $c_e$  分别表示展开系数. 重新定义旋转坐标中波函数

$$|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{c}_{g_1}|g_1\rangle + \tilde{c}_{g_2}|g_2\rangle + \tilde{c}_e|e\rangle, \quad (9)$$

其中,  $\tilde{c}_{g_i}(t) = c_{g_i}(t)e^{-i\omega_i t}$ ,  $\tilde{c}_e(t) = c_e(t)$ . 平移  $-\hbar\Delta$  能量, 相当于引入变换  $\tilde{c}'_\alpha(t) = c_\alpha(t)e^{i\Delta t}$  ( $\alpha = g_2, e, g_1$ ), 相应的薛定谔方程为

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{g_2} = i\gamma_2 \tilde{c}'_{g_2} + \hbar(\Delta_2 - \Delta) \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_e, \quad (10)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_e = \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{g_2} - \hbar\Delta \tilde{c}'_e, \quad (11)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{g_1} = -i\gamma_1 \tilde{c}'_{g_1} + \hbar(\Delta_1 - \Delta) \tilde{c}'_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_e. \quad (12)$$

绝热消除前哈密顿量在  $|g_2, e, g_1\rangle$  空间中的矩阵形式为 (此时原子的运动体现在坐标  $\mathbf{r}$  上)

在绝热消除条件下,  $|e\rangle$  态上布居数近似为 0, 且快速衰减达到平衡状态 ( $\partial_t \tilde{c}'_e = 0$ ), 可以得到

$$\tilde{c}'_e = \frac{\Omega_1}{2\Delta} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{g_1} + \frac{\Omega_2}{2\Delta} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{g_2}. \quad (14)$$

将 (14) 式代入基态的运动方程 (10) 和方程 (12) 并将之前的  $-\hbar\Delta$  能量平移回去得到

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}_{g_2} = i\gamma_2 \tilde{c}_{g_2} + \hbar\Delta_2 \tilde{c}_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_2^2}{4\Delta} \tilde{c}_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{4\Delta} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}_{g_1}, \quad (15)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}_{g_1} = -i\gamma_1 \tilde{c}'_{g_1} + \hbar\Delta_1 \tilde{c}_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_1^2}{4\Delta} \tilde{c}_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{4\Delta} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}_{g_2}. \quad (16)$$

最终, 将绝热消除后的哈密顿量整理成矩阵形式为

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_2 + i\gamma_2 & \frac{\hbar\Omega_R}{2} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \\ \frac{\hbar\Omega_R}{2} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} & \epsilon_1 - i\gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

这样就完成了三能级非厄米系统的绝热消除过程, 两个基态能级得以有效保留, 可以看到考虑原子运动与否并不影响绝热消除. 为验证绝热消除的准确性, 可以简单忽略掉原子的动量变化 (即考虑原子静止在  $\mathbf{r} = 0$  的位置), 此时方便求解方程 (13) 和方程 (17) 所对应的非厄米三能级和消除后二能级演化动力学. 选取与厄米  $\Lambda$  原子相同的系统参数, 耗散因子  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2\pi$  MHz, 考察初态处于  $|\psi_0\rangle = (|g_2\rangle - |g_1\rangle)/\sqrt{2}$  的布居数演化, 如图 4 所示. 该初态对应  $\Delta = 0$  情况下系统的暗态<sup>[33]</sup>. 图 4 中实线为消除前三能级布居数, 圆点为消除后二能级系统布居数, 灰色虚线代表系统总布居数, 此外图中给出了以平均值  $\Delta = 600\pi$  MHz 为中心几种不同双光子失谐量  $\delta = 0, 10\pi, 20\pi, 30\pi$  MHz 对系统总布居数的影响. 与厄米情况不同的是, 由于  $g_2$  态上存在增益, 演化初期  $g_2$  上布居数周期振荡, 而  $g_1$  态上的耗散将使其上的布居数随时间振荡并逐渐减少, 带来的后果是总布居数边振荡边下降. 但这种演化行为并不会一直持续下去, 长时间演化增益的作用会使系统布居数发散, 绝热消除后的有效二能级系统可以精确地描述该行为. 可以看到  $\delta = 0$  时非厄米参数对系统动力学的影响表现在总布居数虽然小幅振荡但仍然保持守恒. 当存在双光子失谐时, 总布居数超过 1 并趋于发散, 而这里趋于发散

的时间随着  $\delta$  的增大而提前. 另外, 此处的计算同样适用于耗散与增益因子不相等的情况 ( $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ), 我们发现当耗散与增益比例满足一定比例时可实现长时总布居数守恒, 如增益固定在  $\gamma_2 = 0.2\pi$  MHz,  $\gamma_1/\gamma_2 = 4.689$  时系统在很长时间内总布居数保持常数.

