

专题: 非线性系统理论及其前沿应用

自旋张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚的动力学性质*

邱旭¹⁾ 王林雪²⁾ 陈光平³⁾ 胡爱元¹⁾ 文林^{1)†}

1) (重庆师范大学物理与电子工程学院, 重庆 401331)

2) (陕西科技大学物理系, 西安 710021)

3) (四川文理学院智能制造产业技术研究院, 达州 635000)

(2023 年 7 月 1 日收到; 2023 年 8 月 16 日收到修改稿)

利用高斯变分近似及基于 Gross-Pitaevskii 方程的数值求解, 研究了一维自旋张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚中平面波态的动力学性质, 发现基态为双轴向列态, 其动量随 Raman 耦合强度的增加而单调递减. 在微扰作用下, 基态具有动力学稳定性, 且展现出 3 种不同的谐振模激发, 激发频率与 Raman 耦合强度、谐振子势阱的纵横比及相互作用强度有关. 通过数值求解变分参数满足的运动方程和 Gross-Pitaevskii 方程, 发现体系随时间演化将展现出周期性振荡行为.

关键词: 自旋张量-动量耦合, 玻色-爱因斯坦凝聚, Gross-Pitaevskii 方程**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Kk, 03.75.Mn, 71.70.Ej**DOI:** 10.7498/aps.72.20231076

1 引言

自旋-轨道耦合是粒子的自旋与其运动自由度之间的耦合, 在许多新奇量子现象的产生中, 起着重要的作用, 如量子霍尔效应、拓扑绝缘体^[1]. 通过利用光与原子的相互作用, 实验上在电中性的超冷原子气体中实现了人造自旋-轨道耦合效应, 如自旋-动量耦合^[2-5]、自旋-轨道角动量耦合^[6-8]. 人造自旋-轨道耦合的实验实现, 不仅为利用超冷原子系统模拟带电粒子在电磁场中的运动提供了平台, 而且也探索物质场与规范场相互作用所导致的新奇量子现象提供了新机遇.

对于高自旋超冷原子气体 (自旋 $F \geq 1$), 除了自旋矢量以外, 体系还存在自旋张量, 可以用来刻画量子态的向列性和自旋涨落对称性^[9]. 近年来,

通过光与原子相互作用, 人们发现在高自旋超冷原子气体中还可以实现自旋张量-动量耦合^[10,11]和自旋张量-轨道角动量耦合^[12], 它们是一类新的自旋-轨道耦合效应, 其产生的特殊单粒子能带结构使得体系展现出丰富的新奇多体量子态及量子相变, 如自旋 1 玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 中占据两个不同能带的条纹态^[11]和自旋-向列涡旋态^[12]、费米原子气体中不同类型的三重简并点^[13,14].

到目前为止, 关于自旋张量-动量耦合 BEC 的研究工作大多聚焦在探索体系可能展现的新奇量子态, 仅有部分研究工作分析了自旋张量-动量耦合对吸引原子相互作用 BEC 中亮孤子态动力学性质的影响^[15,16]. 本文将结合解析计算和数值模拟, 探索一维谐振子势阱中自旋张量-动量耦合 BEC 中平面波态的动力学性质. 利用高斯函数作为变分计算的试探波函数, 首先导出了平面波态的

* 国家自然科学基金 (批准号: 12175027, 11875010, 12005125, 12075163) 和重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2019jcyj-msxmX0217, cstc2021jcyj-msxmX0168) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wlqx@cqnu.edu.cn

质心坐标、动量、波包宽度、啁啾、相对相位等参数随时间演化所满足的运动方程. 通过求解该方程的固定点解及最小化体系的能量泛函, 发现基态为双轴向列态, 其动量随 Raman 耦合强度的增加而单调递减. 然后通过对运动方程进行线性化, 发现基态在微扰下将保持动力学稳定性, 并且展现出 3 种不同的谐振模激发, 激发频率与 Raman 耦合强度、谐振子的纵横比及原子相互作用强度有关. 最后, 通过数值求解运动方程, 发现体系展现出有趣的周期性振荡行为. 变分计算结果与基于 Gross-Pitaevskii (GP) 方程的数值模拟结果相符合.

