

一维超导微波腔晶格中反旋波效应对 拓扑相变和拓扑量子态的调制*

郑智勇 陈立杰 向吕 王鹤 王一平†

(西北农林科技大学理学院, 杨凌 712100)

(2023年8月13日收到; 2023年9月3日收到修改稿)

提出了基于超导微波腔的一维晶格理论方案, 其中包含两种不同的微波腔晶胞, 通过磁通量子比特调控晶胞之间的耦合, 使反旋波项与拓扑超导体中的 p-波超导配对项相映射, 实现具有 p-波超导配对项的一维超导微波腔晶格系统, 进而模拟和研究其中的拓扑绝缘体特性. 结果发现, p-波超导配对项可以对系统的拓扑量子态进行调制, 可以实现四个边缘态的拓扑量子信息传输通道. 此外, 当 p-波超导配对项和次近邻作用调制时, 可以发现能带发生波动现象, 从而诱导产生新的能带, 但边缘态的简并性保持稳定, 这可以实现多个拓扑量子态传输路径; 然而, 当调控超过阈值时, 系统的能隙将闭合, 使边缘态湮灭在新的能带中. 另外, 当考虑系统存在缺陷时, 可以发现缺陷强度较小时, 边缘态产生微小的波动, 但可以清晰地区分, 说明其具有鲁棒性; 当缺陷强度超过阈值时, 边缘态和能带将导致无规则波动, 使边缘态融入能带中. 本文的研究结果具有重要的理论价值和实际意义, 未来可以应用在量子光学和量子信息处理中.

关键词: 量子光学, 超导量子电路, 拓扑绝缘体, 量子态**PACS:** 42.50.-p, 85.60.-q, 03.65.Vf, 42.50.Dv**DOI:** 10.7498/aps.72.20231321

1 引言

近年来, 拓扑绝缘体结构基于其独特的优势(如物理性质和化学性质), 已经在不同领域展现出极其的重要性, 更为凝聚态物理的研究开辟了一个崭新的平台^[1-3]. 不同于普通绝缘体, 拓扑绝缘体是一种全新的物质形式, 其内部可以展现绝缘体性质, 但在边界处可以呈现出金属特性^[4,5]; 在能带间隙中存在边缘态, 不仅受到能隙的保护, 而且受到时间反演对称性的制约; 系统中无序和缺陷以及操纵带来的扰动, 边缘态对它们都具有鲁棒性^[6-9]. 目前, 在原子、分子、光学物理和材料物理与化学等领域, 研究人员正在构建新的拓扑结构, 同时也提

出了许多新理论模型和实验方案, 用于模拟和探索拓扑绝缘体特性, 从而更深入研究其中的拓扑物态和量子物质, 这已经成为一个研究热点问题^[10-12].

随着微纳器件制备工艺的成熟, 进一步促进了微纳量子器件的发展, 并开启了一个崭新的研究领域——微纳光子学, 其主要研究在微纳尺度下光与物质相互作用的规律, 以及光的产生、传输、调控、探测和传感等^[13-16]. 例如, 光学微腔系统可以将光束束缚在微小的区域范围内, 可以极大地增强光与物质的相互作用, 并且通过制备高品质因子的光学微腔, 可提高系统在传感和探测方面的灵敏度^[17-22]. 特别地, 超导微波器件能够有效提高光子集成度, 进而集成在芯片上应用于量子光学、量子信息处理和量子模拟等领域, 这已经成为最具吸引力的平台

* 国家自然科学基金(批准号: 12004312)、西北农林科技大学本科生创新计划(批准号: X202310712503)和中央高校基本科研业务费(批准号: 2452022027, 2452022169)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ypwang2019@nwfafu.edu.cn

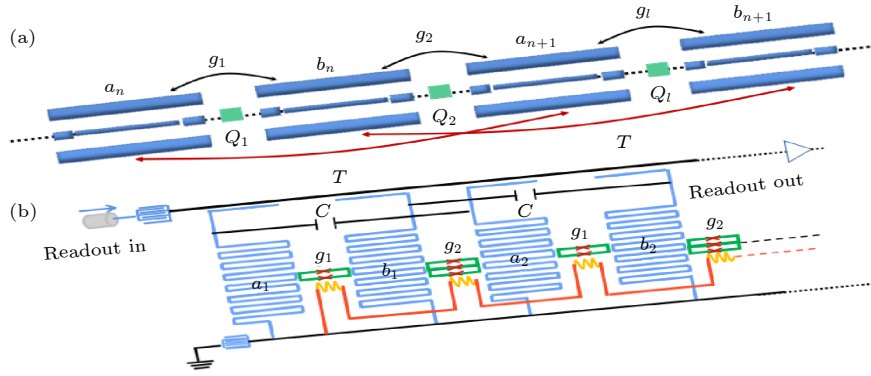


图 1 (a) 基于超导微波腔组成的一维晶格系统, Q_1 (Q_2) 是晶胞之间的耦合磁通量子比特, g_1 (g_2) 表示 a_n (b_n) 和 b_n (a_{n+1}) 的耦合参数, T 表示 a_n 和 a_{n+1} (b_n 和 b_{n+1}) 的耦合参数; (b) a_n 和 b_n 耦合在一个频率可调的控制场上, g_1 (g_2) 可以通过磁通量子比特外部磁通调控, T 通过电容 C 耦合调制

Fig. 1. (a) Schematic of the 1D superconducting microwave cavity lattice system, Q_1 (Q_2) is the coupling flux qubit between the unit cell, a_n and b_n (b_n and a_{n+1}) coupling coefficient is g_1 (g_2), a_n and a_{n+1} (b_n and b_{n+1}) coupling coefficient is T ; (b) a_n and b_n are connected in a tunable frequency field, g_1 (g_2) can be modulated by the external flux of qubits, T is modulated by the capacitance C coupling.

之一 [23–29]. 另外, 微纳米量子器件在模拟拓扑绝缘体方面已经取得了巨大的突破, 如超导微波腔、RLC 电路、纳米机械振子、超导量子比特和 NV 自旋, 相互耦合构建一维或二维晶格系统, 并通过微波相干调控, 以展示许多新奇的拓扑物理现象, 如拓扑相变和边缘态、非厄米拓扑绝缘体、拓扑不变量等, 来实现一些特殊功能的量子器件 [30–36]. 例如, Koch 等 [37] 和 Mei 等 [38] 分别利用超导微波腔构建一维晶格系统实现了拓扑 Chern 绝缘体, 后者对系统的拓扑边缘模和不变量进行了探测; 此外, Cai 等 [39] 和 Cao 等 [40] 利用超导电路系统构建二维晶格系统, 分别研究磁子绝缘态和能带结构与异常环. 因此, 基于之前的研究工作 [33–40], 本文利用超导微波腔系统构建一维的拓扑系统, 考虑系统的反旋波项的效应, 分析、研究和调控其中的拓扑绝缘体性质.