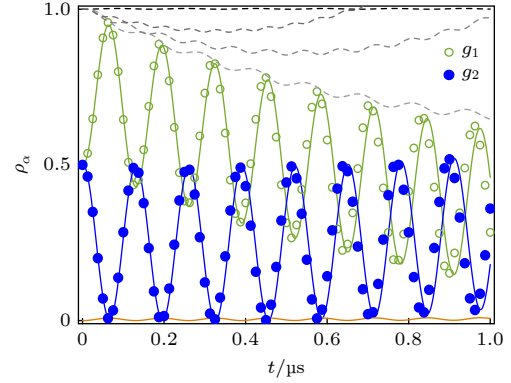


图 4 三能级非厄米  $\Lambda$  系统布居数动力学. 单光子失谐  $\Delta_1 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 605\pi$  MHz 以及  $\Omega_1 = \Omega_2 = 120\pi$  MHz, 耗散  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2\pi$  MHz, 初态  $|\psi_0\rangle = (|g_2\rangle - |g_1\rangle)/\sqrt{2}$ . 其中实线为消除前三能级布居数 (绿线、蓝线、橙线分别代表  $|g_1\rangle$ ,  $|g_2\rangle$ ,  $|e\rangle$  态), 圆点为消除后有效二能级系统布居数 (绿点和蓝点分别代表  $|g_1\rangle$  和  $|g_2\rangle$  态). 灰色虚线代表系统总布居数, 从下到上依次为双光子失谐  $\delta = 10\pi, 20\pi, 30\pi$  MHz. 特别地当双光子失谐为 0 时, 总布居数不会发散 (黑色虚线)

Fig. 4. Population dynamics of the three-level  $\Lambda$  type non-Hermitian system for  $\Delta_1 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 605\pi$  MHz and  $\Omega_1 = \Omega_2 = 120\pi$  MHz, with the dissipative parameter  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2\pi$  MHz, starting from the initial state  $|\psi_0\rangle = (|g_2\rangle - |g_1\rangle)/\sqrt{2}$ . Green, blue, and orange line denote the population of  $|g_1\rangle$ ,  $|g_2\rangle$ ,  $|e\rangle$  state before adiabatic elimination, respectively. Green and blue dots denote the population of  $|g_1\rangle$  and  $|g_2\rangle$  state after adiabatic elimination, respectively. The gray dashed line represents the total population of atoms, with two-photon detunings of  $10\pi, 20\pi, 30\pi$  MHz from bottom to top. Specifically when the two photon detuning is 0, the total population will not diverge (see the black dashed line).

#### 4 双 $\Lambda$ 型五能级系统绝热消除

光场操控原子实验中实际用到的原子能级并不是简单的三能级系统, 比如在碱金属原子的玻色爱因斯坦凝聚实现自旋-轨道耦合的实验中, 经常采用的是超精细自旋  $F = 1$  的原子基态, 该原子态在偏置磁场中会分裂为 3 条超精细能级  $m_F = 1, 0, -1$ . 下面研究两种五能级原子构型中的绝热消除问题.

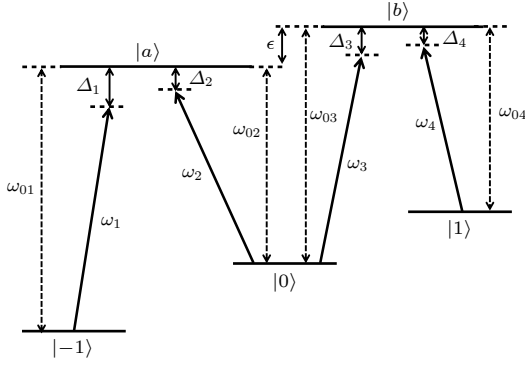


图 5 双Λ型五能级系统能级图

Fig. 5. Five-level double-Λ type system.

考虑如图 5 所示的双 Λ 型五能级原子能级结构, 该模型是对三能级 Λ 型原子的推广. 其中, 基态  $|\alpha\rangle$  ( $\alpha = 1, 0, -1$ ) 通过 4 束频率为  $\omega_i$  的激光耦合到激发态  $|\beta\rangle$  ( $\beta = a, b$ ), 单光子失谐  $\Delta_i = \omega_i - \omega_{0i}$  都很接近, 两激发态能级差为  $\epsilon = \omega_{03} - \omega_{02}$ . 我们将证明, 在适当的条件下, 可以实现五能级原子的布居数可以仅在 3 个基态之间转移, 即有效的三能级模型. 这里采用文献 [25] 中能级的符号, 双 Λ 型五能级自由原子哈密顿量为

$$H_{AA} = -\hbar(\omega_{03} - \omega_{02})|a\rangle\langle a| - \hbar(\omega_{03} - \omega_{02} + \omega_{01})|-1\rangle\langle -1| - \hbar\omega_{03}|0\rangle\langle 0| - \hbar\omega_{04}|1\rangle\langle 1|, \quad (18)$$

式中将  $|b\rangle$  态设为能量零点. 通过偶极近似和旋波近似后, 原子和场相互作用的哈密顿量可表示为

$$H_{AFA} = \sum_{i=1}^4 \frac{\hbar\Omega_i}{2} (\sigma_i e^{i\omega_i t} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \text{h.c.}). \quad (19)$$

