

运动参考系中量子 Fisher 信息*

任亚雷 周涛†

(西南交通大学物理科学与技术学院, 量子光电实验室, 成都 610031)

(2023 年 8 月 28 日收到; 2023 年 11 月 13 日收到修改稿)

量子参数估计中的基本理论——量子 Cramér-Rao 不等式指出, 参数估计的方差由量子 Fisher 信息的倒数决定, 量子 Fisher 信息越大, 参数估计的方差就越小, 估计精度也就越高. 在非相对论量子力学中, 量子 Fisher 信息已被广泛研究, 但考虑相对论效应对量子 Fisher 信息影响的研究相对较少. 本文采用粒子态的相对论变换方法, 数值计算和分析了运动参考系中单粒子态、双粒子态振幅参数 θ 和相位参数 φ 的量子 Fisher 信息. 结果表明, 在运动参考系中, 无论是使用单粒子态还是双粒子态, 量子 Fisher 信息都会降低. 对于相位参数, 双粒子态的量子 Fisher 信息比单粒子态降低得更加显著. 然而, 对于振幅参数, 双粒子态的量子 Fisher 信息相对于单粒子态有所提高, 该研究结果为在相对论效应的影响下提高参数估计精度提供了有价值的参考.

关键词: 量子 Fisher 信息, 相对论变换, 参数估计**PACS:** 06.20.-f, 03.30.+p, 03.65.Ta**DOI:** 10.7498/aps.73.20231394

1 引言

参数估计是指间接地估计一个未知参数的值^[1]. 在物理学中, 很多物理量无法直接测量, 而只能通过间接的方式进行估计^[2,3]. 在我们估计这些物理量时, 不可避免会产生估计误差. 而如何提高参数估计的精度, 就成了参数估计领域所要研究的核心问题^[4-15]. 在参数估计理论中, 量子 Cramér-Rao 不等式表明, 量子 Fisher 信息 (quantum fisher information, QFI) 直接关系着参数估计的精度^[16-19], 其形式为

$$(\Delta\eta)^2 \geq \frac{1}{NF(\eta)}, \quad (1)$$

式中 η 为待估参数, $F(\eta)$ 为参数 η 的 QFI, N 为对系统的测量次数, $(\Delta\eta)^2$ 为待估参数的方差, 反映测量误差. 从不等式可以看出, QFI 值越大, 测量误差就越小, 估计精度也就越高^[20]. 在量子参数估

计的研究中, 系统的参数信息通常被编码到某种量子态上, 从而对未知参数进行估计^[10]. 为了尽可能提高参数估计的精度, 一种方法就是需要寻找那些能够使 QFI 尽可能大的态^[21-23].

在非相对论量子力学中, 对 QFI 进行了广泛的研究, 例如其在纠缠判据^[24-26]、量子隐形传态^[27]中的应用等. 同时, 人们还致力于发展新的理论来计算 QFI^[28-30], 为实现更高效的量子参数估计提供理论参考. 另一方面, 随着相对论物理学和量子信息科学的交叉发展, 人们开始考虑相对论效应对 QFI 的影响^[31-35]. 因为相对论效应可以改变粒子的量子态的特性^[36,37], 从而对量子参数估计产生影响.

本文考虑粒子态在不同惯性参考系下的相对论变换, 分析了粒子态 (包括动量自由度和自旋自由度) 在运动参考系下的变换关系. 选取在静止坐标系下动量和自旋不纠缠的粒子态, 发现在运动参考系下粒子态动量和自旋之间相互纠缠^[36], 编码

* 国家自然科学基金 (批准号: 12147208) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: taozhou@swjtu.edu.cn

在自旋自由度上的参数信息也会随之产生相应的变化. 本文数值计算了单粒子态和双粒子态在运动参考系中的 QFI, 结果显示, 不论是使用单粒子态还是双粒子态, 相对论效应都会导致编码在其上的待估参数的 QFI 下降, 这意味着参数估计的精度受到相对论效应的影响. 当考虑相位参数时, 双粒子态的 QFI 降低得更加显著. 有趣的是, 当考虑振幅参数时, 双粒子态的 QFI 相对于单粒子态有所提高. 这表明在对振幅参数进行估计时, 双粒子态能够抑制相对论效应带来的影响, 从而提高参数估计的精度.