2 理论模型

设总自旋为 $F = 1$ 、质量为 M 的 ^{87}Rb 原子的 3 个超精细自旋态分别为 $|+1\rangle$, $|0\rangle$ 和 $|-1\rangle$. 利用 3 束波矢为 k_r 、强度为 Ω_r 的 Raman 激光去耦合 3 个自旋态, 其中两束激光沿 z 方向传播, 另外一束激光沿 z 的反方向传播^[10,11]. 在双光子 Raman 过程中, 原子将在态 $|0\rangle$ 和 $|\pm 1\rangle$ 之间转变, 同时发生 $2\hbar k_r$ 动量转移. 在旋转波近似下, 原子和光相互作用的有效单粒子哈密顿量为^[10,11]

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \delta_r & -\frac{\Omega_r}{2} e^{-i2k_r z} & 0 \\ -\frac{\Omega_r}{2} e^{i2k_r z} & \frac{\mathbf{p}^2}{2M} & -\frac{\Omega_r}{2} e^{i2k_r z} \\ 0 & -\frac{\Omega_r}{2} e^{-i2k_r z} & \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \delta_r \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$, $\hat{p}_\alpha = -i\hbar\partial_\alpha$ 代表动量算符 (下标 $\alpha = x, y, z$), δ_r 为双光子失谐. 哈密顿量 (1) 中的非对角元描述原子在态 $|0\rangle$ 和 $|\pm 1\rangle$ 之间的转变及对应的动量转移, 它是产生自旋张量-动量耦

合的来源. 为了消除 (1) 式中非对角元的空间坐标, 并清晰地显示自旋张量-动量耦合效应, 对哈密顿量 (1) 做么正变换 $U = e^{-i2k_r z F_z^2}$, 则

$$\hat{H}'_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \left(\delta_r + 4E_r - \frac{4E_r}{\hbar k_r} \hat{p}_z \right) F_z^2 - \frac{\Omega_r}{\sqrt{2}} F_x, \quad (2)$$

其中 $E_r = \hbar^2 k_r^2 / 2M$ 代表原子和光相互作用的反冲能; F_α 为自旋矩阵^[9], 其具体形式为

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_y &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ F_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

有效哈密顿量 (2) 中的 $\hat{p}_z F_z^2$ 代表原子动量和自旋张量 $N_{zz} = F_z^2$ 的耦合, 称为自旋张量-动量耦合.

在动量空间中, 沿 z 方向的单粒子能量色散关系为

$$E_{\pm} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} + \frac{1}{2} \kappa \pm \frac{1}{2} \sqrt{\kappa^2 + 2\Omega_r^2}, \quad (4a)$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} + \kappa, \quad (4b)$$

其中 $\kappa = \delta_r + 4E_r - \frac{4E_r}{k_r} k_z$, k_z 表示沿 z 方向的动量. 图 1 给出了单粒子能量色散曲线, 当 $\delta_r = 0$ 时, $E_{\pm}$ 所对应的能量色散曲线关于 $k_z = k_r$ 左右对称. 若 $\Omega_r < 2\sqrt{2}E_r$, E_- 在 $k_z/k_r = 1 \pm \sqrt{1 - \Omega_r^2/(8E_r^2)}$ 处具有两个能量相等的极小值, 单粒子基态为二重简并. 如果 $\Omega_r > 2\sqrt{2}E_r$, 则 E_- 仅在 $k_z = k_r$ 处有一个极小值. 对于非零的 δ_r , E_- 不具有左右对称性, 在有限动量处仅包含一个极小值.

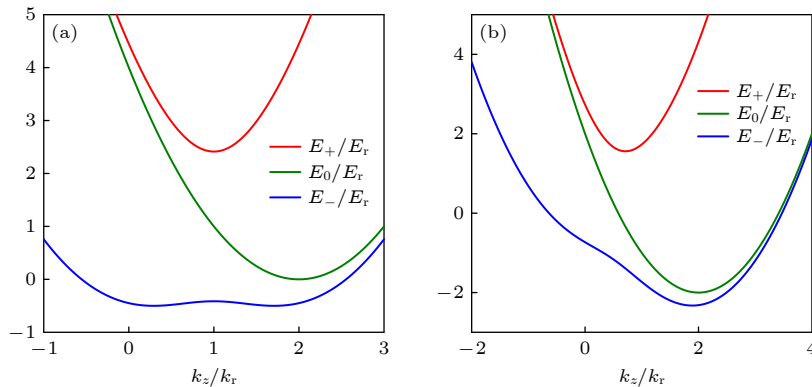


图 1 $\delta_r/E_r = 0$ (a) 和 -2 (b) 时, 单粒子能量色散曲线, 其中 $\Omega_r/E_r = 2$

Fig. 1. Single-particle energy dispersion curves for $\delta_r/E_r = 0$ (a) and -2 (b), respectively, where $\Omega_r/E_r = 2$.