其中  $\Omega_i$  表示 4 种具体的耦合方式的拉比频率, 如图 5 所示,  $\sigma_i = |\alpha\rangle\langle\beta|$  为相应的原子下降算符, 如  $\Omega_1 = \langle -1|\hat{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{d}|a\rangle E_{01}/\hbar$ ,  $\sigma_1 = |-1\rangle\langle a|$  等.  $t$  时刻系统波函数在  $|\alpha, \beta\rangle$  空间展开为  $|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\alpha\rangle + \sum_{\beta} c_{\beta}|\beta\rangle$ . 定义旋转坐标系中的波函数为

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha}|\alpha\rangle + \sum_{\beta} \tilde{c}_{\beta}|\beta\rangle, \quad (20)$$

其中,  $\tilde{c}_b = c_b e^{i(\omega_3 - \omega_2 + \omega_1)t}$ ,  $\tilde{c}_a = c_a e^{i\omega_1 t}$ ,  $\tilde{c}_1 = c_1 e^{i(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2 - \omega_4)t}$ ,  $\tilde{c}_0 = c_0 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}$ ,  $\tilde{c}_{-1} = c_{-1}$ . 同理平移能量  $-\hbar(\Delta' + \omega')$ , 其中  $\Delta' = (\Delta_a + \Delta_b)/2$ ,  $\Delta_a = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$ ,  $\Delta_b = (\Delta_3 + \Delta_4)/2$ ,  $\omega' = \omega_2 - \omega_3 - \omega_1$ . 令  $\tilde{c}'_{\alpha, \beta} = \tilde{c}_{\alpha, \beta} e^{i(\Delta' + \omega')t}$ , 相应的薛定谔方程为

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_b = -\hbar\Delta' \tilde{c}'_b + \frac{\hbar\Omega_3}{2} e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0 + \frac{\hbar\Omega_4}{2} e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_1, \quad (21)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_a = \hbar(\Delta_3 - \Delta_2 - \Delta') \tilde{c}'_a + \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{-1} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0, \quad (22)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_1 = \hbar(\Delta_4 - \Delta') \tilde{c}'_1 + \frac{\hbar\Omega_4}{2} e^{-i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_b, \quad (23)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_0 = \hbar(\Delta_3 - \Delta') \tilde{c}'_0 + \frac{\hbar\Omega_2}{2} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_a + \frac{\hbar\Omega_3}{2} e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_b, \quad (24)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{-1} = \hbar(\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta') \tilde{c}'_{-1} + \frac{\hbar\Omega_1}{2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_a. \quad (25)$$

当系统处在弱场中 ( $\Omega_i \ll \Delta'$ ), 在大失谐条件下, 激发态的衰变速率  $\gamma$ , 双光子失谐  $\delta_a = \Delta_2 - \Delta_1$ ,  $\delta_b = \Delta_4 - \Delta_3$  均远小于单光子失谐  $\Delta_i$ , 即  $\delta, \gamma \ll \Delta_i$ , 原子和光场相互作用可视为微扰. 激发态  $|b\rangle, |a\rangle$  的布居数很小且快速达到平衡, 令  $\partial_t \tilde{c}'_a = \partial_t \tilde{c}'_b = 0$ , 可以得到

$$\tilde{c}'_b = \frac{\Omega_3}{2\Delta'} e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0 + \frac{\Omega_4}{2\Delta'} e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_1, \quad (26)$$

$$\tilde{c}'_a = \frac{\Omega_1}{2(\Delta' + \Delta_2 - \Delta_3)} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{-1} + \frac{\Omega_2}{2(\Delta' + \Delta_2 - \Delta_3)} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0. \quad (27)$$

在此基础上, 将  $\tilde{c}'_b$  和  $\tilde{c}'_a$  代入基态的运动方程 (23)–(25) 中, 整理得到

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_1 = \hbar(\Delta_4 - \Delta') \tilde{c}'_1 + \frac{\hbar\Omega_3\Omega_4}{4\Delta'} e^{-i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0 + \frac{\hbar\Omega_4^2}{4\Delta'} \tilde{c}'_1, \quad (28)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_0 = \hbar(\Delta_3 - \Delta') \tilde{c}'_0 + \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{4(\Delta' + \Delta_2 - \Delta_3)} \times e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_{-1} + \frac{\hbar\Omega_2^2}{4(\Delta' + \Delta_2 - \Delta_3)} \tilde{c}'_0 + \frac{\hbar\Omega_3^2}{4\Delta'} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0 + \frac{\hbar\Omega_3\Omega_4}{4\Delta'} \tilde{c}'_1, \quad (29)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{-1} = \hbar(\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta') \tilde{c}'_{-1} + \frac{\hbar\Omega_1^2}{4(\Delta' + \Delta_2 - \Delta_3)} \tilde{c}'_{-1} + \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{4(\Delta' + \Delta_2 - \Delta_3)} \times e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \tilde{c}'_0. \quad (30)$$