2 量子 Fisher 信息

Fisher 信息是统计学中一个重要的概念, 用来描述一个可观测随机变量携带未知参数信息量的多少, 定义式为^[7]

$$F(\mu) = \int dx \frac{1}{p(x|\mu)} \left[\frac{\partial p(x|\mu)}{\partial \mu} \right]^2, \quad (2)$$

其中 μ 为待估参数, x 为随机变量观测值, $p(x|\mu)$ 为参数取 μ 时 x 的概率分布.

在量子力学中, 当系统中含有参数 μ 时, 系统的状态用密度矩阵 ρ_μ 表示^[24]. 对这个系统进行一组 POVM $\{M_x\}$ 测量, Fisher 信息可以重新表示为^[21]

$$F(\mu) = \int dx \frac{\text{Re}[\text{tr}(\rho_\mu M_x L_\mu)]^2}{\text{tr}[\rho_\mu L_\mu]}, \quad (3)$$

在这里, 引入对称对数导数算符 L_μ , 其定义式为

$$\frac{\partial \rho_\mu}{\partial \mu} = \frac{L_\mu \rho_\mu + \rho_\mu L_\mu}{2}. \quad (4)$$

在所有可能的 POVM 测量中, 得到的 Fisher 信息存在一个最大的情况, 这个最大的 Fisher 信息被称为 QFI, 其定义式为^[20]

$$F(\mu) = \text{tr}[\rho_\mu L_\mu^2]. \quad (5)$$

另一方面, 假设待测系统的密度矩阵谱分解形式为

$$\rho_\mu = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (6)$$

QFI 则可以被写为^[38]

$$F(\mu) = 2 \sum_{m,n}^N \frac{|\langle \psi_m | \partial_\mu \rho_\mu | \psi_n \rangle|^2}{p_m + p_n}, \quad (7)$$

其中 p_i 是密度矩阵 ρ_μ 的本征值, 而 $|\psi_i\rangle$ 是本征值 p_i 对应的本征态.

3 运动参考系中粒子状态的变换

首先定义有质量粒子在静止参考系中的本征态^[36] $|\mathbf{0}\lambda\rangle$:

$$P^\mu |\mathbf{0}\lambda\rangle = p_0^\mu |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad (8)$$

$$J_z |\mathbf{0}\lambda\rangle = \lambda |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad (9)$$

其中四维动量 $p_0^\mu = (m, \mathbf{0})$, λ 是 z 方向的自旋角动量分量. 将洛伦兹推动作用于静止参考系中的量子态 $|\mathbf{0}\lambda\rangle$, 可以定义如下动量态:

$$|\mathbf{p}\lambda\rangle = L(\xi_{\mathbf{p}}) |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad (10)$$

其中洛伦兹推动 $L(\xi_{\mathbf{p}})$ 满足

$$L(\xi_{\mathbf{p}})(m, \mathbf{0}) = (\sqrt{p^2 + m^2}, \mathbf{p}). \quad (11)$$

本文中, $(\sqrt{p^2 + m^2}, \mathbf{p})$ 表示粒子在运动参考系中的四维动量, $\xi_{\mathbf{p}}$ 表示粒子的快度, 满足:

$$\sinh |\xi_{\mathbf{p}}| = |\mathbf{p}|/m, \quad (12)$$

$$\xi_{\mathbf{p}}/|\xi_{\mathbf{p}}| = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|. \quad (13)$$

在运动参考系中, 粒子的状态可以通过对静止参考系中的粒子态施加洛伦兹变换得到^[36,37], 洛伦兹变换在物理 Hilbert 空间中诱导出态矢量上的幺正线性变换 $U(\Lambda)$, 其对粒子态的作用是^[39]:

$$U(\Lambda) |\mathbf{p}\lambda\rangle = U(\Lambda L(\xi_{\mathbf{p}})) |\mathbf{0}\lambda\rangle$$

$$= U(L(\xi_{\Lambda\mathbf{p}})) U(L(\xi_{\Lambda\mathbf{p}})^{-1} \Lambda L(\xi_{\mathbf{p}})) |\mathbf{0}\lambda\rangle, \quad (14)$$

