

# 一维接触排斥相互作用单自旋翻转费米气体的基态和淬火动力学性质\*

尹相国<sup>1)†</sup> 于海如<sup>1)</sup> 郝亚江<sup>2)</sup> 张云波<sup>3)</sup>

1) (山西大学理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

2) (北京科技大学物理系, 理论物理研究所, 北京 100083)

3) (浙江理工大学物理系, 浙江省光场调控重点实验室, 杭州 310018)

(2023年9月4日收到; 2023年9月24日收到修改稿)

基于严格解方法, 研究了一维排斥相互作用单自旋翻转费米气体的基态和淬火动力学性质. 借助 Bethe 波函数, 基态和不同本征态之间的单体关联函数和两体关联函数可以表示为简单函数之和, 这一简洁形式可以极大地降低计算难度. 系统初始状态为无相互作用的基态, 当迅速把相互作用强度调节为有限大时, 动量分布和关联函数出现周期性的振荡行为; 当相互作用调节为比较弱时, 振荡周期性好且振荡幅度小, 系统可以用二能级模型近似; 当相互作用调为非常强时, 振荡周期性变差且振荡幅度大, 但是依然存在主周期. 此时整体偏离初态较远, 但是在时间为  $mL^2/(2\pi\hbar)$  时系统非常接近初态.

**关键词:** 一维费米气体, 动量分布, 关联函数, 淬火动力学

**PACS:** 03.75.Ss, 67.85.Lm, 05.30.Fk

**DOI:** 10.7498/aps.73.20231425

## 1 引言

多体系统的非平衡动力学<sup>[1,2]</sup>是当今物理领域最重要的研究课题之一, 其中淬火 (quench) 动力学<sup>[3]</sup>是一种受到广泛关注的动力学形式. 淬火动力学一般指处于平衡态或者基态的系统突然改变某一个系统参数或哈密顿量中的一个参数, 例如外势<sup>[4,5]</sup>、粒子间的相互作用强度<sup>[6,7]</sup>、温度<sup>[8]</sup>、杂质<sup>[9,10]</sup>、布拉格脉冲<sup>[11]</sup>等, 从而引起系统动力学演化. 涉及的系统包括孤立冷原子气体<sup>[12]</sup>、自旋系统<sup>[13]</sup>、拓扑系统等. 研究的方法包括矩阵精确对角化<sup>[14]</sup>、变分法<sup>[15]</sup>、密度矩阵重整化群 (DMRG)、含时变分蒙特卡罗方法 (time-dependent variational Monte Carlo method)<sup>[16]</sup>、多层多组态含时 Hartree 方法 (ML-

MCTDH)<sup>[17]</sup>等. 在多体系统中, 量子可积系统的淬火动力学也得到了人们的关注, 例如接触相互作用的一维原子气体<sup>[18,19]</sup>、XXZ 自旋链<sup>[20]</sup>、哈伯德模型<sup>[21]</sup>等.

作为一维量子可积系统的典型代表, 接触相互作用的一维玻色气体 (Lieb-Liniger 模型<sup>[22]</sup>) 得到了人们的持续关注. 2009年, 实验上将强排斥相互作用突然变为强吸引相互作用, 从而实现高激发态的制备, 即超 Tonks-Girardeau 态<sup>[6,23]</sup>. 随后, 调节 Lieb-Liniger 模型相互作用强度的淬火动力学得到持续的研究. 2014年 Caux 等<sup>[16]</sup>不仅给出了该模型宇称平衡态在无相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚态下交叠积分 (overlap) 的解析表达式, 而且利用淬火作用量方法 (quench action approach) 得到了热力学极限下稳态的密度关联等性质. 接着淬火动

\* 山西省基础研究计划 (批准号: 202103021224033)、国家自然科学基金 (批准号: 11704233, 12074340) 和浙江理工大学科研启动基金 (批准号: 20062098-Y) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yinxianguo@sxu.edu.cn

力学中排斥相互作用的交叠积分<sup>[24]</sup>和关联函数<sup>[19,25]</sup>、吸引相互作用情形<sup>[26,27]</sup>、任意子情形<sup>[28]</sup>、一维简谐势情形<sup>[29]</sup>、纠缠熵<sup>[30]</sup>等都得到了大量的研究. 因为动力学演化涉及非常多的激发态, 2021年Robinson等<sup>[31]</sup>提出了快速寻找大权重激发态的方法, 并用扩展的数值重整化群方法计算更多粒子数系统的动力学.

作为冷原子气体的另外一个可积模型, 一维接触相互作用费米气体的本征态和平衡态的性质研究得比较多<sup>[32]</sup>, 而其淬火动力学得到的关注很少. 本文关注单个自旋向下而其他自旋全部向上的特例. 该模型可理解为自旋极化费米气体中的杂质问题. 早在1965年McGuire<sup>[33,34]</sup>用Bethe ansatz方法给出了该系统严格的波函数和能量本征值, 并得到了不同自旋间的两体关联函数的解析表达式和物理性质. 吸引相互作用下的极化子到分子态的转变得到大量研究<sup>[35-41]</sup>. 2017年崔晓玲研究组<sup>[42]</sup>发现吸引情况下的散射态具有负有效质量. 2020年Gamayun等<sup>[43,44]</sup>推导出动量依赖的杂质单体关联函数的弗雷德霍姆(Fredholm)行列式表示, 并得到了杂质的奇异动量分布. 2021年Dolgirev等<sup>[15]</sup>发现, 当系统总动量等于费米动量时, 集体激发模式的态密度在频率空间存在明显的尖峰, 该峰对应的能量为自旋向上粒子激发态与自旋向下粒子(杂质)激发态的能量差, 也对应着相互作用淬火后杂质附近费米气体的振荡频率.

虽然单自旋翻转一维费米气体的基态动量分布和其他物理量性质已经用数值方法研究过<sup>[33-44]</sup>, 但是本文的严格解方法可以给出基态关联函数和动量分布的简洁表达式. 尽管淬火动力学方法得到广泛的应用, 但是一维费米气体的淬火动力学性质却研究得很少. 本文主要研究单自旋翻转的费米气体的基态和相互作用淬火动力学性质. 系统的初态是相互作用强度为零时系统的基态, 随后将相互作用强度突然调到正值, 研究自旋向上费米气体的动量分布、单体关联函数、两体关联函数随时间的变化, 观察相互作用强度对这些物理量演化行为的影响, 因而判断系统是否一直处于振荡状态, 还是发生热化或者预热化? 本文的内容安排如下: 第2节介绍单自旋翻转的一维费米气体模型, 并回顾严格解方法得到的本征态和能量本征值表达式; 第3节给出基态的单体关联函数和两体关联函数以及动量分布用简单函数求和的表达式, 并分析其性质;

第4节给出淬火动力学的计算方法, 包括不同本征态间的关联函数的简洁表达式; 第5节是淬火动力学的数值计算结果和讨论; 最后一节是总结.

## 2 一维单自旋翻转费米气体模型及其严格解

考虑由 $N-1$ 个自旋向上和一个自旋向下的费米子组成的一维费米气体系统. 因为泡利不相容原理, 这里不考虑自旋向上费米子之间的相互作用, 而不同自旋费米子之间存在 $\delta$ 函数形式的接触相互作用. 假设 $x_i$ 是第 $i$ 个粒子的空间坐标, 则该系统哈密顿量为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j), \quad (1)$$

其中, 第一项为所有粒子的动能和, 第二项为不同自旋费米子的相互作用项,  $\hbar$ 是约化普朗克常数,  $m$ 是粒子的质量,  $g$ 是自旋向上粒子和自旋向下粒子间的相互作用强度.  $g > 0$ 表示排斥相互作用, 而 $g < 0$ 表示吸引相互作用. 本文只研究排斥相互作用情况. 为了书写方便和遵循惯例, 令 $\hbar = 2m = 1$ , 则系统的哈密顿量变为

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j), \quad (2)$$

其中 $c = g/2$ . 该模型的本征方程可用坐标Bethe ansatz方法严格可解.