接着将之前平移的  $-\hbar\Delta'$  能量移回去, 需要将坐标系转换回之前的形式, 具体过程见前 3 节, 有效哈密顿量在  $|1, 0, -1\rangle$  空间中的矩阵形式为

$$\mathbf{H}_\Lambda = \begin{pmatrix} \hbar\delta_b + \frac{\hbar\Omega_4^2}{4\Delta'} & \frac{\hbar\Omega_3\Omega_4}{4\Delta'} e^{-i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}} & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_3\Omega_4}{4\Delta'} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}} & \frac{\hbar\Omega_3^2}{4\Delta'} + \frac{\hbar\Omega_2^2}{4(\Delta' - \delta')} & \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{4(\Delta' - \delta')} e^{-i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} \\ 0 & \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{4(\Delta' - \delta')} e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} & -\hbar\delta_a + \frac{\hbar\Omega_1^2}{4(\Delta' - \delta')} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中  $\delta' = \Delta_3 - \Delta_2 \ll \Delta'$ . 实验上一般采用两束垂直的激光束照射原子来实现自旋与动量的 Raman 耦合. 这种情况下, 光束 1 和 3 是同一束光, 2 和 4 是同一束光, 即有  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4$ . Raman 耦合实现自旋-轨道耦合方案中需要引入偏置磁场  $B_0$  将基态的超精细能级 (如  $F = 1$ ) 劈裂为 3 条

$$\mathbf{H}_\Lambda = \mathbf{H}_k + \begin{pmatrix} \hbar\delta_b + \hbar\Omega_2^2/(4\Delta') & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\Omega_1^2/(4\Delta') + \hbar\Omega_2^2/(4\Delta') & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\delta_a + \hbar\Omega_1^2/(4\Delta') \end{pmatrix}. \quad (32)$$

$\mathbf{H}_k = \frac{\hbar\Omega_1\Omega_2}{2\sqrt{2}\Delta'} [\mathbf{S}_{3,x} \cos(k_2 - k_1)x + \mathbf{S}_{3,y} \sin(k_2 - k_1)x]$   $\mathbf{S}_{3,x}$  和  $\mathbf{S}_{3,y}$  为自旋 1 的泡利矩阵, 将哈密顿量平移  $\frac{\hbar\delta_a}{2} - \frac{\hbar\Omega_1^2}{4\Delta'} - \frac{\hbar\Omega_2^2}{8\Delta'}$  整理可得

$$\mathbf{H}_\Lambda = \mathbf{H}_k + \begin{pmatrix} 3\hbar\delta/2 + \hbar\omega_q & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\delta/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\delta/2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

其中,  $\delta = \delta_a + \Omega_2^2/(4\Delta')$ . 在大失谐条件下, 当偏置磁场较小时, 仅考虑线性 Zeeman 效应,  $\delta_a = \delta_b$ , 二次劈裂全部来自于交变斯塔克位移, 即  $\omega_q = -\Omega_2^2/(4\Delta') - \Omega_1^2/(4\Delta')$ . 当偏置磁场较大时, 大的二次 Zeeman 劈裂可使  $m_F = 1$  能级与其他能级远失谐, 从而该能级被忽略, 进而得到有效二能级系统. 这正是 Lin 等<sup>[25]</sup>工作的实验方案. 在自旋 1 的自旋-轨道耦合方案中则同时保留 3 个基态能级, 可得到更为丰富的自旋-轨道耦合相图<sup>[16]</sup>.

为验证消除的有效性, 同样考虑静止原子的情况, 数值计算五能级  $\Lambda$  系统绝热消除前后的系统中不同能级的原子布居数随时间变化的情况. 取系统初态  $|\psi_0\rangle = |-1\rangle$ , 单光子失谐  $\Delta_1 = 590\pi$  MHz,  $\Delta_2 = \Delta_3 = 600\pi$  MHz,  $\Delta_4 = 610\pi$  MHz, 拉比频率  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 120\pi$  MHz. 如图 6 所示, 实线为消除前各能级布居数, 数据点为消除后有效三能级布居数, 二者在较长演化时间符合得很好. 可以看出处在初态  $|-1\rangle$  的原子与光场相互作用发生

$m_F = 1, 0, -1$ . 然后通过调节 Raman 光的频率将想要的能级选出来. 由于碱金属原子中  $m_F = 1, 0, -1$  都是 s 轨道, 而上能级都属于 p 轨道, 故跃迁矩阵元  $\langle s|d|p\rangle$  对图 4 所示的跃迁过程大致相等, 即  $\Omega_1 = \Omega_3$ ,  $\Omega_2 = \Omega_4$ . 当两束光传播方向互相垂直, 将光的波矢考虑进来可以得到

能级跃迁, 粒子数在 3 个基态间转移振荡. 同时, 几乎没有粒子处于激发态  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  上, 即大失谐条件下两个系统激发态被绝热消除.

