

# 基于格子 Boltzmann 方法的钉扎螺旋波 反馈控制\*

赖瑶瑶<sup>1)2)3)</sup> 陈鑫梦<sup>1)2)3)</sup> 柴振华<sup>1)2)3)</sup> 施保昌<sup>1)2)3)†</sup>

1) (华中科技大学数学与统计学院, 武汉 430074)

2) (华中科技大学, 工程建模与科学计算湖北重点实验室, 武汉 430074)

3) (华中科技大学, 数学与应用学科交叉创新研究院, 武汉 430074)

(2023 年 9 月 22 日收到; 2023 年 10 月 20 日收到修改稿)

螺旋波是心室跳动过速和纤维性颤动的根源, 钉扎螺旋波相对于自由螺旋波来说更难消除. 本文采用格子 Boltzmann 方法求解, 以 FitzHugh-Nagumo 模型为对象, 研究了使用反馈控制法消除钉扎螺旋波. 数值结果表明, 无论钉扎螺旋波钉在圆形障碍物还是矩形障碍物上, 反馈控制法对其都具有很好的控制作用. 此外, 通过数值模拟系统研究了可激性系数、反馈控制信号幅度、记录反馈信号时间和障碍物的大小对钉扎螺旋波的控制情况. 研究表明, 钉扎螺旋波消除有三种情况. 首先, 反馈控制信号幅度和可激性系数与钉扎螺旋波消除所需的时间有关, 反馈控制信号幅度越大或可激性系数越小, 钉扎螺旋波消除越快. 其次, 障碍物大小和可激性系数影响着能成功消除钉扎螺旋波下记录反馈信号时间与加入反馈控制时间之间对应的时间间隔. 最后, 在保持加入反馈控制时间不变的情况下, 记录反馈信号时间影响着能成功消除钉扎螺旋波所需的最小反馈控制信号幅度.

**关键词:** 反馈控制法, 钉扎螺旋波, FitzHugh-Nagumo 模型, 格子 Boltzmann 方法

**PACS:** 05.45.-a, 47.11.Qr, 82.40.Ck

**DOI:** 10.7498/aps.73.20231549

## 1 引言

在许多非线性反应扩散系统的斑图中, 螺旋波动力系统一直受到广泛关注. 螺旋波广泛存在于自然界中, 例如 Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反应<sup>[1]</sup>、催化表面过程<sup>[2]</sup>和心脏系统<sup>[3]</sup>等. 其中, BZ 反应是最早发现螺旋波现象的自然反应系统, 对 BZ 反应中螺旋波的研究最早开始于 20 世纪 70 年代<sup>[4]</sup>. 在心脏系统中, 螺旋电波与心动过速和危及生命的纤颤有关, 它的存在会危及人体生命<sup>[5]</sup>. 然而, 如果心脏中存在缺陷区域, 螺旋波可能会被钉住, 其核心将停留在缺陷区域, 使它们停留的时间更长<sup>[6,7]</sup>.

当自由螺旋波固定在缺陷上时, 就产生了所谓的钉扎螺旋波, 从而导致一类生理性心律失常. 因此, 寻求有效的钉扎螺旋波控制方法是十分重要的. 对于钉扎螺旋波, 许多控制方法被研究人员提出. 例如 Fu 等<sup>[8]</sup>通过外部局部刺激产生靶波, 然后靶波与钉住的螺旋波相互作用来消除钉扎螺旋波. Ponboonjaroenchai 等<sup>[9]</sup>提出了在给定位置进行周期性刺激产生波列控制钉扎螺旋波, 研究了波列在大小和方向不同的不可激矩形障碍物上螺旋波的终止问题. Chen 等<sup>[10]</sup>研究了同步复极化能有效消除螺旋波和时空混沌. Yuan 等<sup>[11]</sup>通过边界附近的周期性扰动方法成功地解除和消除钉扎螺旋波, 并且该方法对于大障碍物同样适用.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12072127, 51836003) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shibc@hust.edu.cn