其中 $L(\xi_{\Lambda\mathbf{p}})^{-1} \Lambda L(\xi_{\mathbf{p}})$ 是一个旋转操作, 被称为 Wigner 转动, 它作用于静止坐标系的自旋分量 λ 上^[36]. 因此 (14) 式可以写成如下形式:

$$U(\Lambda) |\mathbf{p}\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda'\lambda}^{(s)}(R(\Lambda, \mathbf{p})) |\Lambda\mathbf{p}\lambda'\rangle, \quad (15)$$

其中 $D_{\lambda'\lambda}^{(s)}(R(\Lambda, \mathbf{p}))$ 是三维空间转动 R 在自旋空间上的表示, 本文只考虑 $s = 1/2$ 的情况. 为了简洁, 我们令

$$U_{\mathbf{p}} = D_{\lambda'\lambda}^{(1/2)}(R(\Lambda, \mathbf{p})). \quad (16)$$

本文将四维动量写成球坐标系中的形式 $[E, p \sin(\phi) \cos(\gamma), p \sin(\phi) \sin(\gamma), p \cos(\phi)]$, 得到 Wigner 转动的具体形式:

$$U_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta e^{-i\gamma} \\ -\beta e^{i\gamma} & \alpha \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中

$$\alpha = \sqrt{\frac{E+m}{E'+m}} \left[\cosh\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{p \cos(\phi)}{(E+m)} \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right) \right], \quad (18)$$

$$\beta = \frac{p \sin(\phi)}{\sqrt{(E+m)(E'+m)}} \sinh\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (19)$$

$$E' = E \cosh(\xi) + p \cos(\phi) \sinh(\xi). \quad (20)$$

ϕ 是球坐标系中的仰角, γ 为方位角, m 代表粒子态的质量, E 和 E' 分别为粒子经过相对论变换前后的能量.

本文选取分布展宽为 σ_r 的“相对论高斯型”动量分布:

$$f(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{N(\sigma_r)}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_r^2}\right), \quad (21)$$

其中 $N(\sigma_r)$ 是归一化系数, p 表示 $\mathbf{p}$ 的大小. 对于一组动量遵循“相对论高斯型”动量分布的本征态, 态矢量可以写成

$$|\Psi\rangle = \int f(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\lambda\rangle \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p}, \quad (22)$$

其中 $\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p}$ 是洛伦兹不变的动量积分测度, 由下式给出:

$$\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p} = \frac{d^3\mathbf{p}}{2\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (23)$$

将 (21) 式和 (22) 式代入 (16) 式, 可求出自旋为 1/2 的有质量粒子的态矢量经过洛伦兹变换后的表达式为

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= U(\Lambda) |\Psi\rangle = U(\Lambda) \int f(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\lambda\rangle \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p} \\ &= \int \sum_{\lambda'} f(\mathbf{p}) U_{\mathbf{p}} |\Lambda\mathbf{p}\lambda'\rangle \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p} \\ &= \int \sum_{\lambda'} f(\mathbf{p}) U_{\mathbf{p}} |\lambda'\rangle \otimes |\Lambda\mathbf{p}\rangle \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p} \\ &= \int f(\mathbf{p}) U_{\mathbf{p}} |\psi\rangle \otimes |\Lambda\mathbf{p}\rangle \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (24)$$

在 (24) 式中, $|\psi\rangle$ 表示粒子的自旋态.

4 运动参考系中的 QFI

4.1 单粒子态 QFI

在单粒子态量子参数估计中, 待估参数由自旋态携带, 这里选取参数化的单量子比特自旋态, 它

可以写成:

$$|\psi_{\theta,\varphi}\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (25)$$

其中 θ 和 φ 是未知的待估计参数, 分别表示振幅参数和相位参数.