本文构建了基于超导微波腔的一维拓扑晶格系统, 其中包含两种微波腔晶胞元素, 通过磁通量子比特耦合晶胞元素, 来分析和研究其中的拓扑绝缘体特性. 这里保留晶格之间相互作用的反旋波项, 使拓扑超导体中的 p-波超导配对项与其相映射, 得到具有 p-波超导配对项的一维超导微波腔晶格方案. 研究发现, p-波超导配对项可以调制系

统中拓扑量子态, 可以实现多通道的拓扑量子信息传输. 此外, 当考虑 p-波超导配对项和次近邻相互作用时, 发现能带的波动可以诱导系统产生新的能带, 边缘态发生弯曲, 但其简并性保持稳定, 通过调制可以实现拓扑量子态不同的传输路径; 然而, 当调制超过阈值时, 系统的能隙将会闭合, 使边缘态湮灭在新的能带中. 另外, 考虑系统存在随机的缺陷时, 发现能带呈现无规则的波动, 边缘态有微小的扰动; 当缺陷强度超过阈值时, 能带导致强烈的无规则波动, 使边缘态融入能带中.

2 系统模型及哈密顿量

如图 1(a) 所示的一维超导微波腔晶格系统, 其中包含 a_n 和 b_n 两种微波腔晶胞元素, 并且通过两种不同类型的量子比特互相交叉耦合. 此外, 如图 1(b) 所示, a_n 和 b_n 微波腔晶胞耦合在一个频率可调的控制场上, 其频率在 $\omega_{an} = \omega_a + \lambda_n \cos(vt + \phi)$ 和 $\omega_{bn} = \omega_b + \gamma_n \cos(vt + \phi)$ 的范围内调制, ω_a 和 ω_b 是微波腔晶胞的固有频率, λ_n (γ_n) 是微波腔晶胞的频率调制强度, v 描述微波腔晶胞的调制频率, ϕ 是相位因子. 因此, 该一维晶格电路系统的哈密顿量可以写成

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \sum_n^N \{\omega_{an} a_n^\dagger a_n + \omega_{bn} b_n^\dagger b_n\} + \sum_n^{N-1} \{[g_1(a_n^\dagger + a_n) + g_2(a_{n+1}^\dagger + a_{n+1})](b_n^\dagger + b_n)\} \\
 & + \sum_n^{N-1} \{T(a_{n+1}^\dagger a_n + b_{n+1}^\dagger b_n) + \text{H.c.}\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, $a_n^\dagger(a_n)$ 和 $b_n^\dagger(b_n)$ 分别是第 n 个晶格的产生(湮灭)算符, g_1 表示 a_n 和 b_n 微波腔晶胞间的耦合, g_2 表示 b_n 和 a_{n+1} 微波腔晶胞间的耦合, T 表示次邻近微波腔晶胞耦合强度. 把哈密顿量 H_0 变换到相互作用绘景中, 可以描述为

$$H_1 = \sum_n^N \{g_1 a_n^\dagger b_n^\dagger e^{i\omega_1+} + g_1 a_n^\dagger b_n e^{i\omega_1-}\} + \sum_n^{N-1} \{g_2 a_{n+1}^\dagger b_n^\dagger e^{i\omega_2+} + g_2 a_{n+1}^\dagger b_n e^{i\omega_2-}\} + \text{H.c.}, \quad (2)$$

其中, $\omega_{1\pm} = (\omega_a \pm \omega_b)t + (\lambda_n \pm \gamma_n) \sin(\omega t + \phi)$, $\omega_{2\pm} = (\omega_a \pm \omega_b)t + (\lambda_{n+1} \pm \gamma_n) \sin(\omega t + \phi)$, 第 1 项和第 3 项为最近邻微波腔晶胞间耦合的反旋波项, 第 2 项和第 4 项为微波腔晶胞间最近邻耦合. 这里, 先不考虑次近邻作用, 即 $T = 0$, 研究系统中的反旋波项在晶格电路系统中的作用. 利用 $\exp[iK \sin(\omega t)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(K) \exp[im\omega t]$ ($J_m(K)$ 为关于贝塞尔函数的 m 次序), 使相位 $\phi = 0$, 对哈密顿量 H_1 展开, (2) 式可以写成:

$$H_2 = \sum_n^N \left\{ \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} G_{11} a_n^\dagger b_n^\dagger e^{i(\omega_a+\omega_b)t+im_1\omega t} + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} G_{12} a_n^\dagger b_n e^{i(\omega_a-\omega_b)t+im_2\omega t} + g_1 a_n^\dagger b_n \right\} \\ + \sum_n^{N-1} \left\{ \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} G_{23} a_{n+1}^\dagger b_n^\dagger e^{i(\omega_a+\omega_b)t+im_3\omega t} + \sum_{m_4=-\infty}^{\infty} G_{24} a_{n+1}^\dagger b_n e^{i(\omega_a-\omega_b)t+im_4\omega t} + g_2 a_{n+1}^\dagger b_n \right\} + \text{H.c.}, \quad (3)$$

其中, $G_{11} = g_1 J_{m_1}(K_{1,n})$, $G_{12} = g_1 J_{m_2}(K_{2,n})$, $G_{23} = g_2 J_{m_3}(K_{3,n})$, $G_{24} = g_2 J_{m_4}(K_{4,n})$, $K_{1,n} = \lambda_n + \gamma_n$, $K_{2,n} = \lambda_n - \gamma_n$, $K_{3,n} = \lambda_{n+1} + \gamma_n$, $K_{4,n} = \lambda_{n+1} - \gamma_n$. 当系统在共振条件下 $\omega_a = \omega_b = \omega$, $\lambda_{n+1} = \gamma_n = \lambda_n$, 取 $m_1 = m_3 = -2$, $m_2 = m_4 = 0$ 时, $m_1(m_2, m_3, m_4)$ 求和项和 (3) 式中的 e 指数项可以忽略, 哈密顿量 H_2 描述为

$$H_3 = \sum_n^N \{\tilde{G}_{11} a_n^\dagger b_n^\dagger + \tilde{G}_{12} a_n^\dagger b_n\} + \sum_n^{N-1} \{\tilde{G}_{23} a_{n+1}^\dagger b_n^\dagger + \tilde{G}_{24} a_{n+1}^\dagger b_n\} + \text{H.c.}, \quad (4)$$

其中 $\tilde{G}_{11} = g_1 J_{-2}(K_{1,n})$, $\tilde{G}_{12} = g_1$, $\tilde{G}_{23} = g_2 J_{-2}(K_{3,n})$, $\tilde{G}_{24} = g_2$, 在哈密顿量 H_3 中存在反旋波项 ($a_n^\dagger b_n^\dagger$, $a_{n+1}^\dagger b_n^\dagger$), 可以和拓扑超导体中 p-波超导配对项存在关联^[41,42], 那么哈密顿量 H_2 可以被映射成一个带有 p-波超导配对项的一维拓扑晶格电路系统. 此外, 从方程 (4) 可看到, 系统中反旋波项的晶胞间耦合强度 G_{11} 和 G_{23} 可以由 p-波超导配对项的贝塞尔函数优化调控, 这为进一步研究、模拟和调控一维晶格中的拓扑绝缘体特性提供了新的蓝图.