在周期性边界条件下, 坐标为 $x_1$ 的粒子自旋向下而坐标为 $x_2, x_3, \dots, x_N$ 的粒子自旋向上对应的全空间波函数可以写为

$$\begin{aligned} & \psi_{\downarrow 1}(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &= \sum_P (-1)^P \alpha_{P_1} \exp(ik_{P_1} x_1) \\ & \quad \times \prod_{j=2}^N [\beta_{P_j}(x_1 - x_j) \exp(ik_{P_j} x_j)], \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $\alpha_j = 1 - \exp(ik_j L)$ ,  $\beta_j(x) = \exp[ik_j L \theta(x)]$ ,  $L$ 是系统的长度.  $\theta(x)$ 是阶跃函数, 定义为: 当 $x < 0$ 时,  $\theta(x) = 0$ ; 当 $x > 0$ 时,  $\theta(x) = 1$ .  $(-1)^P$ 表示排列的符号, 当 $P = 1, 2, \dots, N$ 时,  $(-1)^P = 1$ . 每两个位置交换一次,  $(-1)^P$ 就是原来排列的相反数. 波矢 $k_j$ 和快度 $\lambda$ 需要满足Bethe ansatz方程组:

$$\frac{k_j - \lambda + ic'}{k_j - \lambda - ic'} = \exp(ik_j L), \quad (4)$$

$$\prod_{j=1}^N \frac{k_j - \lambda + ic'}{k_j - \lambda - ic'} = 1, \quad (5)$$

其中  $j = 1, 2, \dots, N$  和  $c' = c/2$ . 同时, 由本征方程可得系统的能量本征值为

$$E = \sum_{i=1}^N k_i^2. \quad (6)$$

### 3 本征态关联函数和动量分布

自旋向上粒子的单体关联函数和两体关联函数, 以及不同自旋粒子间的两体关联函数定义如下:

$$g^{(1)}(x, x') \equiv \langle \psi | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x') | \psi \rangle, \quad (7)$$

$$g_{\uparrow\uparrow}^{(2)}(x, x') \equiv \langle \psi | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x) \hat{a}_\uparrow^\dagger(x') \hat{a}_\uparrow(x') | \psi \rangle, \quad (8)$$

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x') \equiv \langle \psi | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\downarrow^\dagger(x') \hat{a}_\downarrow(x') \hat{a}_\uparrow(x) | \psi \rangle, \quad (9)$$

其中  $\hat{a}_\uparrow^\dagger(x)$  ( $\hat{a}_\uparrow(x)$ ) 表示在  $x$  位置产生 (湮灭) 一个自旋向上的粒子,  $\hat{a}_\downarrow^\dagger(x)$  和  $\hat{a}_\downarrow(x)$  分别是自旋向下粒子的产生和湮灭算符. 上面表达式中的二次量子化的波函数为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{G}} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \times \sum_{i=1}^N \psi_{\downarrow i}(x_1, x_2, \dots, x_N) |\downarrow i\rangle, \quad (10)$$

其中,  $G$  是归一化系数,  $|\downarrow i\rangle = \hat{a}_\uparrow^\dagger(x_1) \cdots \hat{a}_\uparrow^\dagger(x_{i-1}) \hat{a}_\downarrow^\dagger(x_i) \hat{a}_\uparrow^\dagger(x_{i+1}) \cdots \hat{a}_\uparrow^\dagger(x_N) |0\rangle$  表示坐标为  $x_i$  的粒子自旋向下同时其他粒子自旋向上的量子态,  $\psi_{\downarrow i}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  是相应的一次量子化波函数, 如  $\psi_{\downarrow 1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  为 (3) 式表示的波函数. 求和号是对所有自旋向下的粒子求和, 其中每个粒子向下的波函数都占有相同的权重. 一次量子化的波函数具有交换反对称性, 例如: 当自旋向上粒子和自旋向下粒子发生交换, 以及自旋向上粒子之间发生交换时, 波函数分别满足下面的关系式:

$$\psi_{\downarrow 1}(x_1, \dots, x_i, \dots) = -\psi_{\downarrow i}(x_i, \dots, x_1, \dots), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \psi_{\downarrow i}(\dots, x_m, \dots, x_i, \dots, x_n, \dots) \\ &= -\psi_{\downarrow i}(\dots, x_n, \dots, x_i, \dots, x_m, \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

湮灭算符  $\hat{a}_\sigma(x)$  和产生算符  $\hat{a}_{\sigma'}^\dagger(x')$  满足费米子的反对易关系式, 例如

$$\{\hat{a}_\sigma(x), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(x')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(x - x'), \quad (13)$$

$$\{\hat{a}_\sigma(x), \hat{a}_{\sigma'}(x')\} = \{\hat{a}_\sigma^\dagger(x), \hat{a}_{\sigma'}^\dagger(x')\} = 0. \quad (14)$$

利用表达式 (10), 粒子波函数的交换反对称性 (11) 式和 (12) 式以及算符的反对易性 (13) 式和 (14) 式, 可得用一次量子化波函数表示的关联函数:

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x, x') &= \frac{1}{G_0} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_{N-1} \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}^*(x_1, \dots, x_{N-1}, x) \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}(x_1, \dots, x_{N-1}, x'), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} g_{\uparrow\uparrow}^{(2)}(x, x') &= \frac{N-2}{G_0} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_{N-1} \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}^*(x_1, \dots, x_{N-2}, x, x') \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}(x_1, \dots, x_{N-2}, x, x'), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x') &= \frac{1}{G_0} \int_0^L dx_3 \cdots \int_0^L dx_N \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}^*(x, x', x_3, \dots, x_N) \\ &\quad \times \psi_{\downarrow 1}(x, x', x_3, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $G_0 = G/[N!N(N-1)]$ . 由归一化条件  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ , 可得归一化系数

$$\begin{aligned} G &= N!N \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \\ &\quad \times |\psi_{\downarrow 1}(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

文献 [33] 将波函数 (3) 代入表达式 (17), 经过计算可消除积分, 得到不同自旋粒子间两体关联函数的求和形式:

$$\begin{aligned} & g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(0, x_2) \\ &= \frac{1}{G_1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=2(j>i)}^N \frac{|\alpha_i e^{-ik_j x_2} - \alpha_j e^{-ik_i x_2}|^2}{D_i D_j}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv G / \left( N!^2 \prod_{i=1}^N D_i \right) = L \sum_i \frac{|\alpha_i|^2}{D_i}. \\ D_i &= L + \frac{4}{c} \sin^2 \left( \frac{1}{2} k_i L \right). \end{aligned}$$

遵循同样的方法, 可以得到自旋向上粒子的单体关联函数和两体关联函数由简单函数有限项求和的简洁表达式:

$$\begin{aligned} & g^{(1)}(x, x') = 1/G_1 \\ & \times \sum_{i,j=1(i \neq j)}^N \frac{F_1(k_i, k_i, z) |\alpha_j|^2 - F_1(k_i, k_j, z) \alpha_i \alpha_j^*}{D_i D_j}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 g_{\uparrow\uparrow}^{(2)}(x, x') &= \frac{1}{G_1} \sum_{P_1 P_2 P_3} \frac{(-1)^{P_1 P_2 P_3} \alpha_{P_3}^*}{\prod_{i=1,2,3} D_{P_i}} \\
 &\times \sum_{Q_1 Q_2 Q_3} (-1)^{Q_1 Q_2 Q_3} \alpha_{Q_3} \\
 &\times F_1(k_{P_1} - k_{Q_1}, k_{Q_2} - k_{P_2}, z), \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中  $P_1 P_2 P_3$  的求和是  $\{1, 2, \dots, N\}$  取三个数的所有组合并且全排列的求和,  $Q_1 Q_2 Q_3$  的求和是对  $\{P_1 P_2 P_3\}$  全排列的求和, 总求和的数目为  $6N(N-1)(N-2)$ .  $(-1)^{P_1 P_2 P_3}$  和  $(-1)^{Q_1 Q_2 Q_3}$  是排列顺序的符号. 当  $0 \leq x \leq x' \leq L$  时,

$$F_1(k_i, k_j, z) = \begin{cases} \frac{1}{i(k_i - k_j)} \{ \exp(ik_j z) \alpha_i^* \\ + \exp[ik_i(z-L)] \alpha_j \}, & i \neq j, \\ \exp(ik_i z) [-z\alpha_i^* + L], & i = j, \end{cases}$$

其中  $z = x' - x > 0$ . 当  $0 \leq x' \leq x \leq L$  ( $z < 0$ ) 时,  $F_1(k_i, k_j, z) = F_1(k_i, k_j, z + L)$ . (20) 式的详细推导过程见附录 A.