首先计算在静止参考系中两个未知参数的 QFI. 对于纯态, 编码在该态上的参数 μ 的 QFI 可表示为^[20]

$$F(\mu) = 4 \left(\langle \partial_{\mu} \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle + |\langle \psi | \partial_{\mu} \psi \rangle|^2 \right), \quad (26)$$

很容易计算出关于 θ 和 φ 的 QFI 为 $F(\theta) = 1$, $F(\varphi) = \sin^2\theta$.

相对论效应使粒子的动量和自旋相互纠缠^[36], 由于待估参数编码在自旋态上, 因此本文只考虑自旋态的变换. 在变换后的态中自旋和动量两个自由度都属于这个变换态的子系统, 要研究自旋态中的待估参数, 需要关于自旋自由度的约化密度矩阵. 通过对动量自由度求偏迹, 得到关于自旋自由度的约化密度矩阵:

$$\rho = \int |f(\mathbf{p})|^2 U_{\mathbf{p}} |\psi_{\theta,\varphi}\rangle \langle \psi_{\theta,\varphi}| U_{\mathbf{p}}^{\dagger} \tilde{\mathbf{d}}\mathbf{p}, \quad (27)$$

将其代入 QFI 的计算 (7) 式, 即可算出在运动参考系中未知参数 θ 和 φ 的 QFI.

4.2 单粒子态计算结果与分析

在运动参考系中求解 QFI 的解析解是一个非常困难的工作, 所以考虑利用 MATLAB 进行数值求解. 本文分别计算了单粒子态相位参数的 QFI $F(\varphi)$ 和振幅参数的 QFI $F(\theta)$, 研究发现在运动参考系中, $F(\varphi)$ 和 $F(\theta)$ 都与快度 ξ 、振幅参数 θ , 以及展宽 σ_r 与粒子质量 m 的比值 σ_r/m 有关.

首先考虑等振幅 ($\theta = \pi/2$) 的情况, 即 $|\psi_{\theta,\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} |1\rangle$. 如图 1(a), (b), 当 σ_r/m 取 1, 2, 3, 4 时, $F(\varphi)$ 和 $F(\theta)$ 都随着快度 ξ 的增大而减小, 当快度 ξ 趋向于无穷大时, 二者都降低到某一个固定的值, 固定值依赖于决定动量分布离散程度的展宽 σ_r 和粒子质量 m 的比值 σ_r/m , 其值越大, $F(\varphi)$ 和 $F(\theta)$ 降低趋势越明显, 且最终达到的固定值越小. 这是因为相对论效应使粒子的动量和自旋相互纠缠, 在不同的参考系看来, 同一个粒子的自旋态是不同的. 对于自旋 1/2 粒子, 一般情况下质量是确定的, 展宽 σ_r 增大意味着动量分布变得更加分散, 对动量部分求偏迹, 求得的自旋态的