3 结果与讨论

3.1 反旋波项调制

在拓扑绝缘体中, p-波超导配对项的存在能够诱导许多新奇的物理现象. 这里考虑频率调控的方法, 使一维晶格电路的反旋波项与 p-波超导配对项关联, 通过调控反旋波项, 从而得到带有 p-波超导配对项的一维拓扑电路晶格系统, 这为探索丰富的拓扑特性和相变提供一种新思路. 首先, 考虑反旋波项的调制, 即通过贝塞尔函数来调控 p-波超导配对项的强度为零 ($\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0$), 那

么哈密顿量 H_3 可以简化, 从而得到一个标准的一维拓扑紧束缚模型, 对应的哈密顿量为 $H_4 = \sum_n^N \tilde{G}_{12} a_n^\dagger b_n + \sum_n^{N-1} \tilde{G}_{24} a_{n+1}^\dagger b_n + \text{H.c.}$ 因此, 根据上述哈密顿量 H_4 , 可以绘制系统的能谱图, 来研究和分析其中拓扑边缘态的概率分布. 在这里, 定义蓝色和红色边缘态的概率分布, 即 $|\psi_{\text{blue}}|^2$ 和 $|\psi_{\text{red}}|^2$, 相对应的能量本征值为 E_{blue} 和 E_{red} . 图 2 给出了系统的能谱和边缘态与晶格数目的关系. 如图 2(a) 所示, 能谱有 δ_E 的能带间隙, 并且存在两个简并的边缘态. 图 2(b) 和图 2(c) 展示了边缘态 (第 50 (蓝色) 和第 51 (红色)) 的概率分布, 可以清楚地看到边缘态分布在一维拓扑晶格电路系统的两端.

另一方面, 考虑反旋波项的调制, $\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} \neq 0$, 那么根据贝塞尔函数的关系, 对 p-波超导配对项的耦合强度调控, 进一步研究系统中的拓扑绝缘体特性. 图 3 给出了不同反旋波项调制的系统能谱结构图. 从图 3(a)—(d) 可以看出, p-波超导配对项耦合强度, 即晶格间相互作用的反旋波项对能带的宽度 δ_E 具有调制作用. 也就是说, 随着 p-波超导配对

项的增大, 整个系统的能隙随之缩小, 但能带不闭合, 能隙始终存在, 并且存在 4 个简并的边缘态. 然而, 当强度超过一定值时, 如图 3(e) 和图 3(f) 所示, 可以看到能带有新的能隙产生, 但边缘态很稳健, 没有产生混乱和扰动, 这可以使系统进入另一个拓扑相.

此外, 如图 4 所示, 我们分析了系统 4 个简并边缘态的概率分布. 从图 4(a) 和图 4(b) 可以清楚地看到, 当逐渐增加 p-波超导配对项耦合强度时, 红色边缘态的分布发生了翻转过程, 也就是说, 红色边缘态从系统最左边传递到腔的最右边. 与图 4(a) 和图 4(b) 对比, 从图 4(c) 可以看到, 红色

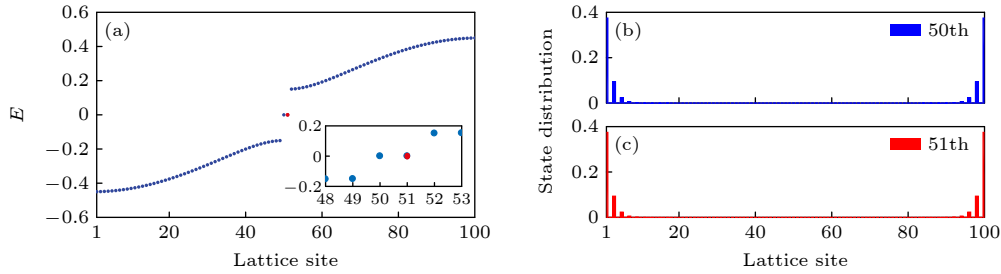


图 2 (a) 系统能谱与晶格数目的关系; (b) 蓝色和 (c) 红色边缘态的概率分布图; 其中 $\tilde{G}_{12} = 0.15$, $\tilde{G}_{24} = 0.3$ 和晶格数 $N = 100$
 Fig. 2. (a) Energy spectrum of the system via the lattice numbers; (b), (c) probability distributions of (b) blue and (c) red edge states. $\tilde{G}_{12} = 0.15$, $\tilde{G}_{24} = 0.3$ and lattice size $N = 100$.