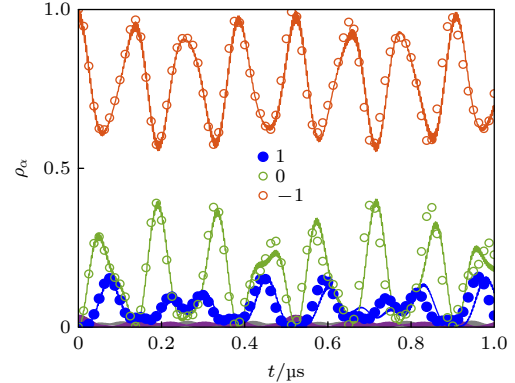


图 6 双  $\Lambda$  型五能级系统数值解布居数动力学. 单光子失谐  $\Delta_1 = 590\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 600\pi$  MHz,  $\Delta_3 = 600\pi$  MHz,  $\Delta_4 = 610\pi$  MHz, 拉比频率  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 120\pi$  MHz, 处在初态  $|\psi_0\rangle = |-1\rangle$ . 其中实线为消除前能级布居数 (蓝线、绿线、橙线、紫线、灰线分别代表  $|1\rangle$ ,  $|0\rangle$ ,  $|-1\rangle$ ,  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  态), 圆点为消除后有效三能级布居数 (蓝点、绿点和橙点分别代表  $|1\rangle$ ,  $|0\rangle$ ,  $|-1\rangle$  态)

Fig. 6. Population dynamics of five-level double- $\Lambda$  system for  $\Delta_1 = 590\pi$  MHz,  $\Delta_2 = \Delta_3 = 600\pi$  MHz,  $\Delta_4 = 610\pi$  MHz and  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 120\pi$  MHz starting from the initial state  $|\psi_0\rangle = |-1\rangle$ . The solid line represents the population before elimination (blue, green, orange, purple, and gray line represent levels  $|1\rangle$ ,  $|0\rangle$ ,  $|-1\rangle$ ,  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ , respectively), and the circular dot represents the population of the three energy levels after elimination (blue, green, and orange dots correspond to levels  $|1\rangle$ ,  $|0\rangle$ ,  $|-1\rangle$ , respectively).

## 5 双 V 型五能级系统绝热消除

本节考虑如图 7 所示的双 V 型五能级系统的绝热消除. 其中, 两个基态  $|\alpha\rangle$  ( $\alpha = g_1, g_2$ ) 通过 4 束激光耦合到激发态  $|\beta\rangle$  ( $\beta = e_1, e_2, e_3$ ), 单光子失谐为  $\Delta_i = \omega_{0i} - \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). 将  $|e_3\rangle$  作为能量零点, 此时自由粒子哈密顿量为

$$H_{AV} = -\hbar\epsilon_2|e_2\rangle\langle e_2| - \hbar(\epsilon_1 + \epsilon_2)|e_1\rangle\langle e_1| - \hbar\omega_{04}|g_2\rangle\langle g_2| - \hbar(\epsilon_2 + \omega_{02})|g_1\rangle\langle g_1|. \quad (34)$$

系统激发态能级差为  $\epsilon_1 = \omega_{02} - \omega_{01}$ ,  $\epsilon_2 = \omega_{04} - \omega_{03}$ . 在偶极近似和旋波近似下, 原子和场相互作用的哈密顿量与双  $\Lambda$  型五能级系统形式相同. 结合第 4 节的原子与光相互作用哈密顿量, 可以写出双 V 型五能级系统能级的总哈密顿量 (简单起见, 仍考虑静止原子):

$$H_V = H_{AV} + \sum_{i=1}^4 \frac{\hbar\Omega_i}{2} (\sigma_i e^{i\omega_i t} + \text{h.c.}) \quad (35)$$

式中,  $\Omega_i$  表示 4 种具体的耦合方式的拉比频率, 如图 7 所示,  $\sigma_i = |\alpha\rangle\langle\beta|$  为相应的原子降算符,  $\Omega_1 = \langle g_1|\hat{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{d}|e_1\rangle E_{01}/\hbar$ ,  $\sigma_1 = |g_1\rangle\langle e_1|$  等.  $t$  时刻系统波函数在  $|\alpha, \beta\rangle$  空间展开为  $|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\alpha\rangle + \sum_{\beta} c_{\beta}|\beta\rangle$ , 定义旋转坐标系中的波函数为

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha}|\alpha\rangle + \sum_{\beta} \tilde{c}_{\beta}|\beta\rangle, \quad (36)$$

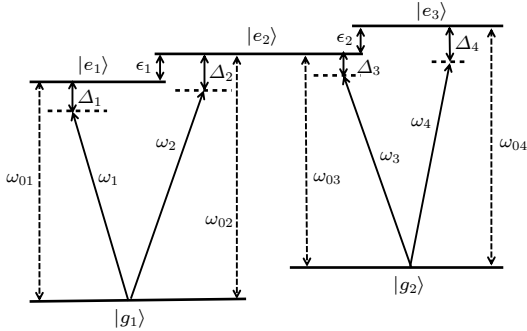


图 7 双 V 型五能级系统能级图

Fig. 7. Five-level double-V type hermitian system energy level diagram.