反馈法是一种控制自由螺旋波的经典方法,它具有持续时间短和反馈信号弱的优点. Yuan 等<sup>[12]</sup>利用全局反馈法消除了螺旋波和时空混沌. 2017 年, Hou 等<sup>[13]</sup>利用局部反馈法对螺旋波进行了控制,并且研究了反馈控制区域和位置等参数的影响. 但是, 现有的研究都是利用反馈法对自由螺旋波进行控制, 还没有利用此方法研究钉扎螺旋波的消除. 基于反馈法的优势, 本文使用反馈法对钉扎螺旋波进行控制. 此外, 还从反馈控制信号幅度、可激性系数、障碍物的形状及大小等方面研究了反馈控制法对消除钉扎螺旋波的影响.

螺旋波的控制方程主要是反应扩散系统, 学者们通常使用有限差分法研究螺旋波动力学. 格子 Boltzmann 方法 (LBM) 是一种介观数值方法, 广泛应用于求解线性及非线性偏微分方程<sup>[14,15]</sup>. 它具有算法简单有效、计算并行、复杂边界容易处理等优点<sup>[16]</sup>. 本文使用格子 Boltzmann 方法对 Fitz-Hugh-Nagumo (FHN) 模型下的钉扎螺旋波进行模拟, 结合反馈法对钉扎螺旋波进行控制.

本文的结构如下: 第 2 节对基于 FHN 的反馈法模型进行格子 Boltzmann 建模; 第 3 节分析模拟结果, 首先研究圆形障碍和矩形障碍下钉扎螺旋波的控制情况, 然后以圆形障碍物为例分别对各参数进行研究; 第 4 节对全文总结.

## 2 模型

### 2.1 反馈法的格子 Boltzmann 建模

FHN 模型是一种简单的双变量形式. 它是对 Hodgkin-Huxley 模型的简化修正<sup>[17]</sup>. 近年来, FHN 方程已成为反应扩散系统中一种广泛应用的模型, 通常用于模拟可激介质中的传播, FHN 模型也被用于模拟神经纤维和心脏组织以及化学反应中<sup>[18,19]</sup>. 此外, 它还可用于生物学、化学、传热传质等方面的研究<sup>[20]</sup>. FHN 模型的混沌性和同步性在激光技术、医学和保密通信等领域具有潜在的应用价值<sup>[21]</sup>. 因此, 研究 FHN 模型的动力学特性在实际应用中具有重要意义. FHN 模型的形式如下<sup>[11]</sup>:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} [-v - u(u-a)(u-1)], \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v + bu, \quad (2)$$

其中,  $a$  和  $b$  为无量纲常数, 本文固定  $a = 0.03$  和

$b = 2.0$ ;  $u$  为激活变量,  $v$  为抑制变量;  $\varepsilon$  为可激性系数;  $\alpha$  为扩散系数.

为了使用反馈法控制钉扎螺旋波, 在 (1) 式的右侧加入反馈控制项<sup>[13]</sup>:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u + \frac{1}{\varepsilon} [-v - u(u-a)(u-1)] + \frac{k_{\text{fb}}}{\varepsilon} I_{\text{feedback}}, \quad (3)$$

其中,  $k_{\text{fb}}$  为反馈控制的幅度;  $I_{\text{feedback}}$  为反馈控制项, 其具体形式为

$$I_{\text{feedback}} = \begin{cases} u(x, y, t_0), & t_1 < t < t_2, (x, y) \in D, \\ 0, & \text{others.} \end{cases} \quad (4)$$

这里,  $D$  为控制的区域,  $t_0$  为记录反馈信号的时间,  $t_1$  为加入反馈控制的时间,  $t_2$  为反馈控制结束的时间, 即反馈控制持续的时间为  $t_1 - t_2$ .