由于 Ω_r , k_r 和 δ_r 在实验中均可调节, 本文仅考虑 $\delta_r = -4E_r$ 的情形. 在这种情况下, 较大的 δ_r 使得原子间的自旋混合碰撞过程 $2|0\rangle \Rightarrow | +1\rangle + | -1\rangle$ 可以忽略^[17-21], 并且 BEC 应为平面波态^[11]. 由于自旋张量-动量耦合沿 z 方向, 因此假设 BEC 在 xy 平面内被频率为 $\omega_\perp$ 的各向同性谐振子势阱紧束缚, 以至于 BEC 在 xy 平面处于谐振子基态. 通过选择 $\omega_\perp$ 和 $\xi_\perp = \sqrt{\hbar/(M\omega_\perp)}$ 分别作为时间和空间长度的单位, 在零温平均场近似下, BEC 沿 z 方向的动力学性质可用如下的一维 GP 方程描述:

$$i\frac{\partial\psi_{+1}}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + ik_R\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\gamma^2 z^2 + (g_n + g_s)\rho - 2g_s\rho_{-1} \right] \psi_{+1} - \frac{1}{2}\Omega\psi_0, \quad (5a)$$

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 z^2 + (g_n + g_s)\rho - g_s\rho_0 \right] \psi_0 - \frac{1}{2}\Omega(\psi_{+1} + \psi_{-1}), \quad (5b)$$

$$i\frac{\partial\psi_{-1}}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + ik_R\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\gamma^2 z^2 + (g_n + g_s)\rho - 2g_s\rho_{+1} \right] \psi_{-1} - \frac{1}{2}\Omega\psi_0, \quad (5c)$$

其中, $\psi_m(z, t)$ 代表描述自旋态 $m = +1, 0, -1$ 动力学性质的凝聚波函数, 满足归一化条件 $\sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m|^2 dz = 1$, $\rho_m = |\psi_m|^2$ 和 $\rho = \sum_m \rho_m$ 分别代表各自旋态的密度和总密度, $\gamma = \omega_z/\omega_\perp \ll 1$ 代表谐振子势阱的纵横比, ω_z 为谐振子势阱沿 z 方向的频率. $k_R = 2k_r\xi_\perp$ 和 $\Omega = \Omega_r/\hbar\omega_\perp$ 分别为无量纲化的自旋张量-动量耦合强度和 Raman 耦合强度. $g_n = 2N(a_0 + 2a_2)/(3\xi_\perp)$ 和 $g_s = 2N(a_2 - a_0)/(3\xi_\perp)$ 分别为原子间的自旋不依赖和自旋依赖相互作用强度, N 为总原子数, a_0 和 a_2 分别为总自旋为 0 和 2 的 s 波散射通道的散射长度^[9].

对于高自旋 BEC ($F \geq 1$), 体系不仅展现出磁性, 而且也具有向列性^[22-24]. 前者可通过自旋矢量 $S_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^\dagger \mathbf{F}_\nu \Psi dz$ 描述, 后者可通过向列张量 $\mathcal{N}_{\nu\nu'} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^\dagger \mathbf{N}_{\nu\nu'} \Psi dz$ 描述, 其中 $\Psi = (\psi_{+1}, \psi_0, \psi_{-1})^T$ (T 代表转置), $\mathbf{N}_{\nu\nu'} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_\nu \mathbf{F}_{\nu'} + \mathbf{F}_{\nu'} \mathbf{F}_\nu)$ 是 $SU(3)$ 对称的自旋向列张量, 下标 $\nu, \nu' = x, y, z$. 设由 $\mathcal{N}_{\nu\nu'}$ 构成的 3×3 向列矩阵 $\mathcal{N}$ 的本征值为 λ_1 , λ_2 和 λ_3 , 它们满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = F(F+1)$, 则可

用这些本征值来区分不同的向列态. 如果 3 个本征值中两个相等, 则称为单轴向列态. 如果 3 个本征值互不相等, 则称为双轴向列态. 除此以外, 向列张量 $\mathcal{N}_{\nu\nu'}$ 也可以用来描述自旋涨落的对称性, 并区分态的轴向对称性^[9]. 因此, 本文也将利用这些量来刻画体系的向列性.

3 变分计算

通过求解 GP 方程 (5a)–(5c), 可研究体系的基态及动力学性质. 然而, 由于 Raman 耦合、自旋张量-动量耦合和谐振子势阱的存在, 很难获得 GP 方程的精确解析解. 因此, 对于弱相互作用体系, 本文利用高斯变分法去解析分析体系的基态及动力学性质^[25].