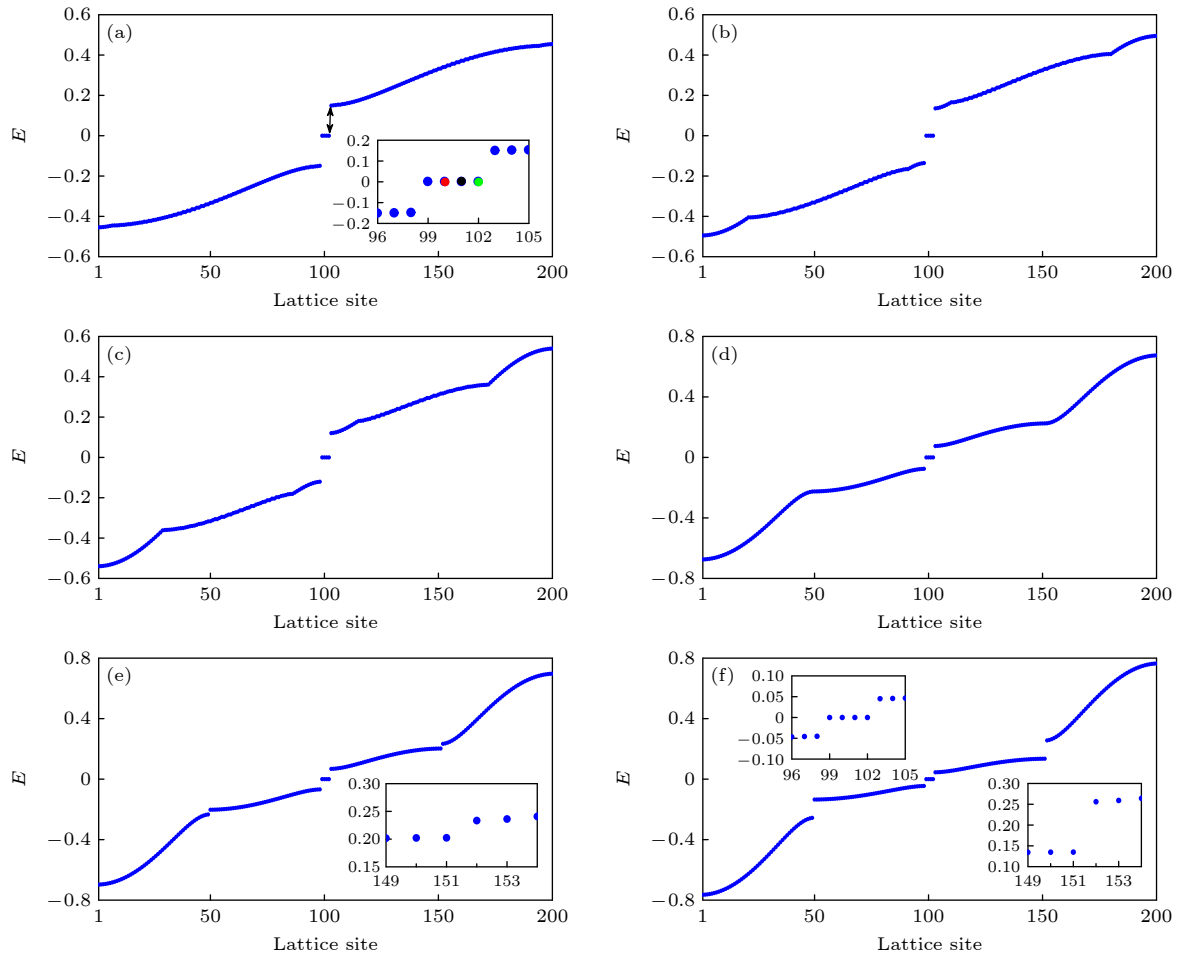


图 3 系统能谱与晶格数目的关系 (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.003$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.03$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.06$; (d) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.15$; (e) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.165$; (f) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 2.1$. 其他参数为 $\tilde{G}_{12} = 0.15$, $\tilde{G}_{24} = 0.3$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 3. Energy spectrum of the system via the lattice numbers: (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.003$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.03$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.06$; (d) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.15$; (e) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.165$; (f) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 2.1$. Other parameters are $\tilde{G}_{12} = 0.15$, $\tilde{G}_{24} = 0.3$ and lattice size $N = 200$.

边缘态分布在系统的两端, 通过调控 p-波超导配对项耦合强度, 可以使边缘态分布在右端 (图 4(d)) 或者左端 (图 4(e)). 另外, 从图 4 中观察到其他 3 个边缘态 (蓝、黑、绿), 在系统中分布的位置各有差异, 那么通过调制 p-波超导配对项耦合强度, 在系统中可以实现多路径的拓扑量子信息传输.

3.2 次近邻相互作用

在一维拓扑晶格电路的结构中, 通过调控晶格之间的相互作用, 可以研究和探索其中许多有趣的拓扑现象. 接下来考虑 p-波超导配对项和次近邻相互作用对系统拓扑性质的影响, 系统的哈密顿量可表示为

$$H_5 = \sum_n^N \left\{ \tilde{G}_{11} a_n^\dagger b_n^\dagger + \tilde{G}_{12} a_n^\dagger b_n \right\} + \sum_n^N \left\{ \tilde{G}_{23} a_{n+1}^\dagger b_n^\dagger + \tilde{G}_{24} a_{n+1}^\dagger b_n \right\} + T_0 (a_{n+1}^\dagger a_n^\dagger + b_{n+1}^\dagger b_n^\dagger) + \text{H.c.}, \quad (5)$$

其中, $T_0 = TJ_0(K_{2,n})$ 用来描述一维拓扑晶格电路系统中次近邻相互作用. 根据 (5) 式中的次临近相互作用和 p-波超导配对项, 进一步研究和分析两者对系统的拓扑性质的影响. 这里考虑其周期调

控, 即参数为 $T_0 = T \cos \theta$ 和 $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08(1 + \cos \theta)$, 通过分析能谱结构的变化特征, 研究系统的拓扑相变和拓扑通道.

图 5(a) 给出了次近邻相互作用 $T = 0$ 时系统能谱与相位的关系, 可以清楚地看到能带中存在 4 个简并的零模边缘态 (蓝色), 它们分别和上下能带存在间隙, 类似于图 3(a). 然而, 当 $T = 0.05$ 时, 系统的上下能带发生波动, 并引起 4 个边缘态起伏, 但简并度没有发生变化, 例如, 在 $\theta \in [0.5\pi, 1.5\pi]$ 位置有 4 个边缘态 (蓝色) 凸起, 在 $\theta \in [0, 0.5\pi]$ 和 $\theta \in [1.5\pi, 2\pi]$ 位置有 4 个边缘态下降. 由上述分析可知, 当 p-波超导配对项调制恒定时, 周期调制次临近相互作用可引起能带和边缘态的周期起伏变化. 如图 5(c) 所示, 当 $T = 0$ 时, 周期调制 p-波超导配对项, 即 $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08(1 + \cos \theta)$, 可以看到系统上下能带变化不同于图 5(b), 4 个简并边缘态 (蓝色) 保持稳定. 从上面的讨论分析可以发现, 它们对系统的拓扑能带结构调制不同, 也就是说, 两者的变化可以导致系统进入不同的拓扑相中.

为了进一步深入探索其中的拓扑特征, 图 6 给出了不同 p-波超导配对项调制系统的能谱图. 从图 6(a) 和图 6(b) 可以发现, p-波超导配对项调制强度不断增加时, 系统的能带间隙将逐渐变小, 并且能带结构发生变化, 使上下能带产生新的

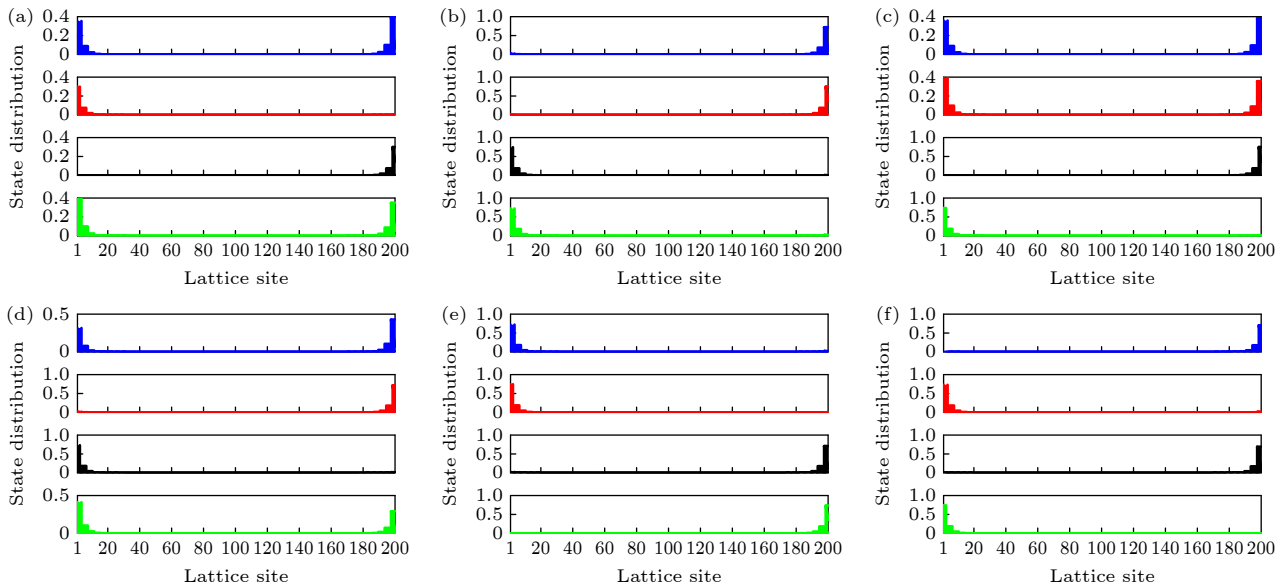


图 4 4 个不同边缘态的概率分布图 (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.003$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.006$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.009$; (d) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.015$; (e) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.021$; (f) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.027$; 其他参数为 $\tilde{G}_{12} = 0.15$, $\tilde{G}_{24} = 0.3$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 4. State distributions of four different edge states: (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.003$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.006$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.009$; (d) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.015$; (e) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.021$; (f) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.027$. Other parameters are $\tilde{G}_{12} = 0.15$, $\tilde{G}_{24} = 0.3$ and lattice size $N = 200$.