$\tilde{c}_{e_3} = c_{e_3}$ ,  $\tilde{c}_{e_2} = c_{e_2} e^{i(\omega_3 - \omega_4)t}$ ,  $\tilde{c}_{e_1} = c_{e_1} e^{i(\omega_3 + \omega_1 - \omega_2 - \omega_4)t}$ ,  $\tilde{c}_{g_2} = c_{g_2} e^{-i\omega_4 t}$ ,  $\tilde{c}_{g_1} = c_{g_1} e^{i(\omega_3 - \omega_4 - \omega_2)t}$ . 定义  $\tilde{c}'_{\alpha, \beta}(t) = \tilde{c}_{\alpha, \beta}(t) e^{i\Delta' t}$ , 平移能量  $-\hbar\Delta'$  后运动方程整理为

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{e_3} = -\hbar\Delta' \tilde{c}'_{e_3} + \frac{\hbar\Omega_4}{2} \tilde{c}'_{g_2}, \quad (37)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{e_2} = \hbar(\Delta_4 - \Delta_3 - \Delta') \tilde{c}'_{e_2} + \frac{\hbar\Omega_3}{2} \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} \tilde{c}'_{g_1}, \quad (38)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{e_1} = \hbar(\Delta_4 - \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1 - \Delta') \tilde{c}'_{e_1} + \frac{\hbar\Omega_1}{2} \tilde{c}'_{g_1}, \quad (39)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{g_2} = \hbar(\Delta_4 - \Delta') \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_4}{2} \tilde{c}'_{e_3} + \frac{\hbar\Omega_3}{2} \tilde{c}'_{e_2}, \quad (40)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{g_1} = \hbar(\Delta_4 - \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta') \tilde{c}'_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_2}{2} \tilde{c}'_{e_2} + \frac{\hbar\Omega_1}{2} \tilde{c}'_{e_1}. \quad (41)$$

类似地, 在大失谐的条件下可以绝热消除激发态  $|\beta\rangle$ , 即  $\partial_t \tilde{c}'_{\beta} = 0$ , 可以得到

$$\tilde{c}'_{e_3} = \frac{\Omega_4}{2\Delta'} \tilde{c}'_{g_2}, \quad (42)$$

$$\tilde{c}'_{e_2} = \frac{\Omega_3}{2(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3)} \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\Omega_2}{2(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3)} \tilde{c}'_{g_1}, \quad (43)$$

$$\tilde{c}'_{e_1} = \frac{\Omega_1}{2(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3 - \Delta_2 + \Delta_1)} \tilde{c}'_{g_1}. \quad (44)$$

将 (42)–(44) 式代入基态的运动方程 (40) 和方程 (41) 得到

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{g_2} = \hbar(\Delta_4 - \Delta') \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_4^2}{4\Delta'} \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_3^2}{4(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3)} \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_2\Omega_3}{4(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3)} \tilde{c}'_{g_1}, \quad (45)$$

$$i\hbar\partial_t \tilde{c}'_{g_1} = \hbar(\Delta_4 - \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta') \tilde{c}'_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_2\Omega_3}{4(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3)} \tilde{c}'_{g_2} + \frac{\hbar\Omega_2^2}{4(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3)} \tilde{c}'_{g_1} + \frac{\hbar\Omega_1^2}{4(\Delta' - \Delta_4 + \Delta_3 - \Delta_2 + \Delta_1)} \tilde{c}'_{g_1}. \quad (46)$$

将  $-\hbar\Delta'$  还原, 得到双 V 型五能级系统消除后的有效二能级系统, 其在  $|g_2, g_1\rangle$  空间中的矩阵形式为

$$\mathbf{H}_V = \begin{pmatrix} \hbar\delta' + \frac{\hbar\Omega_4^2}{4\Delta'} + \frac{\hbar\Omega_3^2}{4(\Delta' - \delta_b)} & \frac{\hbar\Omega_2\Omega_3}{4(\Delta' - \delta_b)} \\ \frac{\hbar\Omega_2\Omega_3}{4(\Delta' - \delta_b)} & \frac{\hbar\Omega_2^2}{4(\Delta' - \delta_b)} + \frac{\hbar\Omega_1^2}{4(\Delta' - \delta_b - \delta_a)} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

式中,  $\delta' = \Delta_3 - \Delta_2$ . 考虑哈密顿量 (35) 和 (47) 对应的双 V 型五能级系统和绝热消除后二能级系统中不同能级的原子布居数随时间变化的情况. 取系统初态  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ , 单光子失谐  $\Delta_1 = 590\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_3 = 605\pi$  MHz,  $\Delta_4 = 610\pi$  MHz, 拉比频率  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 120\pi$  MHz. 如图 8 所示, 实线为消除前能级布居数, 圆点为消除后能级布居数, 二者在较长演化时间内符合很好. 处在初态  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$  的粒子因受激辐射而发生能级跃迁并在两个基态间转移振荡. 最后, 大部分粒子处在基态  $|g_1\rangle$  和  $|g_2\rangle$  上, 几乎没有粒子处于激发态  $|e_\beta\rangle$  上, 大失谐条件下系统激发态被绝热消除.