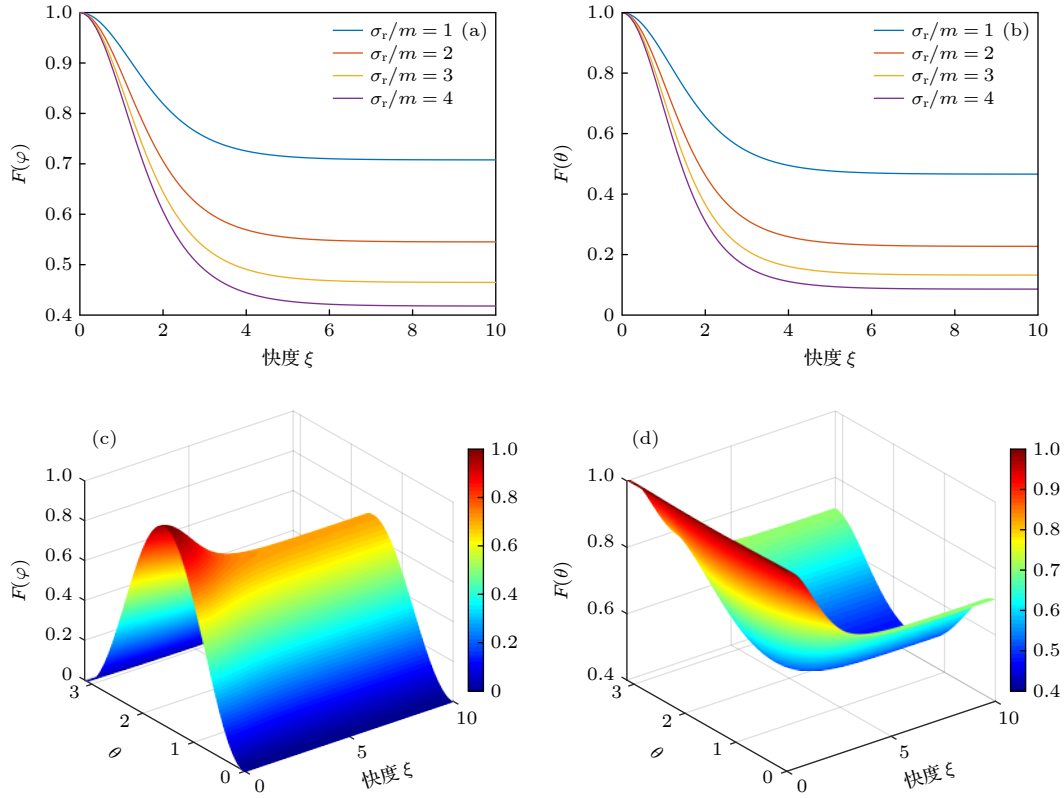


图 1 运动坐标系中单粒子态的 QFI (a) $\theta = \pi/2$, $\sigma_r/m = 1, 2, 3, 4$ 时, $F(\varphi)$ 随 ξ 的变化; (b) $\theta = \pi/2$, $\sigma_r/m = 1, 2, 3, 4$ 时, $F(\theta)$ 随 ξ 的变化; (c) $\sigma_r/m = 1$, $F(\varphi)$ 随 θ , ξ 的变化; (d) $\sigma_r/m = 1$, $F(\theta)$ 随 θ , ξ 的变化

Fig. 1. Quantum Fisher information for one-particle state in moving frames: (a) $F(\varphi)$ is plotted as a function of ξ for $\theta = \pi/2$ and $\sigma_r/m = 1, 2, 3, 4$; (b) $F(\theta)$ is plotted as a function of ξ for $\theta = \pi/2$ and $\sigma_r/m = 1, 2, 3, 4$; (c) $F(\varphi)$ is plotted as a function of θ and ξ for $\sigma_r/m = 1$; (d) $F(\theta)$ is plotted as a function of θ and ξ for $\sigma_r/m = 1$.

约化密度矩阵中包含的待估参数信息会随之减少. 因此随着 σ_r/m 的增大, 待估参数的 QFI 下降的更加明显.

对于单量子比特系统, 其振幅参数同样会对相位和振幅的估计和测量产生影响. 如图 1(c), (d), 这里取 $\sigma_r/m = 1$, 当它的振幅参数取 $[0, \pi]$ 时, 它们的 QFI 也会发生变化. 当振幅参数越接近 $\pi/2$ 时, 相位参数的 QFI 越大, 而振幅参数的 QFI 越小, 都在 $\theta = \pi/2$ 时达到极值, 且 $F(\varphi)$ 和 $F(\theta)$ 都关于 $\theta = \pi/2$ 呈现一定的对称性, 原因在于粒子态选取的动量分布具有对称性.

4.3 双粒子态计算结果与分析

为了尽可能提高参数估计的精度, 降低相对论效应对参数估计的影响, 本文尝试寻找那些能使 QFI 尽可能大的态. 在目前已有的研究中, 利用量子系统特有的量子纠缠性质, 可以提高量子态的 QFI. 因此, 本研究将编码未知参数的自旋态选为参数化的二量子比特纠缠态:

$$|\psi_{\theta, \varphi}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |00\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |11\rangle. \quad (28)$$