能带, 但 4 个边缘态依然保持简并, 并且在一个稳定的状态, 没有发生混乱. 然而, 从图 6(c) 清楚地看到, 当 p-波超导配对项调制强度达到一定值时, 部分边缘态融入到新的能带中, 而另一部分边缘态保留在 $\theta \in [0.25\pi, 0.75\pi]$ 和 $\theta \in [1.25\pi, 1.75\pi]$ 区域的能隙中. 如图 6(d) 所示, 当 p-波超导配对项调制强度超过阈值时, 上下能带产生的新能带使边缘态全部湮灭在其中, 进入另一个拓扑相.

此外, 当 p-波超导配对项的调制恒定时, 通过周期性调控次近邻相互作用, 分析其对系统的拓扑特征的影响. 如图 7(a) 和图 7(b) 所示, 当次近邻相互作用 T 逐渐增加时, 能带和边缘态结构发生

变化, 比如在 $\theta = \pi$ 位置上下能带发生重叠, 部分边缘态湮灭在重叠区域. 然而, 从图 7(c) 和图 7(d) 可以发现, 当 T 增加到一定时, 上下能带将全部重合, 边缘态将融入能带中.

根据前面的讨论, p-波超导配对项和次近邻相互作用的调控, 可以会引起能带的波动, 但 4 个边缘态的简并性一直保持稳定, 并且没有发生混乱和扰动, 那么可以利用边缘态的拓扑特性, 在系统中进行量子信息的传输和储存操作. 图 8 绘制了不同相位 θ 下 4 个边缘态的概率密度分布图, 对其中的拓扑量子通道进行分析和研究. 从图 8(a) 和图 8(b) 可以发现, 当 $\theta = \pi/2$ 时, 对 p-波超导配对项调控的耦合

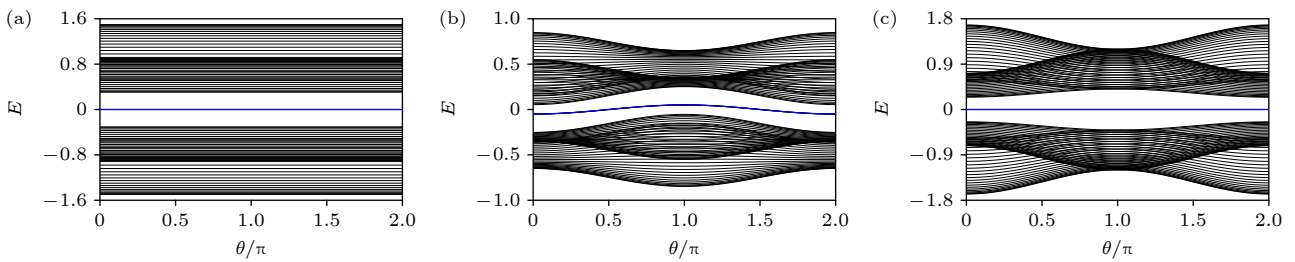


图 5 系统能谱与相位的关系 (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$, $T = 0$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$, $T = 0.05$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08(1 + \cos\theta)$, $T = 0$; 其他参数为 $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 5. Energy spectrum of the system via the phase: (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$, $T = 0$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$, $T = 0.05$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08(1 + \cos\theta)$, $T = 0$. Other parameters are $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$ and lattice size $N = 200$.

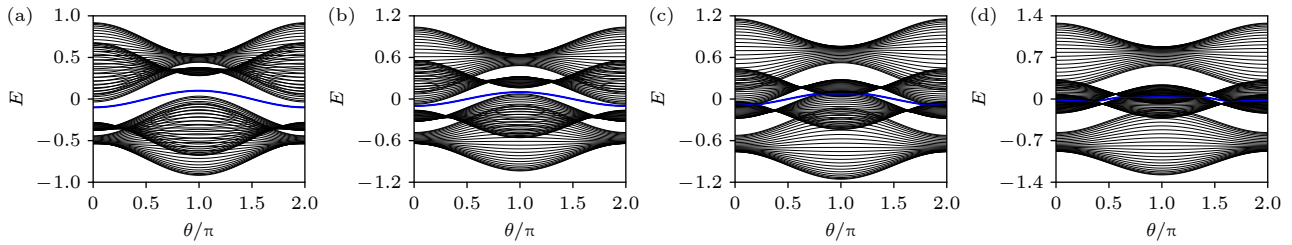


图 6 系统能谱与相位的关系 (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.16$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.24$; (d) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.32$; 其他参数为 $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$, $T = 0.1$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 6. Energy spectrum of the system via the phase: (a) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08$; (b) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.16$; (c) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.24$; (d) $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.32$. Other parameters are $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$, $T = 0.1$ and lattice size $N = 200$.

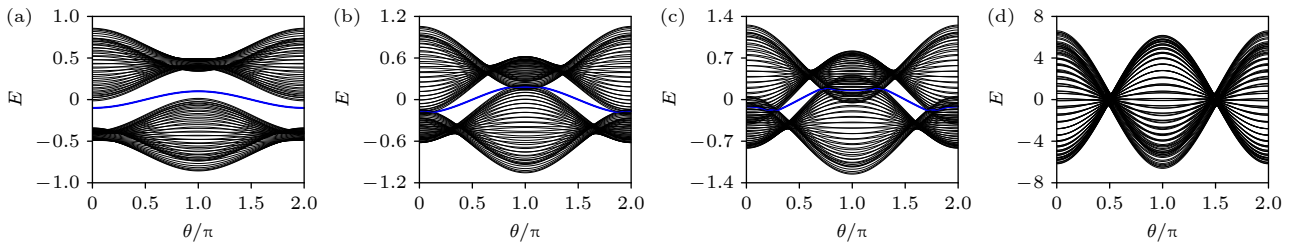


图 7 系统能谱与相位的关系 (a) $T = 0.1$; (b) $T = 0.2$; (c) $T = 0.3$; (d) $T = 3$; 其他参数为 $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.04$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 7. Energy spectrum of the system via the phase: (a) $T = 0.1$; (b) $T = 0.2$; (c) $T = 0.3$; (d) $T = 3$. Other parameters are $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.04$ and lattice size $N = 200$.