描述体系动力学性质的拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i}{2} \sum_m \left(\psi_m^* \frac{\partial \psi_m}{\partial t} - \psi_m \frac{\partial \psi_m^*}{\partial t} \right) - \Psi^\dagger \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + ik_R \mathbf{F}_z^2 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \mathbf{F}_x + \frac{1}{2} \gamma^2 z^2 \right) \Psi - \frac{1}{2} (g_n + g_s) \rho^2 + \frac{1}{2} g_s \rho_0^2 + 2g_s \rho_{+1} \rho_{-1} \right] dz. \quad (6)$$

从 GP 方程 (5a)–(5c) 或拉格朗日量 (6) 可以看出, 体系具有交换对称性 $\psi_{+1} \leftrightarrow \psi_{-1}$, 因此可以取如下形式的变分波函数去描述平面波态的动力学性质:

$$\psi_{\pm 1} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2w}} \sin \theta e^{-\frac{1}{2w^2}(z-z_c)^2} e^{i(\phi + kz + cz^2)}, \quad (7a)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{w}} \cos \theta e^{-\frac{1}{2w^2}(z-z_c)^2} e^{i(\phi_0 + kz + cz^2)}, \quad (7b)$$

其中 w 代表波函数的宽度, θ 与振幅有关, ϕ 和 ϕ_0 代表相位, z_c 代表波包的质心, k 为波矢, c 为啁啾, 它们都是时间 t 的函数. 则自旋矢量 $S_{x,y,z}$ 和向列矩阵 $\mathcal{N}$ 分别为

$$S_x = \sin 2\theta \cos \varphi, \quad S_y = S_z = 0, \quad (8a)$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \varphi \\ 0 & \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin \varphi & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (8b)$$

其中 $\varphi = \phi_0 - \phi$ 为相对相位. 自旋矢量 (8a) 表明, 由于交换对称性 $\psi_{+1} \leftrightarrow \psi_{-1}$, BEC 在自旋空间中沿着 x 方向被极化. 向列矩阵 $\mathcal{N}$ 的本征值为

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-S_x^2}$ 和 $\lambda_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-S_x^2}$, 它们表明: 当 $S_x = \pm 1$ 时, 体系处于单轴向列态 ($\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$); 当 $S_x \neq \pm 1$ 时, 体系处于双轴向列态 ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$).

将变分波函数 (7) 代入拉格朗日量 (6) 中, 并对坐标 z 积分后可得

$$\mathcal{L} = -\cos^2 \theta \frac{d\phi_0}{dt} - \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dt} - z_c \frac{dk}{dt} - \left(z_c^2 + \frac{1}{2} w^2 \right) \frac{dc}{dt} - E, \quad (9)$$

其中 E 为体系的总能量

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} k^2 - (2cz_c + k) k_R \sin^2 \theta + c^2 (w^2 + 2z_c^2) \\ & + 2ckz_c + \frac{1}{4} \gamma^2 (w^2 + 2z_c^2) \\ & + \frac{1}{4w^2} - \frac{\Omega}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \cos \varphi \\ & + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi w} (2g_n + g_s \sin^2 2\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

进一步利用欧拉-拉格朗日方程 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} \right) = 0$ (ζ 代表变分参数, $\dot{\zeta} = d\zeta/dt$), 可导出变分参数满足的运动方程:

$$\frac{dk}{dt} = 2c (k_R \sin^2 \theta - k) - z_c \left(\frac{1}{w^4} + \frac{2g_n + g_s \sin^2 2\theta}{2\sqrt{2}\pi w^3} \right), \quad (11a)$$

$$(dz_c/dt) = k - k_R \sin^2 \theta + 2cz_c, \quad (11b)$$

$$(dw/dt) = 2cw, \quad (11c)$$

$$\frac{dc}{dt} = -2c^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w^4} + \frac{2g_n + g_s \sin^2 2\theta}{2\sqrt{2}\pi w^3} \right), \quad (11d)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -k_R (2cz_c + k) - \sqrt{2}\Omega \cot 2\theta \cos \varphi + \frac{g_s}{\sqrt{2}\pi w} \cos 2\theta, \quad (11e)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Omega}{\sqrt{2}} \sin \varphi. \quad (11f)$$

由于 $\mathcal{N}_{zz} = \sin^2 \theta$, 方程 (11a), (11b) 表明, BEC

的质心坐标、动量和自旋张量被耦合在一起, 它是自旋张量-动量耦合效应的体现. 方程 (11c), (11d) 说明 BEC 宽度的变化将导致相位上出现啁啾^[25], 而方程 (11e), (11f) 说明 Raman 耦合导致 BEC 相对相位和振幅发生耦合. 因此, 这些参数之间的非线性耦合或将导致 BEC 展现出有趣的动力学行为.