两个有质量的自旋为 $1/2$ 的粒子的态矢量可以写成^[36]:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \iint \sum_{\lambda\sigma} g_{\lambda\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) |p\lambda\rangle_A |q\sigma\rangle_B \tilde{d}\mathbf{p} \tilde{d}\mathbf{q}, \quad (29)$$

其中, $|p\lambda\rangle_A$ 与 $|q\sigma\rangle_B$ 分别表示 A 粒子与 B 粒子的动量-自旋本征态, 且 $g_{\lambda\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 满足:

$$g_{\lambda\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\lambda\sigma} f(\mathbf{p}) f(\mathbf{q}), \quad (30)$$

$$\sum_{\lambda\sigma} \iint |g_{\lambda\sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \tilde{d}\mathbf{p} \tilde{d}\mathbf{q} = 1. \quad (31)$$

经过相对论变换后, 求得自旋态的约化密度矩阵为

$$\rho_{AB} = \iint |f(\mathbf{p})|^2 |f(\mathbf{q})|^2 U_{\mathbf{p}} \otimes U_{\mathbf{q}} |\psi_{\theta, \varphi}\rangle \langle \psi_{\theta, \varphi}| U_{\mathbf{p}}^\dagger \otimes U_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{d}\mathbf{p} \tilde{d}\mathbf{q}. \quad (32)$$

将其代入 QFI 的计算公式, 数值计算双粒子态相位参数的 QFI $F(\varphi)$ 和振幅参数的 QFI $F(\theta)$. 结果

显示, 双粒子态的相位参数 QFI $F(\varphi)$ 和振幅参数 QFI $F(\theta)$ 也与快度 ξ 、振幅参数 θ 和 σ_r/m 有关, 且 $F(\varphi)$ 和 $F(\theta)$ 随三者的变化关系和单粒子态类似. 图 2 展示了当 $\sigma_r/m = 1$ 时, 等振幅情况下双粒子态和单粒子态 $F(\varphi)$ 和 $F(\theta)$ 随 ξ 的变化对比图. 有趣的是, 双粒子态相位参数的 QFI 下降的更为显著, 而振幅参数的 QFI 相比于单粒子态则有所提高. 这表明随着粒子数增加, 相位参数的估计精度降低的更加显著, 而振幅参数的估计精度则有所提高.

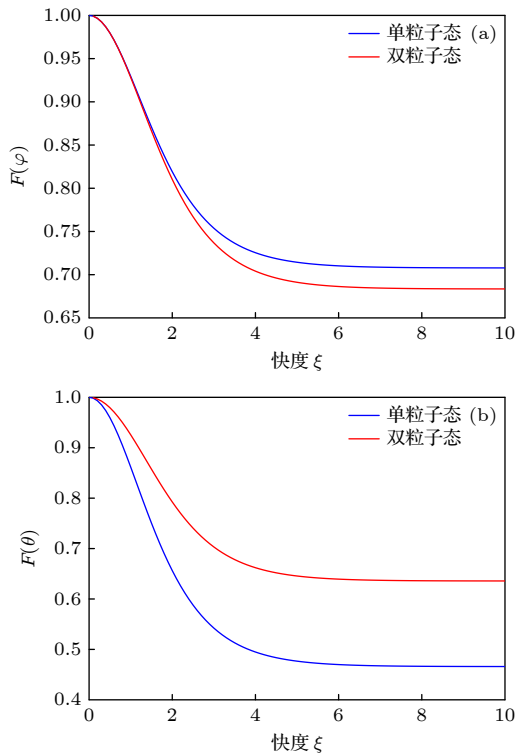


图 2 运动坐标系中单粒子态与双粒子态的 QFI 对比
(a) $\sigma_r/m = 1$, $\theta = \pi/2$ 时, $F(\varphi)$ 随 ξ 的变化对比;
(b) $\sigma_r/m = 1$, $\theta = \pi/2$ 时, $F(\theta)$ 随 ξ 的变化对比
Fig. 2. Quantum Fisher information for one-particle state versus that for two-particle state in moving frames: (a) $F(\varphi)$ is plotted as a function of ξ for $\sigma_r/m = 1$ and $\theta = \pi/2$; (b) $F(\theta)$ is plotted as a function of ξ for $\sigma_r/m = 1$ and $\theta = \pi/2$.