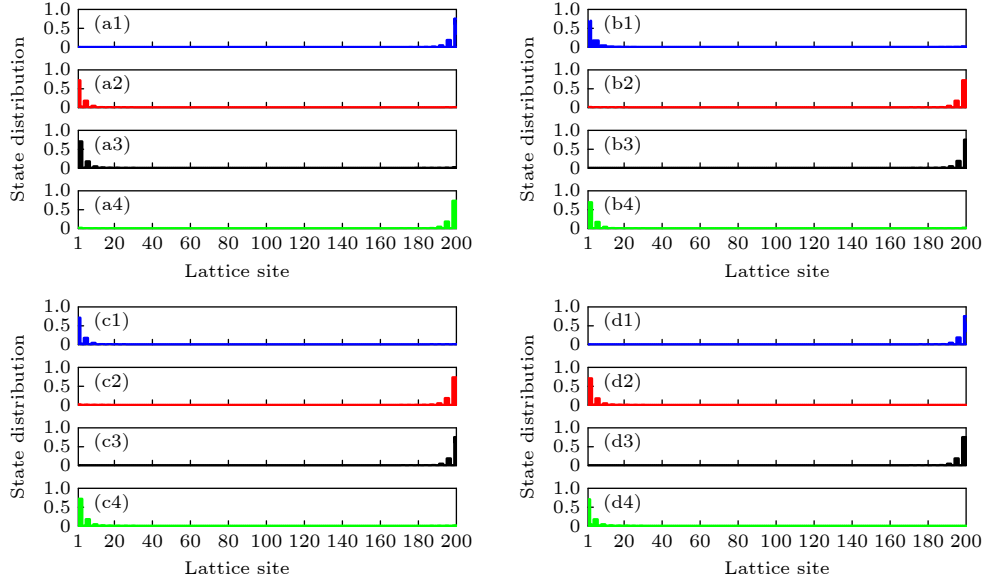


图 8 4 个不同边缘态的分布图 (a) $\theta = \pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08$; (b) $\theta = \pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$; (c) $\theta = 3\pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08$; (d) $\theta = 3\pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$. 其他参数为 $T = 0.1$, $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 8. State distributions of four different edge states: (a) $\theta = \pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08$; (b) $\theta = \pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$; (c) $\theta = 3\pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.08$; (d) $\theta = 3\pi/2$, $2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.1$. Other parameters are $T = 0.1$, $\tilde{G}_{12} = 0.2$, $\tilde{G}_{24} = 0.4$ and lattice size $N = 200$.

强度进行调制, 4 个边缘态可以分别从系统的一端转移到另一端, 比如蓝色的边缘态分布在最右边的位置 (图 8(a1)), 通过耦合强度调制后, 蓝色的边缘态分布在最左边的位置 (图 8(b1)). 因此, 通过调控 \tilde{G}_{11} 和 \tilde{G}_{23} 大小, 可以使系统的边缘态分布呈现一个翻转过程, 这可以应用于量子信息的传输通道.

另外, 从图 8(a2) 和图 8(c2) 可以看出, 当 $\theta = \pi/2$ 时, 红色的边缘态分布在最左边的位置; 当 $\theta = 2\pi/3$ 时, 红色的边缘态分布在最右边的位置. 可以调控相位参数 θ , 即调制次近邻相互作用, 使系统的边缘态分布呈现一个翻转过程, 也就是说, 在次近邻作用下, 可以实现 4 个不同通道的量子拓扑信息传输. 此外, 与图 8(a) 和图 8(c) 相比, 在图 8(b) 和图 8(d) 中只有两个边缘态 (蓝色和红色) 展现一个翻转过程, 其他两个分布位置保持不变, 这源于 p-波超导配对项耦合和次近邻相互作用之间潜在的相辅性, 引起边缘态分布的差异性, 正如图 8(b) 和图 8(c) 所示, 4 个边缘态的分布位置完全相同, 但所使用参数不同, 那么通过优化系统的参数可以实现多通道的拓扑量子信息传输.

3.3 随机缺陷的扰动

在目前的实验中, 由系统涨落引起的无序以及

操纵带来的微扰, 这些将会影响系统拓扑性质, 并且是不可回避的问题, 需要深入的研究和分析. 接下来, 把无序和微扰看作系统的随机缺陷, 进一步讨论其对系统的拓扑的影响, 哈密顿量表示为

$$H_6 = \sum_n^N \{ \omega \delta a_n^\dagger b_n^\dagger + \nu \delta a_n^\dagger b_n \} + \sum_n^{N-1} \{ \omega \delta a_{n+1}^\dagger b_n^\dagger + \nu \delta a_{n+1}^\dagger b_n \} + \tau \delta (a_{n+1}^\dagger a_n^\dagger + b_{n+1}^\dagger b_n^\dagger) \} + \text{H.c.}, \quad (6)$$

其中 ω , ν 和 τ 分别描述反旋波项、最近邻和次近邻相互作用项的随机缺陷强度, $\delta \in [-0.5, 0.5]$ 是随机数.

图 9 绘制了不同随机缺陷下的系统能谱图. 从图 9(a)—(c) 可以看到, 在 $\nu = \tau = 0$ 时, 随着 ω 逐渐增加, 系统的上下能带开始无规则地波动, 同时 4 个简并的边缘态也轻微地扰动, 但边缘态可以区分; 然而, 当 $\omega \geq 0.7$ 时, 上下能带开始重叠, 导致边缘态湮灭在能带中, 如图 9(d) 所示. 另外, 如图 9(e)—(g) 所示, 当 $\omega = \tau = 0$ 时, 随着 ν 逐渐增加, 系统的上下能带也产生无规则波动, 但边缘态的扰动比图 9(a)—(c) 中的轻微一点, 边缘态可以区分. 如图 9(h) 所示, 当 $\nu \geq 0.4$ 时, 上下能带的