4 动力学性质

首先研究基态性质. 为了以示区分, 用“*”作为下标去标记基态变分参数. 利用能量 (10) 对变分参数求极值, 可得

$$z_{c,*} = 0, \quad \varphi_* = 0, \quad c_* = 0, \quad (12a)$$

$$k_* = k_R \sin^2 \theta_*, \quad (12b)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{w_*^4} + \frac{2g_n + g_s \sin^2 2\theta_*}{2\sqrt{2}\pi w_*^3}, \quad (12c)$$

$$0 = -k_R k_* - \sqrt{2}\Omega \cot 2\theta_* + \frac{g_s}{\sqrt{2}\pi w_*} \cos 2\theta_*. \quad (12d)$$

方程 (12) 的解实际上也是运动方程 (11) 的固定点解. 图 2(a) 给出了 k_* 和 θ_* 的值, 它们随 Ω/k_R^2 增加而单调递减. 图 2(b) 表明, 对于非零的 Ω , 向列矩阵 $\mathcal{N}$ 的 3 个本征值并不相同, 说明平面波基态为双轴向列态. 图 2(c) 和图 2(d) 给出了基态波函数的实部和虚部随空间坐标的变化, 表明基态波函数的实部和虚部具有相反的宇称, 前者为偶宇称, 后者为奇宇称. 另外数值求解了虚时演化 GP 方程^[26], 获得了基态的数值解, 证实了变分法的计算结果, 如图 2 所示.

通过线性稳定性分析, 接下来研究平面波基态在外界扰动下的动力学稳定性及低能激发性质. 设微扰作用下, 变分参数为 $\zeta(t) = \zeta_* + \delta\zeta e^{i\omega t}$, 其中 $\delta\zeta$ 代表变分参数相对于其基态解 ζ_* 的偏离, ω 为激发频率. 将其代入运动方程 (11) 中, 并保留至 $\delta\zeta$ 的一阶项, 可得激发频率 ω 满足的特征值方程

$$i\omega \begin{pmatrix} \delta k \\ \delta z_c \\ \delta w \\ \delta c \\ \delta \varphi \\ \delta \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2w_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ -k_R & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & \varepsilon_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta k \\ \delta z_c \\ \delta w \\ \delta c \\ \delta \varphi \\ \delta \theta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

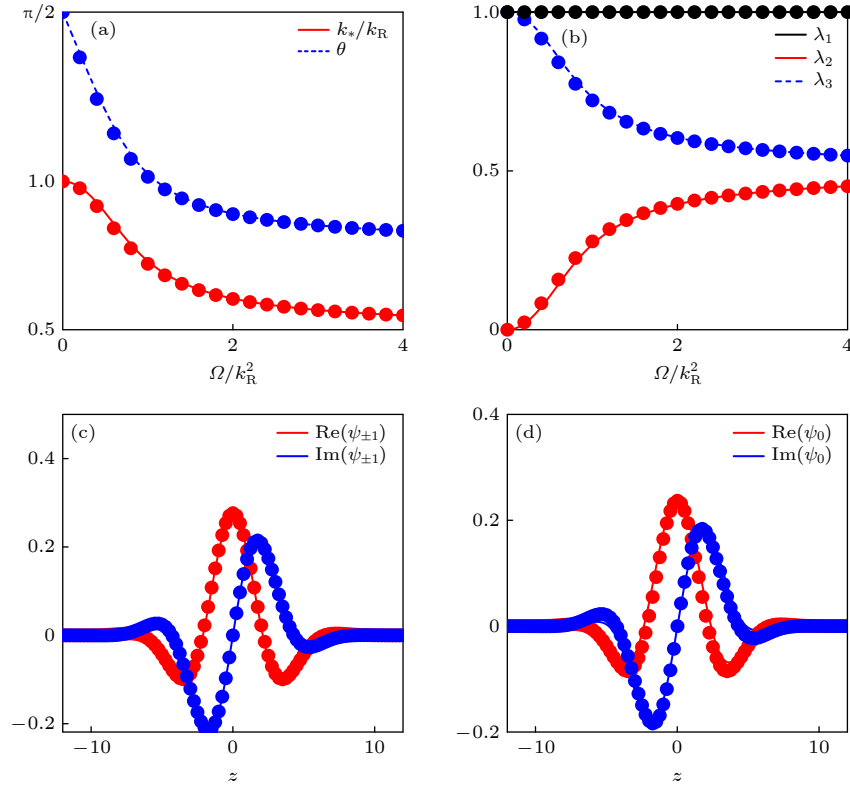


图 2 (a), (b) 参数 θ_* , k_* 及行列矩阵 $\mathcal{N}$ 的本征值 λ_1 , λ_2 和 λ_3 随 Ω/k_R^2 的变化, 其他参数的取值为 $g_n/k_R = 1$, $g_s/k_R = 0.1$ 和 $\gamma/k_R^2 = 0.2$; (c), (d) 基态波函数的实部和虚部随空间坐标的变化, 其他参数的取值为 $g_n = 1$, $g_s = 0.1$, $\gamma = 0.2$, $\Omega = k_R = 1$; 图中的线代表 GP 方程的数值解, 圆圈代表变分计算结果

Fig. 2. (a), (b) θ_* , k_* , λ_1 , λ_2 and λ_3 as a function of Ω/k_R^2 , where the other parameters are $g_n/k_R = 1$, $g_s/k_R = 0.1$ and $\gamma/k_R^2 = 0.2$; (c), (d) the real and imaginary parts of the wave functions in ground state for $g_n = 1$, $g_s = 0.1$, $\gamma = 0.2$ and $\Omega = k_R = 1$. The lines and circles are the results given by GP simulation and the variational method, respectively.