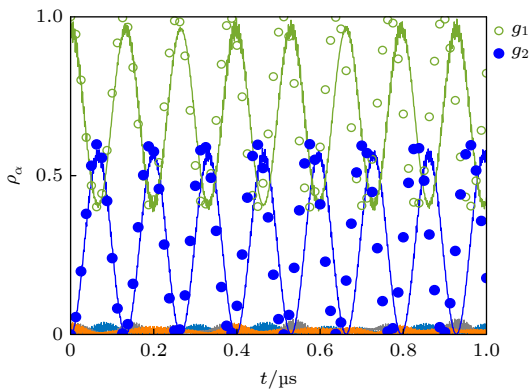


图 8 双 V 型五能级系统绝热消除后的数值解布居数动力学图. 单光子失谐  $\Delta_1 = 590\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_3 = 605\pi$  MHz,  $\Delta_4 = 610\pi$  MHz, 拉比频率  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 120\pi$  MHz, 初态  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ . 其中实线为消除前能级布居数 (绿线、蓝线、橙线、灰线、浅蓝色线分别代表  $|g_1\rangle$ ,  $|g_2\rangle$ ,  $|e_1\rangle$ ,  $|e_2\rangle$ ,  $|e_3\rangle$  态), 圆点为消除后有效二能级的布居数 (绿点和蓝点分别代表  $|g_1\rangle$  和  $|g_2\rangle$  态)

Fig. 8. Population dynamics of the five-level double-V system for  $\Delta_1 = 590\pi$  MHz,  $\Delta_2 = 595\pi$  MHz,  $\Delta_3 = 605\pi$  MHz,  $\Delta_4 = 610\pi$  MHz and  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 120\pi$  MHz starting from the initial state  $|\psi_0\rangle = |g_1\rangle$ . Green, blue, orange, gray, light blue line denote the population of  $|g_1\rangle$ ,  $|g_2\rangle$ ,  $|e_1\rangle$ ,  $|e_2\rangle$ ,  $|e_3\rangle$  state before adiabatic elimination, respectively. Green and blue dots denote the population of  $|g_1\rangle$  and  $|g_2\rangle$  state after adiabatic elimination, respectively.

另外, 若考虑系统 3 个激发态能级完全相同, 且光束 1 和 2 相同, 3 和 4 相同, 此时  $\delta_a = \delta_b = 0$ , 拉比频率满足  $\Omega_1 = \Omega_2, \Omega_3 = \Omega_4$ . 容易得到绝热消除后的哈密顿量与三能级  $\Lambda$  型系统绝热消除后的结果 (5) 式完全一致.

## 6 结 论

本文以三能级厄米系统的绝热消除理论为基

础, 研究了三能级非厄米系统与两种五能级系统的绝热消除过程. 五能级系统的绝热消除一般需要 4 束激光将基态分别耦合到激发态上, 但本质上仍是在大失谐条件下将所有激发态上的布居数进行绝热消除. 物理上当满足大失谐条件  $\Omega, \gamma, \delta \ll \Delta$  时, 光场将原子激发到激发态的概率很小, 导致激发态布居数近似为 0, 且会快速衰减达到平衡状态. 这样激发态的运动方程自动消失, 剩下基态的运动方程对应一个只含基态能级的有效哈密顿量, 该过程适用于所有大失谐情况下的光与原子相互作用系统, 包括非厄米体系. 结果表明发现三能级非厄米系统耗散与增益符合一定比例时, 系统总布居数在较长时间保持稳定, 五能级双  $\Lambda$  系统采用两束激光耦合绝热消除后的结果可以作为冷原子自旋-轨道耦合的原型哈密顿量, 五能级双 V 系统绝热消除后的结果在激发态能级相同时与三能级  $\Lambda$  系统的结果自洽. 各系统的布居数随时间演化在绝热消除前后在较长演化时间内保持一致, 证明了绝热消除理论的广泛适用性.

## 参考文献

- [1] Kittel C 1963 *Quantum Theory of Solids* (New York: John Wiley and Sons)
- [2] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [3] Zheng W, Yu Z Q, Cui X L, Zhai H 2013 *J. Phys. B* **46** 134007
- [4] Jian C M, Zhai H 2011 *Phys. Rev. B* **84** 060508
- [5] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [6] Jiao C, Jian Y, Zhang A X, Xue J K 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 060302 (in Chinese) [焦宸, 简粤, 张爱霞, 薛具奎 2023 物理学报 **72** 060302]
- [7] Shi T T, Wang L J, Wang J K, Zhang W 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 016701 (in Chinese) [施婷婷, 汪六九, 王璟琨, 张威 2020 物理学报 **69** 016701]
- [8] Chen X, Xue X B, Zhang S K, Ma Y Q, Fei P, Jiang Y, Ge J 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 083401 (in Chinese) [陈星, 薛潇博, 张升康, 马余全, 费鹏, 姜元, 葛军 2021 物理学报 **70** 083401]
- [9] Campbell D L, Price R M, Putra A, Valdés-Curiel A, Trypogeorgos D, Spielman I B 2016 *Nat. Commun.* **7** 10897
- [10] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature*. **494** 49
- [11] Stanescu T D, Anderson B, Galitski V 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023616
- [12] Xu P, Deng T S, Zheng W, Zhai H 2015 *Phys. Rev. A* **103** L061302
- [13] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z k, Miao J, Huang L H, Chai S J, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [14] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [15] Chen X L, Wang J, Li Y, Liu X J, Hu H 2018 *Phys. Rev. A*.