由于系统具有平移不变性, 所以自旋向上粒子的动量分布可以定义为

$$n(p) = \frac{L}{2\pi} \int_0^L dz g^{(1)}(0, z) \exp(ipz), \quad (22)$$

其中动量  $p$  是  $2\pi/L$  的整数倍. 将单体关联函数 (20) 式代入 (22) 式, 可得动量分布的求和形式:

$$n(p) = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{G_1} \times \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{Q(k_i, k_i, p) |\alpha_j|^2 - Q(k_i, k_j, p) \alpha_i \alpha_j^*}{D_i D_j}, \quad (23)$$

其中

$$Q(k_i, k_j, p) = \begin{cases} \frac{1}{i(k_i - k_j)} \{ Q_1(p + k_j) \alpha_i^* \\ + Q_1(p + k_i) \exp[-ik_i L] \alpha_j \}, & i \neq j, \\ -\alpha_i^* Q_2(p + k_i) + L Q_1(p + k_i), & i = j, \end{cases} \quad (24)$$

$$Q_1(k) = \frac{1}{ik} [\exp(ikL) - 1] \quad \text{和} \quad Q_2(k) = \left( L - \frac{1}{ik} \right) \frac{1}{ik} \exp(ikL) - \frac{1}{k^2}.$$

对于具体的数值计算, 首先需要计算出波矢  $\{k\}$ . 当  $c > 0$  时, 由方程 (4) 和方程 (5) 可知, 波矢  $\{k\}$  的解是实数, 对方程组取对数后可以得到实数空间的超越方程:

$$\begin{aligned}
 k_j L - 2\pi n_j + 2 \arctan \frac{k_j - \lambda}{c/2} &= 0, \\
 j &= 1, 2, \dots, N, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N \arctan \frac{k_j - \lambda}{c/2} + \pi n_\lambda = 0, \quad (26)$$

式中, 对于  $N$  为偶数的情况, 量子数  $n_j$  的取值是互不相等的奇数的一半, 量子数  $n_\lambda$  的取值是整数. 系统基态的量子数取值为  $n_j = \{-(N-1)/2, -(N-1)/2 + 1, \dots, (N-1)/2\}$  和  $n_\lambda = 0$ . 将基态量子数、相互作用强度  $c$  和系统长度  $L$  代入超越方程 (25) 和 (26), 可得波矢  $\{k\}$  的数值解, 进一步可计算关联函数和动量分布. 在数值计算中, 系统长度取值为  $L = 1$ , 粒子数除了特别说明外一般取  $N = 6$ . 图 1(a) 给出了基态的自旋向上粒子的单体关联函数. 单体关联函数的绝对值可以理解为在两个位置发现同一个粒子的概率. 先把一个自旋向上粒子坐标固定在  $x = 0$  处, 单体关联函数在整个坐标空间出现振荡行为, 存在  $N - 2$  个零点, 源自其他  $N - 2$  个自旋向上粒子的泡利不相容作用. 粒子间的相互作用不改变振荡行为和零点个数. 随着相互作用强度变大, 远离  $x = 0$  区域的振荡幅度变小, 但不会变为零, 说明相互作用会在一定程度上抑制发现同一个粒子的概率. 图 1(b) 给出了基态的自旋向上粒子的两体关联函数. 两体关联函数可以理解为两个粒子在两个位置同时出现的概率. 先把一个自旋向上粒子坐标固定在  $x = 0$  处, 因为泡利不相容原理, 两体关联函数在  $x = 0$  处为零, 在其他区域出现了振荡行为. 关联函数关于  $x = L/2$  对称, 在整个坐标空间, 无相互作用情况下的峰值个数为  $N - 2$ , 等于其余自旋向上粒子数. 随着相互作用强度变得非常大, 峰值个数会增加一个, 变为  $N - 1$  个, 说明自旋向下的粒子一定程度上相当于一个自旋向上的粒子. 图 1(c) 给出了基态的动量分布. 因为系统满足平移不变性, 动量只能取离散值  $2\pi/L$  的整数倍. 当相互作用强度为零时, 动量分布为费米海分布, 即粒子仅占满绝对值小于等于费米动量 ( $p_F = 2\pi(N/2 - 1)/L$ ) 的动量轨道; 当相互作用强度变大时, 动量绝对值小于等于费米动量的轨道占据概率变低, 而高于费米动量的轨道占据概率变大, 即粒子以一定的概率从费米海内被激发到费米海外, 但总体上还是保持动量绝对值越大, 占据概率越小的性质, 这和文献 [41] 采用变分方法得到的结果一致.

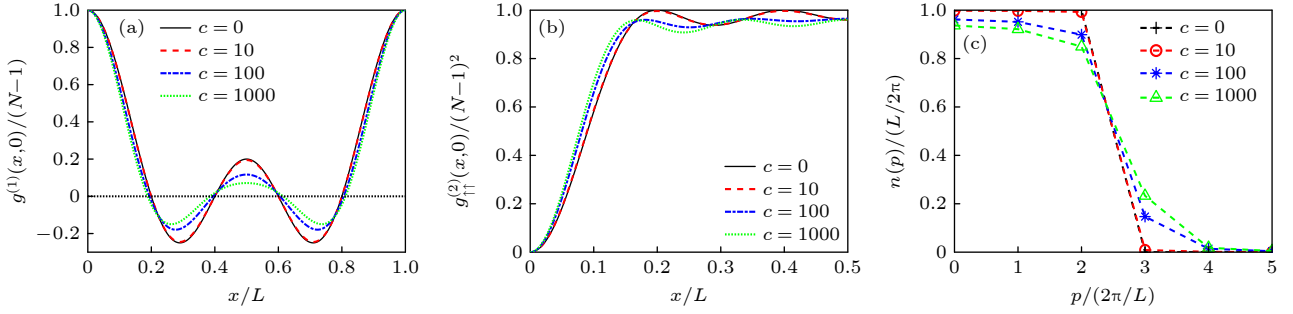


图 1 系统基态的自旋向上粒子的 (a) 单体关联函数、(b) 两体关联函数和 (c) 动量分布. 粒子数和相互作用强度分别取值为  $N = 6$ ,  $c = 0, 10, 100, 1000$ . 图 (c) 动量取离散的值, 短虚线只是为了视觉效果

Fig. 1. (a) Single-body correlation function, (b) two-body correlation function, and (c) momentum distribution of spin-up particle for the ground state with interaction strength  $c = 0, 10, 100, 1000$  and particle number  $N = 6$ . The momenta in panel (c) are discrete and the dashed-line is for visual effect.

#### 4 淬火动力学的计算方法

系统的初态设为无相互作用情况下的基态, 其波函数为

$$|\psi_{\text{tot}}(0)\rangle = \frac{1}{L^{N/2}N!} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \times \sum_{i=1}^N \psi_{\downarrow i}^0(x_1, x_2, \cdots, x_N) |\downarrow i\rangle, \quad (27)$$

其中每个粒子自旋向下的权重相同. 本文仅讨论粒子数为偶数的情况. 无相互作用系统的一次量子化波函数由  $N - 1$  个极化费米子系统的斯莱特行列式和单个自旋向下粒子的平面波函数相乘得到. 当系统处于基态时, 自旋向下粒子的波矢为零, 因此其波函数为 1, 同时自旋向上粒子的波矢为  $q_j = (j - N/2)2\pi/L$ , 其中  $j = 1, 2, \cdots, N - 1$ . 例如, 第 1 个粒子自旋向下的一次量子化波函数是

$$\begin{aligned} & \psi_{\downarrow 1}^0(x_1, x_2, \cdots, x_N; 0) \\ &= \sum_Q (-1)^Q \exp\left(i \sum_{j=1}^{N-1} q_{Q_j} x_{j+1}\right), \quad (28) \end{aligned}$$

其中求和号是对  $N - 1$  个波矢  $q_j$  全排列的求和. 其他粒子自旋向下的系统波函数可通过粒子交换反对称性得到.

当系统的初态设为无相互作用情况下的基态后, 在  $t = 0$  时刻将相互作用强度瞬间调到正值  $c$ , 然后研究动量分布和关联函数的含时演化. 根据含时薛定谔方程, 含时波函数可以用含时演化算符作用在初态上得到:

$$|\psi_{\text{tot}}(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t)|\psi_{\text{tot}}(0)\rangle. \quad (29)$$

将系统的完备基  $\sum_v |\psi_v\rangle\langle\psi_v|$  插入到上式含时演化算符之后, 可得

$$|\psi_{\text{tot}}(t)\rangle = \sum_v C_v \exp(-iE_v t) |\psi_v\rangle, \quad (30)$$

其中本征态  $|\psi_v\rangle$  满足本征方程  $\hat{H}|\psi_v\rangle = E_v|\psi_v\rangle$ ,  $E_v$  是能量本征值,  $v$  是本征态指标, 代表量子数  $n_1, n_2, \cdots, n_N$  和  $n_\lambda$ . 交叠积分  $C_v = \langle\psi_v|\psi_{\text{tot}}(0)\rangle$  的模方表示波函数在该本征态上的占据概率, 满足条件  $\sum_v |C_v|^2 = 1$ . 本征态可以写为

$$\begin{aligned} |\psi_v\rangle &= \frac{1}{\sqrt{G_v}} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \\ &\times \sum_{i=1}^N \psi_{\downarrow i}(x_1, x_2, \cdots, x_N; v) |\downarrow i\rangle, \quad (31) \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{N}{\sqrt{L^N G_v}} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_N \\ &\times \psi_{\downarrow 1}^*(x_1, x_2, \cdots, x_N; v) \\ &\times \psi_{\downarrow 1}^0(x_1, x_2, \cdots, x_N). \quad (32) \end{aligned}$$

将一次量子化波函数 (3) 式和 (28) 式代入到上式中, 并利用动量守恒  $\sum_j k_j = \sum_j q_j = 0$ , 积分并化简可得连乘形式的交叠积分:

$$C_v = \frac{-iN!(-2)^N}{\sqrt{L^{N-2}G_v}} \prod_{j=1}^N \sin(k_j L/2) \det(\mathbf{M}^C), \quad (33)$$

其中,  $\{k_j\}$  是波函数  $\psi_{\downarrow 1}(x_1, x_2, \cdots, x_N; v)$  中的波矢,  $\det()$  表示矩阵的行列式.  $\mathbf{M}^C$  是一个  $N \times N$  的矩阵, 当  $i = 1, 2, \cdots, N, j = 1, \cdots, N - 1$  时, 矩阵元为  $M_{ij}^C = 1/(q_j - k_i)$ , 剩余的第  $N$  列矩阵元全是 1.