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -k_R \sin 2\theta_*, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2w_*^5} - \frac{3\gamma^2}{2w_*}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{g_s \sin 4\theta_*}{2\sqrt{2\pi}w_*^3}, \quad \varepsilon_4 = -\frac{g_s \cos 2\theta_*}{\sqrt{2\pi}w_*^2}, \\ \varepsilon_5 &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}\Omega}{\sin^2 2\theta_*} - \frac{g_s \sin 2\theta_*}{\sqrt{2\pi}w_*} \right). \end{aligned}$$

通过对角化方程 (13), 可获得激发频率 ω . 图 3 给出了 ω 随 Ω/k_R^2 的变化. 由于体系具有粒子-空穴对称性, 6 个不同的激发频率总是正、负成对出现, 因此分别标记为 $\omega_{1,\pm}$, $\omega_{2,\pm}$ 和 $\omega_{3,\pm}$. 图 3 显示所有激发频率都是实数, 表明各变分参数并不会随时间指数增长或衰减, 说明 BEC 在微扰下是动力学稳定的. 对于较弱的 g_s 和 γ , 激发频率可近似为

$$\begin{aligned} \omega_{1,\pm} &\approx \pm \frac{\sqrt{2}\Omega}{\sin 2\theta_*}, \quad \omega_{2,\pm} \approx \pm \gamma, \\ \omega_{3,\pm} &\approx \pm \frac{1}{w_*^2} \sqrt{4 + \frac{3g_n w_*}{\sqrt{2\pi}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

正如图 3 所示, $|\omega_{1,\pm}|$ 随 Ω/k_R^2 单调递增, 但 $\omega_{2,\pm}$ 和

$\omega_{3,\pm}$ 保持不变, 前者主要由 γ 决定, 而后者与 g_n 有关. 因此, 在微扰下 BEC 将展现出 3 种不同的谐振模激发.

最后分析自旋张量-动量耦合 BEC 随时间演化的动力学性质. 假设 $t = 0$ 时刻, BEC 的初始动量

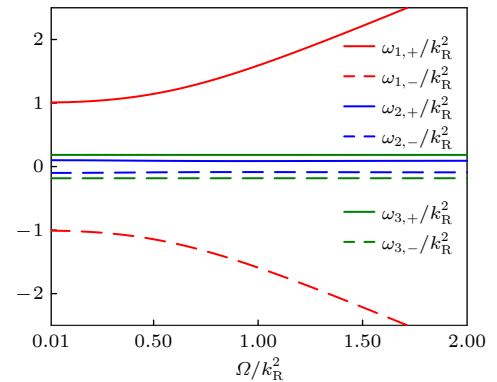


图 3 激发频率 ω 随 Ω/k_R^2 的变化, 其中 $g_n/k_R = 1$, $g_s/k_R = 0.1$ 及 $\gamma/k_R^2 = 0.1$

Fig. 3. Excitation frequency as the function of Ω/k_R^2 , where $g_n/k_R = 1$, $g_s/k_R = 0.1$ and $\gamma/k_R^2 = 0.1$.