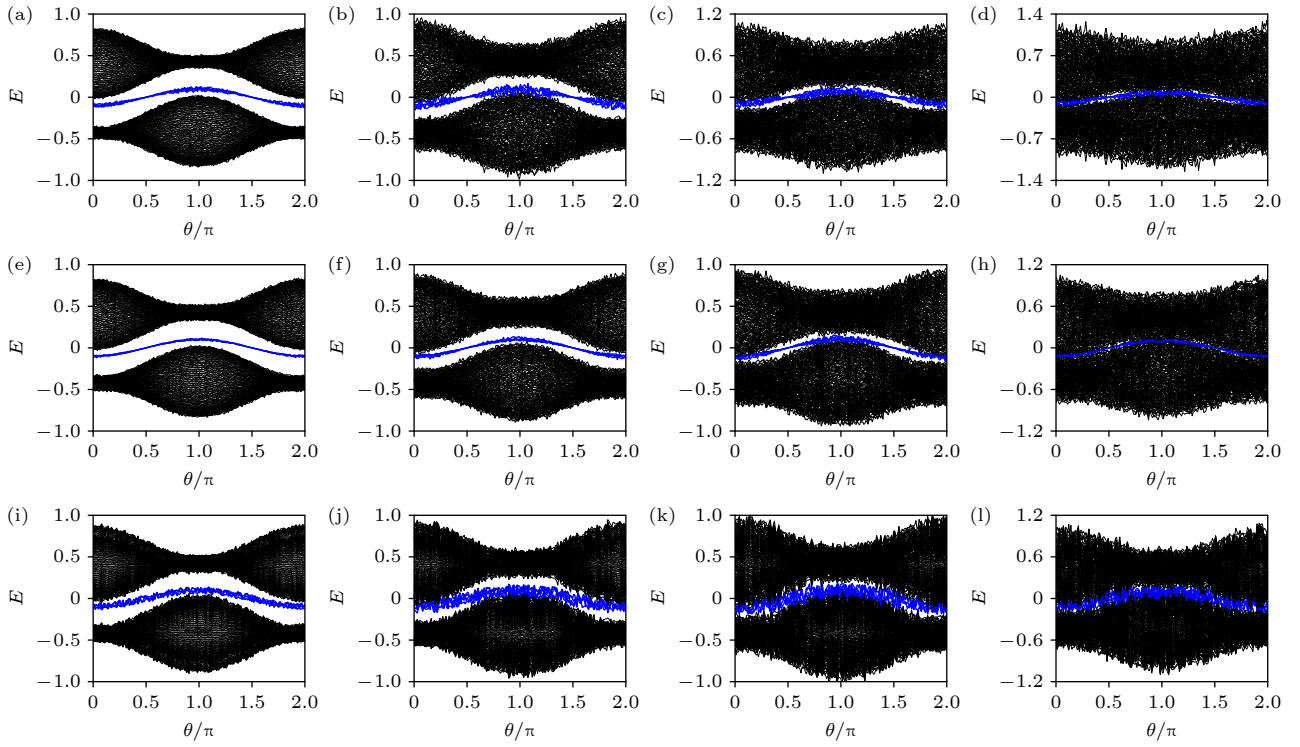


图9 系统能谱与随机缺陷的关系图 (a) $\omega = 0.1, \nu = \tau = 0$; (b) $\omega = 0.3, \nu = \tau = 0$; (c) $\omega = 0.5, \nu = \tau = 0$; (d) $\omega = 0.7, \nu = \tau = 0$; (e) $\nu = 0.1, \omega = \tau = 0$; (f) $\nu = 0.2, \omega = \tau = 0$; (g) $\nu = 0.3, \omega = \tau = 0$; (h) $\nu = 0.4, \omega = \tau = 0$; (i) $\tau = 0.1, \omega = \nu = 0$; (j) $\tau = 0.2, \omega = \nu = 0$; (k) $\tau = 0.3, \omega = \nu = 0$; (l) $\tau = 0.4, \omega = \nu = 0$; 其他参数为 $\tilde{G}_{12} = 0.2, \tilde{G}_{24} = 0.4, 2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.04, T = 0.1$ 和晶格数 $N = 200$

Fig. 9. Energy spectrum of the system via the random defects: (a) $\omega = 0.1, \nu = \tau = 0$; (b) $\omega = 0.3, \nu = \tau = 0$; (c) $\omega = 0.5, \nu = \tau = 0$; (d) $\omega = 0.7, \nu = \tau = 0$; (e) $\nu = 0.1, \omega = \tau = 0$; (f) $\nu = 0.2, \omega = \tau = 0$; (g) $\nu = 0.3, \omega = \tau = 0$; (h) $\nu = 0.4, \omega = \tau = 0$; (i) $\tau = 0.1, \omega = \nu = 0$; (j) $\tau = 0.2, \omega = \nu = 0$; (k) $\tau = 0.3, \omega = \nu = 0$; (l) $\tau = 0.4, \omega = \nu = 0$. Other parameters are $\tilde{G}_{12} = 0.2, \tilde{G}_{24} = 0.4, 2\tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{23} = 0.04, T = 0.1$ and lattice size $N = 200$.

带隙闭合, 导致边缘态湮灭在能带中, 这和图 9(d) 所示相同. 此外, 从图 9(a)—(h) 中能带和边缘态的变化趋势可以清楚地看到, ω 和 ν 导致的扰动各有异同, 例如, 能带的无规则波动和边缘态的扰动程度不同, 也发现能带的无规则波动引起的带隙闭合趋势相同, 其中 ω 值要比 ν 值大多.

另一方面, 如图 9(i)—(k) 所示, 当 $\omega = \nu = 0$ 时, τ 增加到一定程度时, 可以看到上下能带逐渐闭合, 边缘态将融合在能带中, 但边缘态的扰动程度大于图 9(a)—(h) 所示; 当 $\tau \geq 0.4$ 时, 上下能带的带隙闭合, 边缘态在能带中湮灭, 而这和图 9(d)、图 9(h) 所示相同. 根据上面的分析与讨论可以得到, 系统的不同随机缺陷都会影响其能带结构特征, 但较小值的缺陷对系统的边缘态扰动微小, 能隙中边缘态可以区分, 说明其具有鲁棒性; 然而, 当缺陷较大时, 能带间隙闭合, 边缘态将湮灭在能带中. 此外还发现, 三者对边缘态的扰动程度不同, 次临近相互作用的缺陷对边缘态的扰动最大, 最近

邻相互作用的缺陷对边缘态扰动最小. 因此, 在实验制备和操作中, 需要考虑这些缺陷引起的扰动, 尽可能地调控在合适的范围, 使实验结果具有建设性和应用性, 进一步拓展拓扑量子信息的储存和传输方式.

4 结 论

本文提出基于超导微波腔的一维晶格理论方案, 通过磁通量子比特调控晶胞之间的耦合, 考虑反旋波项与 p-波超导配对项相映射, 获得 p-波超导配对项的一维晶格方案, 来模拟和探索其中拓扑绝缘体特性. 研究发现, 通过调控 p-波超导配对项, 系统可以实现 4 个边缘态的拓扑量子信息传输通道. 此外, 当加入次近邻相互作用时, 其可以诱导能带产生新的能带, 边缘态的简并性稳定, 可以实现不同路径的拓扑量子态传输; 然而, 当次近邻相互作用调控超过阈值时, 能隙会闭合, 边缘态湮灭

在新的能带中. 另外, 当系统存在缺陷时, 发现缺陷较小时, 边缘态对其具有鲁棒性; 当缺陷超过阈值时, 能带会导致剧烈的波动, 使边缘态消失. 本文的研究结果具有广泛的潜在应用, 对未来建立可扩展量子网络具有重要的指导性建议.