5 结 论

本文研究了相对论效应对量子参数估计精度的影响, 结果发现, 不论是单粒子态还是双粒子态, 相对论效应都会导致其携带的待估参数 QFI 下降, 从而降低参数估计的精度. 在考虑相位参数时, 随着粒子数的增加, QFI 降低得更为显著. 然而在考

虑振幅参数时, 双粒子态的 QFI 相对于单粒子态有所提高. 这表明在运动参考系中进行量子参数估计时, 携带未知参数的粒子态选用双粒子态, 同时待估参数编码在自旋态的振幅参数上, 可以降低相对论效应对参数估计精度的影响. 这一结果提供了一种抑制相对论效应噪声的方法. 接下来可以进一步研究多粒子态的 QFI 的变化情况^[34], 尝试得出一个在相对论变换下计算多粒子态 QFI 的解析结果, 这将在量子参数估计理论领域产生重要的价值.

参考文献

- [1] Zhong W 2014 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [钟伟 2014 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [2] Lu X M, Wang X G 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 120503
- [3] Matteo G A P 2009 *Int. J. Quant. Inf.* **7** 125
- [4] Helstrom C W 1967 *Phys. Lett. A* **25** 101
- [5] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North Holland Amsterdam) pp52–96, 160–168
- [6] Yuen H P, Lax M 1973 *IEEE Trans. Inf. Th.* **19** 740
- [7] Braunstein S, Caves C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [8] Braunstein S, Caves C, Milburn G 1996 *Ann. Phys.* **247** 135
- [9] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
- [10] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [11] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5** 222
- [12] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [13] Liu R, Chen Y, Jiang M, Yang X D, Wu Z, Li Y C, Yuan H D, Peng X H, Du J F 2021 *Npj. Quantum. Inf.* **7** 170
- [14] Niu M L, Wang Y M, Li Z J 2022 *Acta. Phys. Sin.* **71** 090601 (in Chinese) [牛明丽, 王月明, 李志坚 2022 物理学报 **71** 090601]
- [15] Fisher R A 1922 *Philosoph. Trans. Roy. Soc. London* **222** 309
- [16] Fisher R A 1925 *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22** 700
- [17] Helstrom C W 1969 *J. Stat. Phys.* **1** 231
- [18] Holevo A S 2001 *Statistical Structure of Quantum Theory* (Berlin, Heidelberg: Springer) pp45–70
- [19] Pezze L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [20] Jing X X 2016 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [井晓幸 2016 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [21] Boixo S, Flammia S T, Caves C M, Geremia J M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 090401
- [22] Liu W F, Zhang L H, Li C J 2010 *Int J. Theor. Phys.* **49** 2463
- [23] Liu R, Wu Z, Li Y C, Chen Y Q, Peng X H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 110305 (in Chinese) [刘然, 吴泽, 李宇晨, 陈昱全, 彭新华 2023 物理学报 **72** 110305]
- [24] Li N, Luo S L 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014301
- [25] Kourbolagh Y A, Azhdargalam M 2019 *Phys. Rev. A* **99** 012304

- [26] Li Y 2019 *Ph. D. Dissertation* (Taiyuan: Shanxi University) (in Chinese) [李岩 2019 博士学位论文 (太原: 山西大学)]
- [27] Wu Y, Li J F, Liu J M 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 140304 (in Chinese) [武莹, 李锦芳, 刘金明 2018 物理学报 **67** 140304]
- [28] Zhang X Y, Lu X M, Liu J, Ding W K, Wang X G 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012414
- [29] Li J N, Cui D Z 2023 *Phys. Rev. A* **108** 012419
- [30] Sone A, Cerezo M, Beckey J L, Coles P J 2021 *Phys. Rev. A* **104** 062602
- [31] Jafarzadeh M, Rangani J H, Amniat-Talab M. 2020 *Proc. R. Soc. A* **476** 20200378
- [32] Liu X B, Jing J L, Tian Z H, Yao W P 2021 *Phys. Rev. D* **103** 125025
- [33] Yao Y, Xing X, Li G, Wang X G, Sun C P 2014 *Phys. Rev. A* **89** 042336
- [34] Hosler D, Kok P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 052112
- [35] Zhou T, Cui J X, Cao Y 2013 *Quantum. Inf. Process* **12** 747
- [36] Gingrich R M and Adami C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270402
- [37] Gingrich R M, Bergou A J, Adami C 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042102
- [38] Luo S L 2000 *Lett. Math. Phys.* **53** 243
- [39] Ren J R, Song S X 2010 *Int J. Theor. Phys.* **49** 1317