98 013614

- [16] Lan Z H, Öhberg P 2014 *Phys. Rev. A.* **89** 023630
- [17] Chen L, Pu H, Zhang Y B 2016 *Phys. Rev. A.* **93** 013629
- [18] Zhai H 2012 *Int. J. Mod. Phys. B* **26** 1230001
- [19] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [20] He L, Yu Z Q 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 220301 (in Chinese)  
[贺丽, 余增强 2017 物理学报 **66** 220301]
- [21] Geier K T, Martone G I, Hauke P, Stringari S 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 115301
- [22] Liao R Y 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 140403
- [23] Chen L, Zhang Y B, Pu H 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 195303
- [24] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [25] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature.* **471** 83
- [26] Steck D A 2007 *Quantum and Atom Optics* (Eugene, Oregon: Department of Physics, University of Oregon)
- [27] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliūnas G, Öhberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [28] Bergmann K, Theuer H, Shore B W 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 1003
- [29] Král P, Thanopoulos I, Shapiro M 2007 *Rev. Mod. Phys.* **79** 53
- [30] Brion E, Pedersen L H, Mølmer K 2007 *J. Phys. A* **40** 1033
- [31] Li H, Shen H Z, Wu S L, Yi X X 2017 *Optics Express.* **25** 30135
- [32] Li G Q, Chen G D, Peng P, Qi W 2017 *Eur. Phys. J. D* **71** 14
- [33] Guo L P, Du L, Yin C H, Zhang Y B, Chen S 2018 *Phys. Rev. A.* **97** 032109

# Adiabatic elimination theory of multi-level system in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate\*

Yuan Jia-Wang<sup>1)</sup> Chen Li<sup>2)</sup> Zhang Yun-Bo<sup>1)†</sup>

1) (*Key Laboratory of Optical Field Manipulation of Zhejiang Province, Department of Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

2) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

( Received 27 June 2023; revised manuscript received 6 August 2023 )

## Abstract

In quantum optics, adiabatic elimination simplifies multi-level quantum system by eliminating the fast oscillatory degree of freedom and preserving the slow-varying dynamics, thus obtaining an efficient description of the system. Adiabatic elimination has important applications in quantum simulation and quantum precision measurement. For example, spin-orbit coupling has been realized in ultracold atoms by using three-level Raman coupling and adiabatic elimination. In this paper, we investigate the theoretical method and generalize the adiabatic elimination in three-level non-Hermitian systems and multi-level systems on the basis of standard elimination scheme. These can provide theoretical guidance for realizing the interdiscipline of non-Hermitian physics and spin-orbit coupling effects and their potential applications. We mainly discuss the influences of dissipative effect on the population dynamics of the system, the validity and accuracy of the adiabatic elimination theory under different parameters for both non-Hermitian and two types of five-level systems. Specifically, the dynamics satisfying the large detuning condition gives very accurate results for quite a long evolution time with the adiabatic elimination theory, but when the two-photon detuning  $\delta$  and the Rabi frequency  $\Omega$  gradually increase, leading to the violation of the large detuning condition  $\Omega, \gamma, \delta \ll \Delta$ , the effective two-level model can no longer describe the fast-varying dynamics of the system even in a short evolution time. Thus the choice of system parameters affects the effectiveness of adiabatic elimination of the excited levels. In a non-Hermitian system, the population in the ground state oscillates with gain periodically at the beginning, while that in the ground state oscillates with loss and decreases with time, with the total population decreasing with oscillation. For long-time evolution the gain in the system causes the population to diverge, and the adiabatic elimination of the effective two-energy level system describes this behavior accurately. The effect of the non-Hermitian parameters on the dynamics of the system in the resonance case is manifested in the case that the total population remains conserved, while the total population tends to diverge for finite two-photon detuning. We find that with the increase of detuning, the divergence appears earlier and the total number of particles can be kept constant by choosing the ratio of gain to loss appropriately. This study provides a theoretical basis for state preparation and dynamical manipulation in dissipative multi-energy quantum systems.

**Keywords:** spin-orbit coupling, cold atomic gas, adiabatic elimination, Raman Process

**PACS:** 67.85.-d, 32.80.Qk, 03.75.Mn

**DOI:** [10.7498/aps.72.20231052](https://doi.org/10.7498/aps.72.20231052)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12074340, 12174236) and the Zhejiang Sci-Tech University of Technology Science Foundation, China (Grant No. 20062098-Y).

† Corresponding author. E-mail: [ybzhang@zstu.edu.cn](mailto:ybzhang@zstu.edu.cn)



自旋-轨道耦合玻色爱因斯坦凝聚中多能级绝热消除理论

袁家望 陈立 张云波

Adiabatic elimination theory of multi-level system in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate

Yuan Jia-Wang Chen Li Zhang Yun-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 216701 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231052

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231052>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

光晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性能谱特性

Nonlinear energy band structure of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in optical lattice

物理学报. 2021, 70(20): 200302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210705>

一维谐振子束缚的自旋轨道耦合玻色气体

One-dimensional spin-orbit coupling Bose gases with harmonic trapping

物理学报. 2019, 68(17): 173201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190143>

环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

自旋轨道耦合量子气体中的一些新进展

Some recent progresses on the study of ultracold quantum gases with spin-orbit coupling

物理学报. 2020, 69(1): 016701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191241>

自旋轨道耦合量子点系统中的量子相干

Quantum coherence in spin-orbit coupled quantum dots system

物理学报. 2022, 71(7): 078502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212111>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>