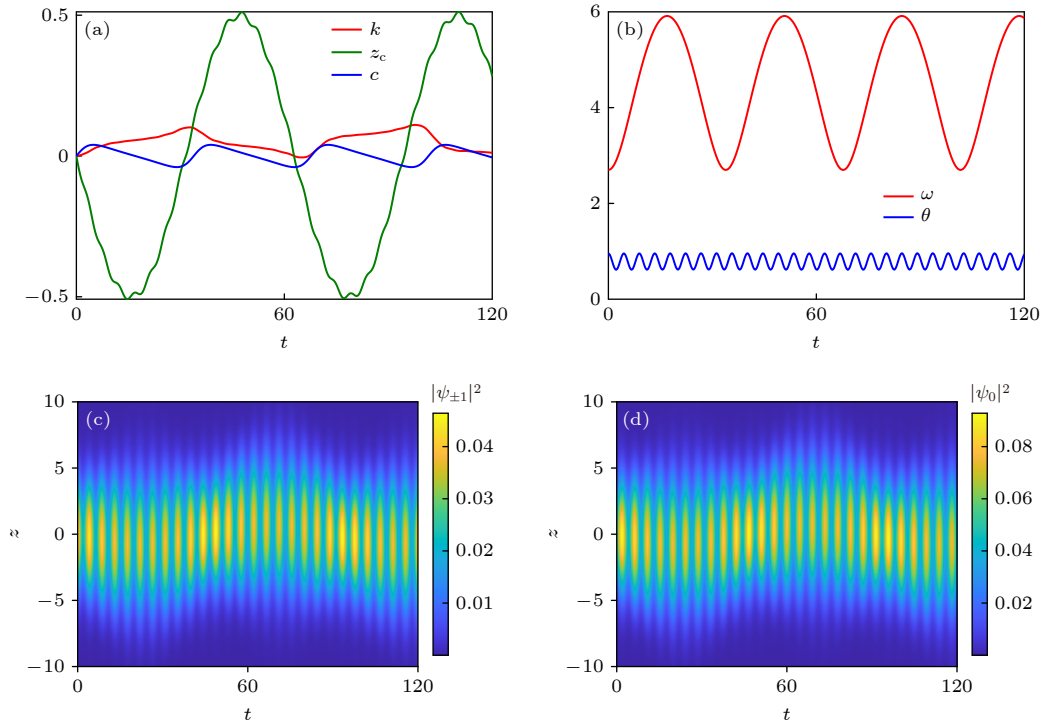


图 4 (a), (b) 变分参数随时间的演化; (c), (d) 各分量的密度随时间的演化 (GP 方程的数值解), 其中系统参数为 $\Omega = 1$, $k_R = \gamma = 0.1$, $g_n = 1$ 和 $g_s = 0.1$

Fig. 4. (a), (b) Evolutions of the variational parameters; (c), (d) evolutions of the densities of each components given by the GP simulation, where the parameters are $\Omega = 1$, $k_R = \gamma = 0.1$, $g_n = 1$ and $g_s = 0.1$.

为 0, 3 个自旋态的粒子数相等 (即 $\theta = \arccos(\sqrt{3}/3)$), 且相位、啁啾和质心均为 0. 通过求解方程 (11), 图 4(a) 和图 4(b) 给出了变分参数随时间演化的性质. 可以观察到, BEC 的动量不守恒, 其大小随时间周期性变化. 同时, 在 Raman 耦合的作用下, θ 也随时间周期性变化, 即不同自旋态之间展现出类似于 Josephson 或 Rabi 振荡行为^[27-29], 振荡周期与 Raman 耦合强度 Ω 有关. 而在谐振子势阱中, BEC 的波包宽度 w 的周期性变化也导致啁啾 c 随时间周期性振荡. 特别地, 从方程 (11b) 可以看出, BEC 的质心坐标 z_c 与 k , θ 及 c 发生耦合, 后者的周期性变化导致 BEC 的质心坐标也随时间作周期性振荡. 此外, 以变分波函数 (7) 作为初始条件, 本文也利用时间劈裂傅里叶谱方法数值求解了 GP 方程 (5)^[30], 图 4(c) 和图 4(d) 给出了各个自旋态的密度随时间的演化, 证实了变分计算结果.

5 结 论

本文研究了一维谐振子势阱中自旋张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚中平面波态的动力学性质. 通过选择高斯函数作为变分试探波函数, 导出了变

分参数随时间演化所满足的欧拉-拉格朗日方程. 利用能量对变分参数求极小值, 获得了体系的基态解, 发现基态具有非零动量, 且基态属于双轴向列态. 进一步, 基于线性稳定性分析, 发现基态在外界扰动下能保持动力学稳定性, 并展现出 3 种不同的谐振模激发, 激发频率与 Raman 耦合强度、原子相互作用强度和谐振子势阱的纵横比有关. 最终, 通过求解含时欧拉-拉格朗日方程, 发现动量、质心坐标和波包宽度均随时间周期性变化, 体系展现出有趣的动力学行为. GP 方程的数值模拟验证了变分计算结果.

参考文献

- [1] Qi X L, Zhang S C 2010 *Phys. Today* **63** 33
- [2] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [3] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [4] Wang P, Yu Z Q, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [5] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [6] Chen H R, Lin K Y, Chen P K, Chiu N C, Wang J B, Chen C A, Huang P P, Yip S K, Kawaguchi Y, Lin Y J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 113204