任意算符  $\hat{O}$  的期望值为

$$O(t) = \langle \psi_{\text{tot}}(t) | \hat{O} | \psi_{\text{tot}}(t) \rangle = \sum_{vv'} C_v^* C_{v'} \exp[i(E_v - E_{v'})t] \langle \psi_v | \hat{O} | \psi_{v'} \rangle. \quad (34)$$

在长时间演化后的期望值平均值与振荡交叉项无关, 可表示为本征态期望值乘以对应的概率然后求和的形式:

$$\langle O(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau O(t) dt = \sum_v |C_v|^2 \langle \psi_v | \hat{O} | \psi_v \rangle. \quad (35)$$

具体地, 自旋向上粒子的单体关联函数和两体关联函数, 以及不同自旋粒子间的两体关联函数可表示为

$$g^{(1)}(x, x') = \sum_{vv'} C_v^* C_{v'} \exp[i(E_v - E_{v'})t] \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x') | \psi_{v'} \rangle, \quad (36)$$

$$g_{\uparrow\uparrow}^{(2)}(x, x') = \sum_{vv'} C_v^* C_{v'} \exp[i(E_v - E_{v'})t] \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x) \hat{a}_\uparrow^\dagger(x') \hat{a}_\uparrow(x') | \psi_{v'} \rangle, \quad (37)$$

$$g_{\uparrow\downarrow}^{(2)}(x, x') = \sum_{vv'} C_v^* C_{v'} \exp[i(E_v - E_{v'})t] \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\downarrow^\dagger(x') \hat{a}_\downarrow(x') \hat{a}_\uparrow(x) | \psi_{v'} \rangle. \quad (38)$$

利用场算符的反对易关系式和波函数的粒子交换反对称性, 可得不同本征态之间关联函数的积分形式:

$$\begin{aligned} & \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\downarrow^\dagger(x') \hat{a}_\downarrow(x') \hat{a}_\uparrow(x) | \psi_{v'} \rangle \\ &= \frac{N!N(N-1)}{\sqrt{G_v G_{v'}}} \int_0^L dx_3 \cdots \int_0^L dx_N \psi_{\downarrow 1}^*(x, x', x_3, \cdots, x_N; v) \psi_{\downarrow 1}(x, x', x_3, \cdots, x_N; v'), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x') | \psi_{v'} \rangle \\ &= \frac{N!N(N-1)}{\sqrt{G_v G_{v'}}} \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_{N-1} \psi_{\downarrow 1}^*(x_1, \cdots, x_{N-1}, x; v) \psi_{\downarrow 1}(x_1, \cdots, x_{N-1}, x'; v'). \end{aligned} \quad (40)$$

当  $x \neq x'$  时,

$$\begin{aligned} & \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x) \hat{a}_\uparrow^\dagger(x') \hat{a}_\uparrow(x') | \psi_{v'} \rangle = \langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow^\dagger(x') \hat{a}_\uparrow(x') \hat{a}_\uparrow(x) | \psi_{v'} \rangle \\ &= \frac{N!N(N-1)}{\sqrt{G_v G_{v'}}} (N-2) \int_0^L dx_1 \cdots \int_0^L dx_{N-2} \psi_{\downarrow 1}^*(x_1, \cdots, x_{N-2}, x, x'; v) \psi_{\downarrow 1}(x_1, \cdots, x_{N-2}, x, x'; v'). \end{aligned} \quad (41)$$

将一次量子化波函数 (3) 式代入上面的积分中, 进行积分计算并化简可得不同本征态之间关联函数的求和形式:

$$\langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow(x') | \psi_{v'} \rangle = \frac{4N!^2}{\sqrt{G_v G_{v'}}} \sum_{m,s=1}^N A_m^s F_2(k_m, k'_s, z), \quad (42)$$

$$\langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\uparrow^\dagger(x') \hat{a}_\uparrow(x') \hat{a}_\uparrow(x) | \psi_{v'} \rangle = \frac{4N!^2}{\sqrt{G_v G_{v'}}} \sum_{\substack{m_1 m_2 (m_2 \neq m_1) \\ s_1 s_2 (s_2 \neq s_1)}} A_{m_1 m_2}^{s_1 s_2} F_2(k_{m_1} - k'_{s_1}, k'_{s_2} - k_{m_2}, z), \quad (43)$$

$$\langle \psi_v | \hat{a}_\uparrow^\dagger(x) \hat{a}_\downarrow^\dagger(x') \hat{a}_\downarrow(x') \hat{a}_\uparrow(x) | \psi_{v'} \rangle = \frac{4N!^2}{\sqrt{G_v G_{v'}}} \sum_{m,s=1}^N A_m^s \exp[i(k'_s - k_m)(L\theta(z) - z - L/2)], \quad (44)$$

其中  $k_m$  和  $k'_s$  分别是态  $|\psi_v\rangle$  和  $|\psi_{v'}\rangle$  的波矢,  $F_2(k, k', z) = F_1(k, k', z) \exp[i(k - k')L/2]$ ,

$$\begin{aligned} A_m^s &= (-1)^{m+s} \sum_{l=1(l \neq m)}^N (-1)^{N+l} \text{sgn}(l-m) \sin(k_l L/2) \det(\mathbf{B}_{m_l}^s), \\ A_{m_1 m_2}^{s_1 s_2} &= \sum_{m_3 (m_3 \neq m_1, m_2)} (-1)^{N + \sum_{i=1}^3 \left[ m_i + \sum_{j>i} \theta(m_i - m_j) \right] + \sum_{i=1}^2 s_i + \theta(s_1 - s_2)} \sin(k_{m_3} L/2) \det(\mathbf{B}_{m_1 m_2 m_3}^{s_1 s_2}), \end{aligned}$$

$\theta(x)$  是阶跃函数. 这里定义  $(N+1) \times N$  的  $\mathbf{M}$  矩阵, 其前  $N$  行矩阵元为  $M_{ij} = \sin[(k'_j - k_i)L/2]/[(k'_j - k_i)/2]$ , 最后一行的矩阵元为  $M_{N+1,j} = \sin(k'_j L/2)$ .  $\mathbf{B}_{ml}^s$  是一个  $(N-1) \times (N-1)$  的方阵, 是  $\mathbf{M}$  矩阵去掉第  $m$  和  $l$  行以及第  $s$  列后剩余的矩阵元按照原来的位置组成的矩阵.  $\mathbf{B}_{m_1 m_2 m_3}^{s_1 s_2}$  是一个  $(N-2) \times (N-2)$  的方阵, 是  $\mathbf{M}$  矩阵去掉第  $m_1, m_2$  和  $m_3$  行以及第  $s_1$  和  $s_2$  列后剩余的矩阵元按照原来的位置组成的矩阵.

接下来讨论数值计算. 系统的激发态取值范围遵循以下两个原则: 第一, 因为动量守恒, 这里只选取动量为零的本征态, 即  $K = \sum_{j=1}^N k_j = 0$ , 进而量子数满足  $\sum_{j=1}^N n_j + n_\lambda = 0$ ; 第二, 取  $|C_v|^2$  比较大的本征值, 忽略  $|C_v|^2$  比较小的本征值, 一般情况下, 选取的激发态量子数与基态的量子数重复的比较多, 且能量本征值比较小. 在本文的数值计算中, 粒子数取  $N = 6$ , 忽略  $|C_v|^2 < 10^{-5}$  的占据态, 相互作用强度  $c = 10, 100, 1000$  对应的占据概率和分别取到 99.9%, 99.87% 和 98.69%.