参考文献

- [1] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [2] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [3] Bansil A, Lin H, Das T 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 021004
- [4] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [5] Xu Z, Zhang Y, Chen S 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013606
- [6] Li L, Xu Z, Chen S 2014 *Phys. Rev. B* **89** 085111
- [7] Li L, Chen S 2015 *Phys. Rev. B* **92** 085118
- [8] Mei F, Zhu S L, Zhang Z M, Oh C H, Goldman N 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013638
- [9] Wray L A, Xu V, Xia Y, Hsieh D, Fedorov A V, SanHor Y, Cava R J, Bansil A, Lin H, Hasan M Z 2011 *Nat. Phys.* **7** 32
- [10] Malki M, Uhrig G S 2017 *Phys. Rev. B* **95** 235118
- [11] Chitov G Y 2018 *Phys. Rev. B* **97** 085131
- [12] Agrapidis C E, van den Brink J, Nishimoto S 2019 *Phys. Rev. B* **99** 224418
- [13] Braginskii V B, Manukin A B 1967 *Sov. Phys. JETP* **25** 653
- [14] Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 1391
- [15] Liu Y L, Wang C, Zhang J, Liu Y X 2018 *Chin. Phys. B* **27** 024204
- [16] Weis S, Riviere R, Deleglise S, Gavartin E, Arcizet O, Schliesser A, Kippenberg T J 2010 *Science* **330** 1520
- [17] Martin I, Shnirman A, Lin T, Zoller P 2004 *Phys. Rev. B* **69** 125339
- [18] Huang S M, Agarwal G S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 033830
- [19] Wang K, Yu Y F, Zhang Z M 2019 *Phys. Rev. A* **100** 053832
- [20] Wei W Y, Yu Y F, Zhang Z M 2018 *Chin. Phys. B* **27** 034204
- [21] Xiao Y, Yu Y F, Zhang Z M 2014 *Opt. Express* **22** 17979
- [22] Wang Y P, Zhang Z C, Yu Y F, Zhang Z M 2019 *Chin. Phys. B* **28** 014202
- [23] You J Q, Nori F 2011 *Nature* **474** 589
- [24] Massel F, Heikkil T T, Pirkkalainen J M, Cho S U, Saloniemi H, Hakonen P J, Sillanpää M A 2011 *Nature* **480** 351
- [25] Teufel J D, Li D, Allman M S, Cicak K, Sirois A J, Whittaker J D, Simmonds R W 2011 *Nature* **471** 204
- [26] Zhang Z C, Wang Y P, Yu Y F, Zhang Z M 2019 *Ann. Phys.* **531** 1800461
- [27] Wang Y P, Zhang Z C, Yu Y F, Zhang Z M 2019 *Laser Phys. Lett.* **16** 015205
- [28] Devoret M H, Schoelkopf R J 2013 *Science* **339** 1169
- [29] Wang Y P, Zhang Z C, Yu Y F, Zhang Z M 2018 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **51** 175504
- [30] Roque T F, Peano V, Yevtushenko O M, Marquardt F 2017 *New J. Phys.* **19** 013006
- [31] Wan L L, Lü X Y, Gao J H, Wu Y 2017 *Opt. Express* **25** 017364
- [32] Wang W, Wang Y P 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 194203
- [33] Qi L, Yan Y, Wang G L, Zhang S, Wang H F 2019 *Phys. Rev. B* **100** 062323
- [34] Xu X W, Zhao Y J, Wang H, Chen A X, Liu Y X 2022 *Front. Phys.* **9** 813801
- [35] Liu L, Wang Y P 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 224202 (in Chinese) [刘浪, 王一平 2022 物理学报 **71** 224202]
- [36] Mei F, Xue Z Y, Zhang D W, Tian L, Lee C, Zhu S L 2016 *Quantum Sci. Technol.* **1** 015006
- [37] Koch J, Houck A A, Le Hur K, Girvin S M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043811
- [38] Mei F, You J B, Nie W, Fazio R, Zhu S L, Kwek L C 2015 *Phys. Rev. A* **92** 041805
- [39] Cao J, Yi X X, Wang H F 2020 *Phys. Rev. A* **102** 032619
- [40] Cai W, Han J, Mei F, Yuan X Z, Sun L Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 080501
- [41] Chatterjee P, Pradhan S, Nandy A K, Saha A 2023 *Phys. Rev. B* **107** 085423
- [42] Tong X, Meng Y M, Jiang X, Lee C, de Moraes Neto G D, Gao X L 2021 *Phys. Rev. B* **103** 104202

Modulation of topological phase transitions and topological quantum states by counter-rotating wave effect in one-dimensional superconducting microwave cavity lattice^{*}

Zheng Zhi-Yong Chen Li-Jie Xiang Lü Wang He Wang Yi-Ping[†]

(College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

(Received 13 August 2023; revised manuscript received 3 September 2023)

Abstract

In this work, a one-dimensional lattice theory scheme is proposed based on superconducting microwave cavity, which includes two different types of microwave cavity unit cells. The coupling between the unit cells is controlled by flux qubits to simulate and study their topological insulator characteristics. Specifically, by mapping the counter-rotating wave terms into the p-wave superconducting pairing term, a one-dimensional superconducting microwave cavity lattice scheme with a p-wave superconducting pairing term is obtained. It is found that the p-wave superconducting pairing term can modulate the topological quantum state of the system, allowing the topological quantum information transmission channels with four edge states to be created. In addition, when the p-wave superconducting pairing term interacts with the nearest-neighbor, the energy band undergoes fluctuations, thus inducing new energy bands to be generated, but the degeneracy of the edge states remains stable, which can realize the multiple topological quantum state transmission paths. However, when its regulation exceeds the threshold, the energy gap of the system will close, causing the edge states to annihilate in a new energy band. Furthermore, with defects considered to exist in the system, when the strength of the defect is small, the edge state produces small fluctuations, but it can be clearly distinguished, showing its robustness. When the strength of the defect exceeds the threshold, the edge state and energy band will cause irregular fluctuations, allowing the edge state to integrate into an energy band. Our research results have important theoretical value and practical significance, and can be applied to quantum optics and quantum information processing in the future.

Keywords: quantum optics, superconducting quantum circuits, topological insulators, quantum states

PACS: 42.50.-p, 85.60.-q, 03.65.Vf, 42.50.Dv

DOI: [10.7498/aps.72.20231321](https://doi.org/10.7498/aps.72.20231321)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.12004312), the Undergraduate Innovation Program of Northwest A&F University, China (Grant No. X202310712503), and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant Nos. 2452022027, 2452022169).

[†] Corresponding author. E-mail: ypwang2019@nwfau.edu.cn

一维超导微波腔晶格中反旋波效应对拓扑相变和拓扑量子态的调制

郑智勇 陈立杰 向吕 王鹤 王一平

Modulation of topological phase transitions and topological quantum states by counter-rotating wave effect in one-dimensional superconducting microwave cavity lattice

Zheng Zhi-Yong Chen Li-Jie Xiang Lü Wang He Wang Yi-Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 244204 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20231321

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231321>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一维超导传输线腔晶格中的拓扑相变和拓扑量子态的调制

Modulation of topological phase transitions and topological quantum states in one-dimensional superconducting transmission line cavities lattice

物理学报. 2022, 71(19): 194203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220675>

基于可调频光力晶格中声子-光子拓扑性质的模拟和探测

Simulation and detection of the topological properties of phonon-photon in frequency-tunable optomechanical lattice

物理学报. 2022, 71(22): 224202 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221286>

利用超导量子电路模拟拓扑量子材料

Topological quantum material simulated with superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181857>

基于金刚石氮-空位色心自旋系综与超导量子电路混合系统的量子节点纠缠

Entanglement of quantum node based on hybrid system of diamond nitrogen-vacancy center spin ensembles and superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172634>

表面单分子量子态的探测和调控研究进展

Advances in detection and regulation of surface-supported molecular quantum states

物理学报. 2022, 71(6): 060701 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212324>

二维有机拓扑绝缘体的研究进展

Research progress of two-dimensional organic topological insulators

物理学报. 2018, 67(23): 238101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181711>