- [7] Chen P K, Liu L R, Tsai M J, Chiu N C, Kawaguchi Y, Yip S K, Chang M S, Lin Y J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250401
- [8] Zhang D, Gao T, Zou P, Kong L, Li R, Shen X, Chen X L, Peng S G, Zhan M, Pu H, Jiang K 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 110402
- [9] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253
- [10] Li D, Huang L, Peng P, Bian G, Wang P, Meng Z, Chen L, Zhang J 2020 *Phys. Rev. A* **102** 013309
- [11] Luo X W, Sun K, Zhang C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 193001
- [12] Chen L, Zhang Y, Pu H 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 195303
- [13] Hu H, Hou J, Zhang F, Zhang C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 240401
- [14] Lei Z, Deng Y, Lee C 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 033008
- [15] Sun J, Chen Y, Chen X, Zhang Y 2020 *Phys. Rev. A* **101** 053621
- [16] Liu Y, Liu Y K 2021 *Mod. Phys. Lett. B* **35** 2150232
- [17] Campbell D L, Price R M, Putra A, Valdes-Curiel A, Trypogeorgos D, Spielman I B 2016 *Nat. Commun.* **7** 10897
- [18] Xue M, Li X, Ye W, Chen J J, Xu Z F, You L 2022 *Phys. Rev. A* **106** 033708
- [19] Masson S J, Barrett M D, Parkins S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 213601
- [20] Davis E J, Bentsen G, Homeier L, Li T, Schleier-Smith M H 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 010405
- [21] Periwal A, Cooper E S, Kunkel P, Wienand J F, Davis E J, Schleier-Smith M 2021 *Nature* **600** 630
- [22] Diener R B, Ho T L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190405
- [23] Mueller E J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 033606
- [24] Natu S S, Li X, Cole W S 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023608
- [25] Malomed B A 2006 *Soliton Management in Periodic Systems* (Vol. 1) (Berlin: Springer) pp27–29
- [26] Liu W, Cai Y 2021 *SIAM J. Sci. Comput.* **43** B219
- [27] Williams J, Walser R, Cooper J, Cornell E, Holland M 2000 *Phys. Rev. A* **61** 033612
- [28] Öhberg P, Stenholm S 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3890
- [29] Lee C, Shi L, Gao K 2004 *Phys. Rev. A* **69** 033611
- [30] Bao W, Cai Y 2018 *Commun. Comput. Phys.* **24** 899

SPECIAL TOPIC—Nonlinear system theory and its frontier applications

Dynamics of spin-tensor-momentum coupled Bose-Einstein condensates^{*}

Qiu Xu¹⁾ Wang Lin-Xue²⁾ Chen Guang-Ping³⁾ Hu Ai-Yuan¹⁾ Wen Lin^{1)†}

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*)

2) (*Department of Physics, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China*)

3) (*Intelligent Manufacturing Industry Technology Research Institute, Sichuan University of Art and Science, Dazhou 635000, China*)

(Received 1 July 2023; revised manuscript received 16 August 2023)

Abstract

We investigate the dynamics of the plane wave state in one-dimensional spin-tensor-momentum coupled Bose-Einstein condensate. By using the Gaussian variational approximation, we first derive the equations of motion for the variational parameters, including the center-of-mass coordinate, momentum, amplitude, width, chirp, and relative phase. These variational parameters are coupled together nonlinearly by the spin-tensor-momentum coupling, Raman coupling, and the spin-dependent atomic interaction. By minimizing the energy with respect to the variational parameters, we find that the ground state is a biaxial nematic state, the momentum of the ground state decreases monotonically with the increase of the strength of the Raman coupling, and the parity of real part of the ground-state wave function is opposite to that of the imaginary part. The linear stability analysis shows that the ground state is dynamically stable under a perturbation, and exhibits three different oscillation excitation modes, the frequencies of which are related to the strength of the Raman coupling, the aspect ratio of the harmonic trap, and the strength of the atomic interaction. By solving the equations of motion for the variational parameters, we find that the system displays periodical oscillation in the dynamical evolution. These variational results are also confirmed by the direct numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equations, and these findings reveal the unique properties given by the spin-tensor-momentum coupling.

Keywords: spin-tensor-momentum coupling, Bose-Einstein condensate, Gross-Pitaevskii equation

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 03.75.Mn, 71.70.Ej

DOI: [10.7498/aps.72.20231076](https://doi.org/10.7498/aps.72.20231076)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12175027, 11875010, 12005125, 12075163) and the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant Nos. cstc2019jcyj-msxmX0217, cstc2021jcyjmsxmX0168).

[†] Corresponding author. E-mail: wlqx@cqu.edu.cn

自旋张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚的动力学性质

邱旭 王林雪 陈光平 胡爱元 文林

Dynamics of spin-tensor-momentum coupled Bose-Einstein condensates

Qiu Xu Wang Lin-Xue Chen Guang-Ping Hu Ai-Yuan Wen Lin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 180304 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231076

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231076>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2022, 71(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191424>

环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

光晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性能谱特性

Nonlinear energy band structure of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in optical lattice

物理学报. 2021, 70(20): 200302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210705>