## 5 淬火动力学结果和讨论

首先讨论初态在本征态上的占据概率  $|C_v|^2$ . 对于任何相互作用强度, 基态 (GS) 的占据概率都是最大的, 在激发态中占据概率最大的态是双重简并态 (DDS), 对应的量子数分别为  $n_j = \{-(N+1)/2, -(N-3)/2, -(N-5)/2, \dots, (N-1)/2\}$ ,

$n_\lambda = 1$  和  $n_j = \{-(N-1)/2, -(N-3)/2, \dots, (N-3)/2, (N+1)/2\}$ ,  $n_\lambda = -1$ , 即  $n_j$  最大的基态量子数加 1, 同时  $n_\lambda$  减 1, 或者  $n_j$  最小的基态量子数减 1, 同时  $n_\lambda$  加 1. 由图 2(a) 可知, 随着相互作用强度从零变到非常大, 基态的占据概率从 1 下降到一个固定的值, 双重简并态的占据概率从零上升到一个固定的值, 基态和双重简并态的占据概率和从 1 下降到一个固定的值, 说明相互作用导致粒子从基态以一定的概率转移到激发态. 在相互作用非常大的情况下, 以粒子数  $N = 6$  为例, 基态的占据概率超过 50%, 基态和双重简并态的占据概率和超过 60%, 其余激发态的占据概率不会超过 40%, 说明系统主要由这两种态主导, 其余激发态只是起次要作用, 因此系统振荡的主周期由基态和双重简并态的能级差决定. 另外, 在相同的无量纲化相互作用强度下, 粒子数越多, 基态的占据概率越小, 双重简并态的占据概率越大, 它们的和越小.

系统振荡的主周期  $T$  定义为  $T = 2\pi/(E_{\text{DDS}} - E_{\text{GS}})$ , 其中  $E_{\text{GS}}$  和  $E_{\text{DDS}}$  分别是基态和两重简并态的能量本征值. 由图 2(b) 可知, 随着相互作用强度从零变到非常大, 当粒子数  $N \leq 6$  时, 主周期单调变大, 最后达到稳定值, 当粒子数  $N \geq 8$  时, 主周期先变大到达一个峰值, 然后变小趋向于稳定值. 主周期的变化范围随着粒子数变大而变小, 例如: 粒子数  $N = 4, 6, 8, 10$  的相对变化范围分别不超过 7%, 3%, 2%, 1.5%, 因此, 当粒子数比较大时, 主周期的变化范围非常小.

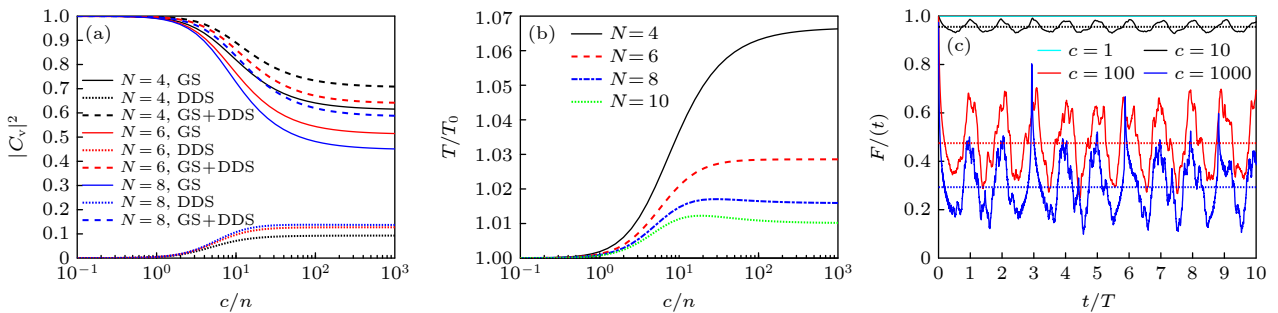


图 2 (a) 系统基态和最主要的两重简并激发态在初态上的各自占据概率和它们的和. GS (实线) 代表基态, ES (点虚线) 代表激发态中占据概率最大的两重简并态, GS+ES (短虚线) 代表基态和上述两重简并态的占据概率之和. (b) 物理量振荡的主周期随无量纲相互作用强度的变化.  $T_0$  是无相互作用时的主周期. (c) 不同相互作用强度下随时间演化的保真度. 粒子数为  $N = 6$

Fig. 2. (a) The respective occupation probabilities of the ground state and the most dominant degenerate excited state of the system on the initial state and their sum. GS (solid lines) represents the ground state, ES (dotted lines) represents the double degenerate state that occupies the highest probability of the excited state, GS+ES (short dashed lines) represents the sum of the occupation probabilities of the ground state and the above double degenerate states. (b) The primary period of the oscillation of the physical quantity v.s. the strength of the dimensionless interaction.  $T_0$  is the primary period in the absence of interaction. (c) Fidelity v.s. time for different interaction strength. The particle number is taken as  $N = 6$ .

系统的保真度定义为

$$F(t) = |\langle \psi_{\text{tot}}(t) | \psi_{\text{tot}}(0) \rangle|^2 = \left| \sum_v |C_v|^2 \exp(iE_v t) \right|^2, \quad (45)$$

它表示含时波函数在初态的投影概率. 如图 2(c) 所示, 在  $t=0$  时, 保真度为 1; 在  $t>0$  时, 保真度偏离 1, 呈现了一定的振荡行为. 具体地说, 当相互作用强度比较小时, 例如  $c=1$ , 保真度接近于 1; 随着相互作用强度变大, 例如  $c=10$ , 保真度明显小于 1, 显现了明显的周期性振荡, 且振荡幅度比较小; 当相互作用强度变为 100 时, 保真度更加远离 1, 周期性变差, 且振荡幅度明显变大; 当相互作用强度为 1000 时, 保真度更加远离 1, 平均值只有 0.3 左右, 但是在某些时刻还能达到比较高的值, 例如在主周期的三倍时, 保真度达到了 0.8, 超过了  $c=100$  对应的值. 另外, 保真度的平均值随着相互作用强度的变大而变小.

图 3 给出了相互作用强度  $c=100$  时含时演化的动量分布. 在开始阶段 ( $0 < t < 0.03T$ ), 对于小动量情形, 即动量绝对值小于或等于费米动量 ( $2\pi(N/2-1)/L$ ), 动量分布值从  $L/(2\pi)$  开始下降, 而对于大动量情形, 即动量绝对值大于费米动量, 动量分布值从零以相同的速率开始上升. 在接下来的阶段, 对于小动量情形, 动量越大, 动量分布值下降的速率越快, 但是越慢达到局域最小值, 例如: 动量为  $4\pi/L$  的动量分布值 (图 3(a) 蓝色线条) 最慢到达局域最小值; 对于大动量情形, 动量越小, 动量分布值上升的速率越快, 但是越慢达到局域最

大值, 例如: 动量为  $6\pi/L$  的动量分布值 (图 3(a) 黑色线条) 最慢到达局域最大值. 在最后阶段, 动量分布开始了多频率调制的振荡过程. 越靠近费米动量, 动量分布振荡范围越大, 动量分布的平均值越靠近中间值  $L/(4\pi)$ . 对于小动量部分, 动量分布平均值小于基态相应的值 (图 3(b) 纵轴上的圆圈); 对于大动量部分, 动量分布平均值大于基态相应的值. 零时刻的波函数由本征态叠加组成, 其中基态占据的概率 ( $|C_v|^2 \approx 0.68$ ) 最大, 其余的概率由众多激发态贡献. 因为众多激发态的占据, 导致动量分布平均值与基态值的差别.

相互作用强度比较小和非常大的情况下动量分布含时演化有所不同, 如图 4(a) 和图 4(b) 所示. 当相互作用强度比较小的时候, 动量分布振荡范围小, 且显现了非常好的周期性, 可用二能级模型近似处理. 例如, 图 4(a) 中代表  $p=6\pi/L$  的黑线和对应的虚线符合得比较好, 代表  $p=4\pi/L$  的蓝线和对应的虚线除了差一个固定的常数外, 振荡的周期和幅度也非常接近. 二能级模型的两个能级分别为系统的基态和双重简并态. 对于粒子数  $N=6$  和相互作用强度  $c=10$  的情况, 基态和双重简并态的占据概率分别为 97.8% 和 1.2%, 两个能级的总概率为 99%, 其余的态仅占 1% 的概率, 所以二能级模型在该情况下是比较好的近似模型. 动量分布的振荡周期为  $T=2\pi/(E_{\text{DDS}}-E_{\text{GS}})$ . 当相互作用强度非常大的时候, 如图 4(b) 所示, 动量分布的振荡幅度很大, 振荡的周期性变差, 但是还能明显看到以周期  $T$  为主. 这是因为基态和双重简并态还是占

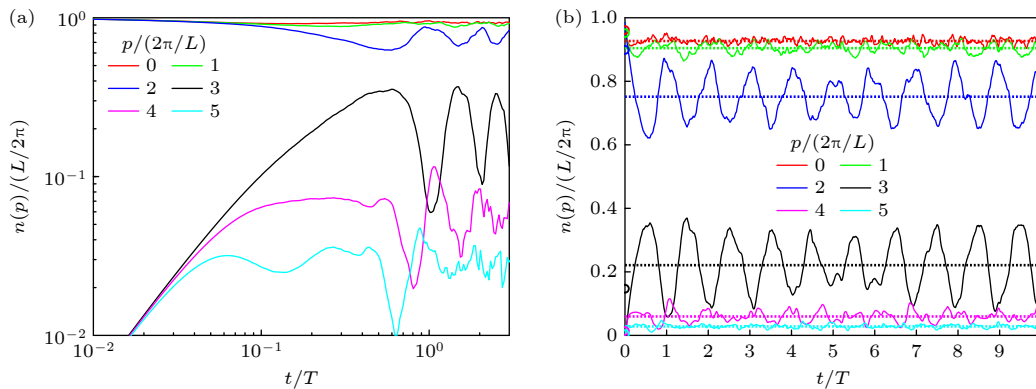


图 3 相互作用强度  $c=100$  的动量分布含时演化 (a) 横轴和纵轴取对数坐标; (b) 取正常坐标. 虚线是动量分布对时间的平均值. 图 (b) 纵轴上的圆圈是  $c=100$  时基态的动量分布值

Fig. 3. The evolution of momentum distribution with interaction strength  $c=100$ . Both axis of (a) is taken logarithm. The axis of (b) is normal. The dotted lines is the average of momentum distribution with respective to time. The circles on Y-axis of panel (b) is momentum distribution of the ground state with  $c=100$ .