Quantum Fisher information in moving reference frame^{*}

Ren Ya-Lei Zhou Tao[†]

(*Quantum Optoelectronics Laboratory, School of Physical Science and Technology,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

(Received 28 August 2023; revised manuscript received 13 November 2023)

Abstract

In the field of quantum metrology, an important application is quantum parameter estimation. As the fundamental theory of quantum parameter estimation, quantum Cramér-Rao inequality shows that the variance of parameter estimation is determined by the inverse of quantum Fisher information. Higher quantum Fisher information corresponds to a lower variance, thereby improving the precision of parameter estimation. Quantum Fisher information has been extensively investigated in many aspects of non-relativistic quantum mechanics, including entanglement structure detection, quantum teleportation, quantum phase transition, quantum chaos, and quantum computation. However, there are few researches considering the influence of relativistic effect on quantum Fisher information, and therefore, we attempt to investigate this topic in this work. The relativistic transformation of particle states is employed, and the quantum Fisher information about amplitude parameter θ and phase parameter φ are investigated in moving reference frame. In this work, the parameters to be estimated are encoded into the spin degree of freedom, and the pure single-qubit state and the pure two-qubit state are both considered. The quantum Fisher information about θ and φ of single-qubit state and two-qubit state in moving reference frame are numerically calculated, respectively. It can be observed that the quantum Fisher information is associated with rapidity, amplitude parameter, and the ratio of the width to the particle mass σ_r/m . The quantum Fisher information of the estimated parameters decreases with rapidity increasing for both single-qubit state and two-qubit state. As rapidity approaches infinity, i.e. increases to the speed of light, the quantum Fisher information reaches to a constant which decreases as the ratio σ_r/m increases. More importantly, for the phase parameter φ , it is observed that the quantum Fisher information of two-qubit state reduces more significantly than that of single-qubit state. While, for the amplitude parameter θ , the quantum Fisher information of two-qubit state is greater than that of single-qubit state. These results are useful and valuable for improving the precision of parameter estimation under the influence of relativistic effect.

Keywords: quantum Fisher information, relativistic transformation, parameter estimation

PACS: 06.20.-f, 03.30.+p, 03.65.Ta

DOI: 10.7498/aps.73.20231394

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12147208).

[†] Corresponding author. E-mail: taozhou@swjtu.edu.cn

运动参考系中量子Fisher信息

任亚雷 周涛

Quantum Fisher information in moving reference frame

Ren Ya-Lei Zhou Tao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 050601 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231394

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231394>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于量子Fisher信息的耗散相互作用光-物质耦合常数的估计

Estimation of light-matter coupling constant under dispersive interaction based on quantum Fisher information

物理学报. 2022, 71(9): 090601 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212029>

基于量子Fisher信息的量子计量进展

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

物理学报. 2019, 68(4): 040601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子Fisher信息

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

物理学报. 2018, 67(14): 140304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180330>

基于最大似然的单通道交叠激光微多普勒信号参数分离估计

Separate estimation of laser micro-Doppler parameters based on maximum likelihood schemes

物理学报. 2018, 67(11): 114202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172639>

参考系波动下的参考系无关测量设备无关量子密钥分发协议

Reference-frame-independent measurement-device-independent quantum key distribution under reference frame fluctuation

物理学报. 2019, 68(24): 240301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191364>

基于强耦合Duffing振子的微弱脉冲信号检测与参数估计

Detection and parameter estimation of weak pulse signal based on strongly coupled Duffing oscillators

物理学报. 2019, 68(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181856>