据主要的概率, 分别为 53.1% 和 12.7%. 值得一提的是, 在第三个周期的末端, 动量分布非常靠近初态的情况, 这与  $c = 100$  的情形 (图 3(b)) 有所不同.

接下来讨论强相互作用下的关联函数. 由图 5 可知, 自旋向上粒子的单体和多体关联函数与初态对应关联函数的差都随着时间周期变化. 主周期还是由基态和双重简并态的能级差引起. 它们在坐标空间上也表现出一定的规律性. 单体关联函数的差在坐标空间上出现了正负交替的规律, 而两体关联函数的差在坐标空间上表现出在接近两端区域以正值为主, 在中间区域以负值为主. 另外, 单体关联函数表现出一个比较明显的固定传播速度, 如图 5(a) 中黑色点线所示, 其大小等于一个动量单位所对应的速度, 即  $2\pi/(mL) = 4\pi/L$ . 在粒子数为 6 的情况下, 费米速度是该速度的 2.5 倍. 在该速度下, 粒子从最左边  $x = 0$  运动到最右边  $x = L$

所用的时间正好是时间主周期的 3 倍, 是关联函数除了  $t = 0$  附近外最接近初态的时间 (如图 5(a) 红色虚线位置), 也是保真度除了  $t = 0$  附近外取最大值的时间.

关联函数和动量分布到达最大恢复值所用的时间  $3T$  可用本征值能级差解释. 当相互作用强度取向正无穷且总动量为零时, 大部分能量本征值之间的差是  $2 \times (2\pi/L)^2$  的整数倍, 例如占据概率最大的 7 个激发态与基态的能量差分别是  $2 \times (2\pi/L)^2$  的 3, 3, 6, 14, 10, 10, 24 倍, 因此能量单位  $2 \times (2\pi/L)^2$  对应的周期  $3T$  是大部分能级差对应周期的整数倍, (34) 式中的  $e$  指数项在该时间变为 1, 和零时刻相同, 所以关联函数和动量分布等在  $3T$  时最接近初态. 在非强相互作用情况下, 不存在该性质. 无论粒子数多少, 能量单位  $2 \times (2\pi/L)^2$  对应的周期为  $L^2/(4\pi)$ , 补齐约化普朗克常数和粒

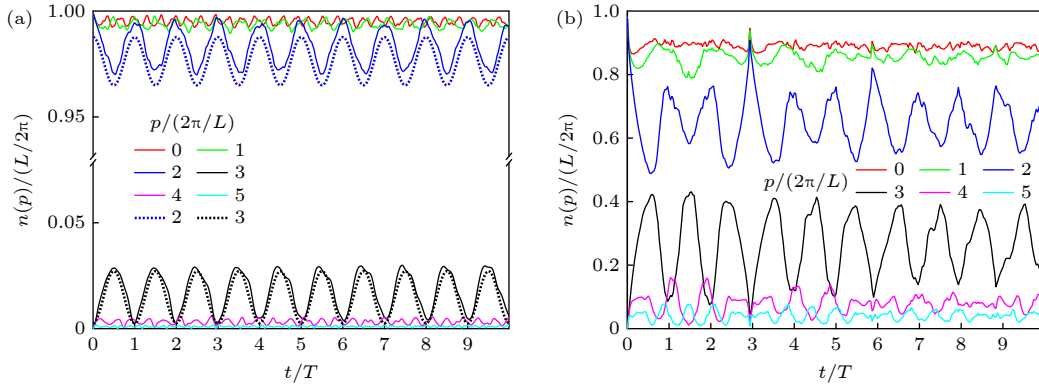


图 4 (a)  $c = 10$  和 (b)  $c = 1000$  动量分布的含时演化. 图 (a) 中的虚线是二能级模型近似的结果

Fig. 4. Evolution of momentum distribution with (a)  $c = 10$  and (b)  $c = 1000$ . The dotted lines in panel (a) is the result from two-level model.

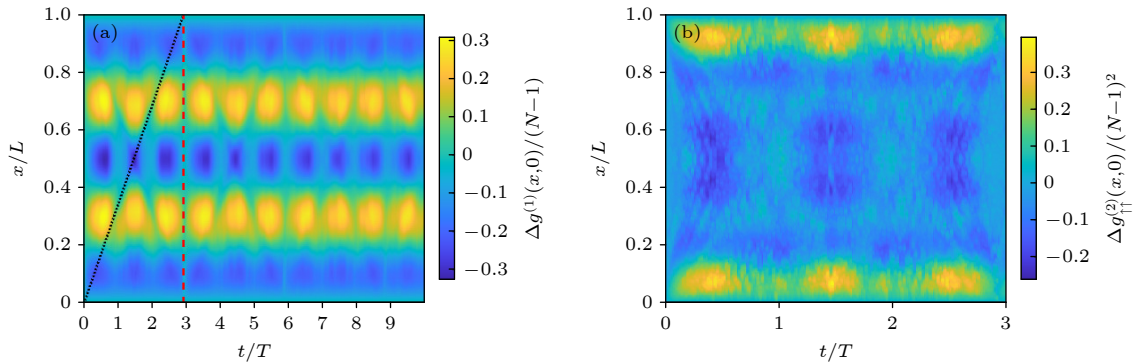


图 5 自旋向上粒子的 (a) 单体关联函数和 (b) 两体关联函数分别与初态对应关联函数的差随时空的变化. (a) 中黑色点线表示粒子以一个比较明显的固定速度的运动轨迹, 红色虚线表示时间主周期 3 倍的位置. 相互作用强度为  $c = 1000$

Fig. 5. Temporal and spatial evolution of (a) single-body correlation function and (b) two-body correlation function minus the corresponding function of initial state between spin-up particles. The black dotted-line in panel (a) is trajectory of the particle moving at relative obvious velocity and red dashed-line is triple position of primary temporal period. The interaction strength is taken as  $c = 1000$ .

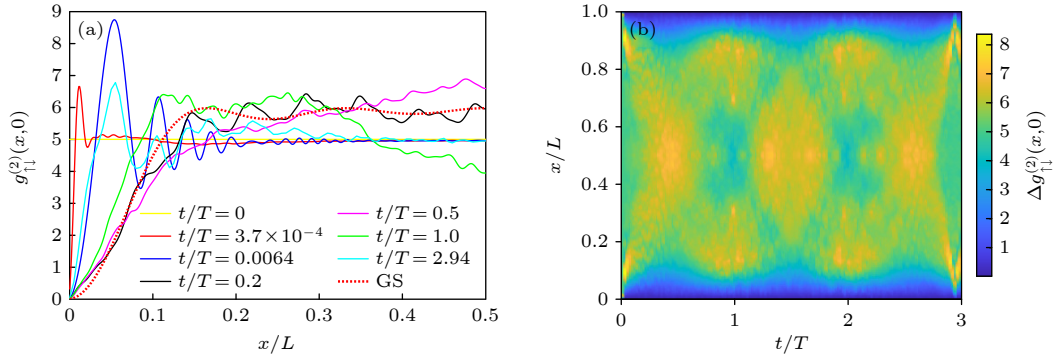

 图 6 三个主周期内不同自旋粒子间的两体关联函数. 相互作用强度为  $c = 1000$ 

Fig. 6. Two-body correlation function between spin-up and spin-down particles in three times primary periods. The interaction strength is taken as  $c = 1000$ .

子质量后, 周期为  $mL^2/(2\pi\hbar)$ . 当粒子数为  $N = 4$  时, 最接近初态的时间为主周期的 4 倍; 当偶数粒子数  $N \geq 6$  时, 最接近初态的时间为主周期的  $N/2$  倍.

图 6 给出了  $c = 1000$  时不同自旋粒子间的两体关联函数. 在  $t = 0$  时刻, 相互作用强度  $c = 0$  对应的任意位置两体关联函数为常数  $N - 1$ . 当时间变为大于零时, 不同自旋粒子的强排斥作用导致  $x = 0$  的关联函数快速接近于零, 同时离  $x = 0$  不远处形成一个峰, 随着时间变大, 峰向远离  $x = 0$  方向传播, 并产生一系列小峰, 例如  $t = 0.0064T$ . 当时间  $t = 0.2T$  时, 两体关联函数不存在明显的大峰, 而是由一系列小峰组成, 整体分布比较靠近基态, 但是峰的数量明显比基态多. 当时间  $t = 0.5T$  时, 两体关联函数在  $x = 0.5L$  附近的值最大, 这是由于波的传播累积以及与对向的波叠加的结果. 在时间  $t = T$  时, 两体关联函数围绕常数  $N - 1$  上下波动, 与初态存在很大的不同, 而在时间  $3T$  附近, 两体关联函数在中间区域非常接近  $N - 1$ , 最接近初态.

## 6 结 论

采用 Bethe ansatz 方法研究了排斥相互作用

下单自旋翻转费米气体的基态性质和相互作用淬火动力学. 对于任意排斥相互作用下基态, 自旋向上粒子的单体关联函数、两体关联函数和动量分布可以写成由简单函数有限项求和的简洁表达式, 可用数值计算快速准确求出. 在淬火动力学的计算方法中, 不同本征态之间关联函数的积分形式被化简成求和形式, 便于数值计算. 费米气体的淬火动力学性质总体上和玻色子的淬火动力学类似. 当相互作用强度从零迅速调到正值后, 保真度、动量分布、关联函数表现出了周期振荡. 由于基态和双重简并态占据概率最大, 因此振荡主周期由基态和双重简并态的能级差决定, 在粒子数较大的情况下随相互作用的变化而变化的范围很小. 在相互作用强度比较小的淬火动力学中, 系统可以用二能级模型近似, 各物理量的振荡周期性好, 振幅小; 在相互作用强度非常大的情况下, 振荡幅度大, 虽然周期性变差, 但是还是存在主周期, 总体偏离初态较大, 但是在时间为  $mL^2/(2\pi\hbar)$  时非常接近初态, 这是因为大部分能量本征值之间的差值几乎是单位能量  $2 \times (2\pi/L)^2$  的整数倍.

感谢中国科学院精密测量科学与技术创新研究院管习文研究员的讨论.

## 附录 A 自旋向上粒子单体关联函数的简洁表示式推导

自旋向上粒子的单体关联函数的积分形式为

$$g_{\uparrow}^{(1)}(x, x') = \frac{N!}{G} N(N-1) \int_0^L dx_2 \cdots \int_0^L dx_N \psi_{\uparrow N}^*(x, x_2, \cdots, x_N) \psi_{\uparrow N}(x', x_2, \cdots, x_N). \quad (\text{A1})$$

将波函数的表达式

$$\psi_{\downarrow N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_P (-1)^P \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \beta_{P_j}(x_N - x_j) \exp(ik_{P_j} x_j) \right\} \alpha_{P_N} \exp(ik_{P_N} x_N) \quad (\text{A2})$$

代入单体关联函数 (A1) 可得

$$g^{(1)}(x, x') = \frac{N!}{G} N(N-1) \sum_{P, Q} (-1)^P (-1)^Q \alpha_{P_N}^* \alpha_{Q_N} \exp(ik_{Q_1} x' - ik_{P_1} x) \int_0^L dx_N \beta_{P_1}^*(x_N - x) \beta_{Q_1}(x_N - x') \exp[i(k_{Q_N} - k_{P_N}) x_N] \\ \times \prod_{j=2}^{N-1} \int_0^L dx_j \beta_{P_j}^*(x_N - x_j) \beta_{Q_j}(x_N - x_j) \exp[i(k_{Q_j} - k_{P_j}) x_j]. \quad (\text{A3})$$

上式连乘中对  $x_j$  的积分项可以积分得到

$$\int_0^L dx_j \beta_{P_j}^*(x_N - x_j) \beta_{Q_j}(x_N - x_j) \exp[i(k_{Q_j} - k_{P_j}) x_j] = F(k_{Q_j} - k_{P_j}) \exp(ik_{P_j} x_N), \quad (\text{A4})$$

其中函数  $F(k) = \frac{1}{ik} [\exp(ikL) - 1]$ . 利用 Bethe ansatz 方程, 该函数可变为

$$F(k_l - k_m) = -\frac{1}{c} \alpha_l \alpha_m^* + \left( L + \frac{1}{c} \alpha_l \alpha_m^* \right) \delta_{lm}. \quad (\text{A5})$$

将 (A4) 式代入关联函数 (A3), 可得

$$g^{(1)}(x, x') = \frac{N!}{G} N(N-1) \sum_P (-1)^P \alpha_{P_N}^* \sum_Q (-1)^Q F_1(k_{P_1}, k_{Q_1}, x, x') \left[ \prod_{j=2}^{N-1} F(k_{Q_j} - k_{P_j}) \right] \alpha_{Q_N} = \sum_P (-1)^P \alpha_{P_N}^* \det(\mathbf{M}), \quad (\text{A6})$$

其中函数  $F_1$  和矩阵  $\mathbf{M}$  分别定义为

$$F_1(k, q, x, x') = \exp(iqx' - ikx) \int_0^L dx_N \exp[-ikL\theta(x_N - x) + iqL\theta(x_N - x') + i(k - q)x_N], \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} F_1(k_{P_1}, k_1, x, x') & F_1(k_{P_1}, k_2, x, x') & \cdots & F_1(k_{P_1}, k_N, x, x') \\ F(k_1 - k_{P_2}) & F(k_2 - k_{P_2}) & \cdots & F(k_N - k_{P_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(k_1 - k_{P_{N-1}}) & F(k_2 - k_{P_{N-1}}) & \cdots & F(k_N - k_{P_{N-1}}) \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \end{pmatrix}.$$

行列式  $\det(\mathbf{M})$  按照第二行展开得

$$\det(\mathbf{M}) = \sum_{m_2=1}^N (-1)^{2+m_2} F(k_1 - k_{P_2}) \det(\mathbf{M}_2^{m_2}), \quad (\text{A7})$$

其中  $\mathbf{M}_2^{m_2}$  是矩阵  $\mathbf{M}$  去掉第二行和第  $m_2$  列, 剩余行和列按照原来的顺序组成的矩阵. 利用表达式 (A5) 可得

$$\det(\mathbf{M}) = -\frac{1}{c} \alpha_{P_2}^* \sum_{m_2=1}^N (-1)^{2+m_2} \alpha_{m_2} \det(\mathbf{M}_2^{m_2}) + (-1)^{P_2} \left( L + \frac{1}{c} |\alpha_{P_2}|^2 \right) \det(\mathbf{M}_2^{P_2}). \quad (\text{A8})$$

根据存在两行完全相同的矩阵对应的行列式为零, 得上式中第一项为零, 所以

$$\det(\mathbf{M}) = (-1)^{P_2} \left( L + \frac{1}{c} |\alpha_{P_2}|^2 \right) \det(\mathbf{M}_2^{P_2}). \quad (\text{A9})$$

接着把  $\det(\mathbf{M}_2^{m_2})$  按照第二行展开, 做同样的计算, 消掉对角项, 以此计算, 最后可得

$$\det(\mathbf{M}) = (-1)^P (-1)^{P_1 P_N} \prod_{l=2}^{N-1} \left( L + \frac{1}{c} |\alpha_{P_l}|^2 \right) \det(\varphi_{ij}), \quad (\text{A10})$$

其中

$$\varphi_{ij} = \begin{pmatrix} F_1(k_{P_1}, k_i, x, x') & F_1(k_{P_1}, k_j, x, x') \\ \alpha_i & \alpha_j \end{pmatrix},$$

$i, j \neq P_2, \neq P_3, \dots, \neq P_{N-1}$ , 且  $i < j$ . 将 (A10) 代入 (A6) 化简可得

$$g^{(1)}(x, x') = \frac{(N!)^2}{G} \prod_{s=1}^N \left( L + \frac{1}{c} |\alpha_s|^2 \right) \sum_{i, j=1(i \neq j)}^N \frac{F_1(k_i, k_i, x, x') |\alpha_j|^2 - F_1(k_i, k_j, x, x') \alpha_i \alpha_j^*}{\left( L + \frac{1}{c} |\alpha_i|^2 \right) \left( L + \frac{1}{c} |\alpha_j|^2 \right)}.$$

## 参考文献

- [1] Gring M, Kuhnert M, Langen T, Kitagawa T, Rauer B, Schreitl M, Mazets I, Smith D A, Demler E, Schmiedmayer G 2012 *Science* **337** 1318
- [2] Kaufman A M, Tai M E, Lukin A, Rispoli M, Schittko R, Preiss P M, Greiner M 2016 *Science* **353** 794
- [3] Mitra A 2018 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **9** 245
- [4] Gouraud G, Doussal P L, Schehr G 2022 *J. Phys. A: Math. Theor.* **55** 395001
- [5] Wang H, He X Y, Li S, Liu B 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 100309 (in Chinese) [王欢, 贺夏瑶, 李帅, 刘博 2023 物理学报 **72** 100309]
- [6] Haller E, Gustavsson M, Mark M J, Danzl J G, Hart R, Pupillo G, Nägerl H-C 2009 *Science* **325** 1224
- [7] Du R, Xing J C, Xiong B, Zheng J H, Yang Tao 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 070304
- [8] Erne S, Bücker R, Gasenzer T, Berges J, Schmiedmayer J 2018 *Nature* **563** 225
- [9] Chen J, Mistakidis S I, Schmelcher P 2023 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **56** 075003
- [10] Zhang Z, Jiang Y, Lin H, Guan X 2023 arXiv: 2307.05955 v1 [cond-mat.quant-gas]
- [11] Le Y, Zhang Y, Gopalakrishnan S, Rigol M, Weiss D S 2023 *Nature* **618** 494
- [12] Amico L, Boshier M, Birkel G, et al. 2021 *AVS Quantum Sci.* **3** 039201
- [13] Pereira D, Mueller E J 2022 *Phys. Rev. A* **106** 043306
- [14] Tylutki M, Astrakharchik G E, Recati A 2017 *Phys. Rev. A* **96** 063603
- [15] Dolgirev P E, Qu Y F, Zvonarev M B, Shi T, Demler E 2021 *Phys. Rev. X* **11** 041015
- [16] Carleo G, Cevolani L, Sanchez-Palencia L, Holzmann M 2017 *Phys. Rev. X* **7** 031026
- [17] Cao L, Krönke S, Vendrell O, Schmelcher 2013 *J. Chem. Phys.* **139** 134103
- [18] Nardis J D, Wouters B, Brockmann M, Caux J S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 033601
- [19] Zill J C, Wright T M, Kheruntsyan K V, Gasenzer T, Davis M J 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023611
- [20] Liu W, Andrei N 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 257204
- [21] Rylands C, Bertini B, Calabrese P 2022 *J. Stat. Mech.* **2022** 103103
- [22] Lieb E H, Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605
- [23] Chen S, Guan L, Yin X, Hao Y, Guan X W 2010 *Phys. Rev. A* **81** 031609(R)
- [24] Chen H H 2020 *Phys. Lett. B* **808** 135631
- [25] Zill J C, Wright T M, Kheruntsyan K V, Gasenzer T, Davis M J 2016 *New J. Phys.* **18** 045010
- [26] Piroli L, Calabrese P, Essler F H L 2016 *SciPost Phys.* **1** 001
- [27] Zill J C, Wright T M, Kheruntsyan K V, Gasenzer T, Davis M J 2018 *SciPost Phys.* **4** 011
- [28] Piroli L, Calabrese P 2017 *Phys. Rev. A* **96** 023611
- [29] Collura M, Kormos M, Calabrese P, 2018 *Phys. Rev. A* **97** 033609
- [30] Alba V, Calabrese P 2018 *SciPost Phys.* **4** 017
- [31] Robinson N J, Klerk A J J M, Caux J S 2021 *SciPost Phys.* **11** 104
- [32] Guan X W, Batchelor M T, Lee C 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1633
- [33] McGuire J B 1965 *J. Math. Phys.* **6** 432
- [34] McGuire J B 1965 *J. Math. Phys.* **7** 123
- [35] Guan X W 2012 *Front. Phys.* **7** 8
- [36] Mao R, Guan X, Wu B 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043645
- [37] Zhang R, Yin X, Chen L, Zhang Y 2019 *J. Shanxi Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **42** 2347 (in Chinese) [张瑞江, 尹相国, 陈立, 张云波 2019 山西大学学报(自然科学版) **42** 2347]
- [38] Chang M, Yin X, Chen L, Zhang Y 2023 *Phys. Rev. A* **107** 053312
- [39] Song Y, Cai X 2018 *Chin. Phys. Lett.* **35** 110301
- [40] Song Y, Zhang H 2019 *Eur. Phys. J. D* **73** 106
- [41] Song Y, Barthwal S 2019 *Commun. Theor. Phys.* **71** 617
- [42] Li W, Cui X 2017 *Phys. Rev. A* **96** 053609
- [43] Gamayun O, Lychkovskiy O, Zvonarev M B 2020 *SciPost Phys.* **8** 053
- [44] Gamayun O, Pronko A G, Zvonarev M B 2016 *New J. Phys.* **18** 045005

# Properties of ground state and quench dynamics of one-dimensional contact repulsive single-spin flipped Fermi gases\*

Yin Xiang-Guo<sup>1)†</sup> Yu Hai-Ru<sup>1)</sup> Hao Ya-Jiang<sup>2)</sup> Zhang Yun-Bo<sup>3)</sup>

1) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Institute of Theoretical Physics, Department of Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China*)

3) (*Key Laboratory of Optical Field Manipulation of Zhejiang Province, Department of Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

( Received 4 September 2023; revised manuscript received 24 September 2023 )

## Abstract

Based on the exact solution method, the ground state and quench dynamics properties of one-dimensional single-spin flipped Fermi gas with repulsion interaction are studied. With the Bethe wave function, the single-body correlation function and two-body correlation function of the ground state and those between different eigen-states can be reduced into a summation of simple functions, thereby greatly reducing the computational difficulty. For the system in the ground state, the single-body correlation functions and two-body correlation functions as well as momentum distributions for spin-up particles are investigated in real space with different interaction strengths. As the interaction strength increases, the number of nodes in the single-body correlation function remains unchanged, while the amplitude of oscillation decreases. Meanwhile, the number of peaks in the two-body correlation function increases by one due to interaction, indicating that the spin-down particle behaves as a spin-up particle. The momentum distribution becomes more smooth around Fermi surface with the interaction strength increasing. The interaction quench dynamics is investigated. The system is prepared in the ground state of ideal Fermi gas, and then the interaction strength is quenched to a finite positive value. The system evolves under time-dependent Schrödinger equation. The overlap between the initial state and eigen-state of post-quench interaction strength is expressed in the form of continued multiplication. The square of the modulus of this overlap, which represents the occupation probability, is calculated. We find that the occupation probabilities of the ground state and doubly degenerated excited state always have the first and the second largest value for an arbitrary interaction strength, respectively, which means that the difference in eigenenergy between these two states gives the primary period of oscillation. For relatively large particle number ( $N \geq 10$ ), the primary period always does not change under different interaction strengths. It is found that in the case of interaction quenching, the momentum distribution and the correlation function show periodic oscillations. When the interaction strength is adjusted to a relatively small value, the oscillation periodicity is well-defined and the oscillation amplitude is small. The system can be approximated by a two-level model. When the interaction strength increases to a very large value, the oscillation periodicity worsens and the amplitude increases, but a primary period remains unchanged. Although the overall deviation is far from the initial state, it is very close to the initial state at time  $t = mL^2/(2\pi\hbar)$ . This is because the difference between most energy eigenvalues is almost an integral multiple of energy unit  $2 \times (2\pi/L)^2$ .

**Keywords:** one-dimensional Fermi gas, momentum distribution, correlation function, quench dynamics

**PACS:** 03.75.Ss, 67.85.Lm, 05.30.Fk

**DOI:** [10.7498/aps.73.20231425](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231425)

\* Project supported by the Research Foundation for Basic Research of Shanxi Province, China (Grant No. 202103021224033), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11704233, 12074340), and the Science Foundation of Zhejiang Sci-Tech University, China (Grant No. 20062098-Y).

† Corresponding author. E-mail: [yinxianguo@sxu.edu.cn](mailto:yinxianguo@sxu.edu.cn)

一维接触排斥相互作用单自旋翻转费米气体的基态和淬火动力学性质

尹相国 于海如 郝亚江 张云波

**Properties of ground state and quench dynamics of one-dimensional contact repulsive single-spin flipped Fermi gases**

Yin Xiang-Guo Yu Hai-Ru Hao Ya-Jiang Zhang Yun-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 020302 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231425

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231425>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

淬火动力学中的拓扑不变量

Topological invariant in quench dynamics

物理学报. 2019, 68(22): 220304 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191410>

动力学淬火过程中的不动点及衍生拓扑现象

Fixed points and dynamic topological phenomena in quench dynamics

物理学报. 2019, 68(4): 040303 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181928>

格点量子色动力学蒸馏算法中关联函数的计算优化

Calculation and optimization of correlation function in distillation method of lattice quantum chromodynamics

物理学报. 2021, 70(16): 161201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210030>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

光学微腔中一维费米气的磁性关联特性

Magnetic properties of one-dimensional Fermi gases in an optical cavity

物理学报. 2019, 68(4): 043702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181954>

一维晶格中全同任意子的量子动力学与关联

Quantum dynamics and correlations of indistinguishable anyons in one-dimensional lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220188>