针对方程 (3), 可建立 LBM 的演化方程<sup>[15]</sup>:

$$\begin{aligned} & h_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) \\ &= h_i(x, t) - \frac{1}{\tau} [h_i(x, t) - h_i^{\text{eq}}(x, t)] \\ & \quad + \Delta t G_i(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t G_i(x, t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $h_i(x, t)$  表示在位置  $x$  及时间  $t$  处具有离散速度  $c_i$  的粒子分布函数,  $\tau$  表示松弛时间,  $h_i^{\text{eq}}(x, t)$  表示分布函数  $h_i(x, t)$  的平衡态分布函数,  $G_i(x, t)$  为源项分布函数.

通过直接泰勒展开<sup>[16]</sup>, 格子 Boltzmann 方法可将演化方程恢复成方程 (3), 具体的恢复过程可以查看附录 A.

平衡态分布函数  $h_i^{\text{eq}}(x, t)$  可以被定义为

$$h_i^{\text{eq}}(x, t) = \omega_i u(x, t), \quad (6)$$

其中,  $\omega_i$  为权系数, 满足  $\sum \omega_i = 1$ .

源项为

$$G_i(x, t) = \omega_i \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} [v + u(u-a)(u-1)] + \frac{k_{\text{fb}}}{\varepsilon} I_{\text{feedback}} \right\}. \quad (7)$$

宏观量  $u(x, t)$  为

$$u(x, t) = \sum_i h_i(x, t). \quad (8)$$

对于方程 (2), 该方程没有扩散项, 则通过有限差分法进行求解:

$$v(x, t + \Delta t) = v(x, t) + \Delta t(-v + bu). \quad (9)$$

## 2.2 边界条件

以二维螺旋波为例, 研究反馈法对钉扎螺旋波的控制. 采用 D2Q9 速度模型, 速度及权重  $\omega_i$  大小如下:

$$\begin{aligned} & \{c_i, i = 0 : 8\} \\ & = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$c_s^2 = c^2/3, \omega_0 = 4/9, \omega_{1-4} = 4/9, \omega_{5-8} = 1/36, \quad (11)$$

其中, 粒子速度  $c = \Delta x/\Delta t$ ,  $\Delta x$  为空间步长.

边界的处理在数值模拟中至关重要, 对采用无流边界处理的螺旋波进行研究, 无流边界格式:

$$\mathbf{n} \cdot \alpha \nabla u = 0. \quad (12)$$

在使用格子 Boltzmann 方法模拟螺旋波中, 采用反弹格式对该宏观边界条件进行处理. 反弹格式是一种启发式格子 Boltzmann 方法的边界处理格式 [22], 包括标准反弹格式、半反弹格式和修正反弹格式. 反弹格式通常被用来处理静止无滑移边界, 其原理为粒子与边界碰撞后沿原路返回, 具有过程简单、容易编程实现的优点. 本文采用标准反弹格式进行边界处理, 边界上的分布函数可表示为

$$h_{i^-}(x_b, t) = h_i^*(x_f, t), \quad (13)$$

其中,  $x_b$  为边界格点,  $x_f$  为系统内部格点,  $h_i^*$  为碰撞后的分布函数,  $i^-$  为  $i$  的相反方向.

## 2.3 模型验证

首先, 对网格无关性进行验证. 物理边界长度为  $L_x = L_y = 40$ , 选取参数  $\varepsilon = 0.004$ ,  $\alpha = 1.0$ . 分别选取  $800 \times 800$ ,  $1200 \times 1200$  和  $1600 \times 1600$  三种网格对模型形成自由螺旋波的过程进行模拟. 该过程保持松弛时间  $\tau$  不变, 选取时间步长为  $\Delta t = 1/1800$ . 图 1(a) 给出了在  $t = 15$  时,  $800 \times 800$ ,  $1200 \times 1200$  和  $1600 \times 1600$  网格的计算情况. 其中, 蓝色虚线表示  $800 \times 800$  网格下  $u = 0.5$  的等值线图, 红色虚线表示  $1200 \times 1200$  网格下  $u = 0.5$  的等值线图, 蓝色实线表示  $1600 \times 1600$  网格下  $u = 0.5$  的等值线图. 由图可以看出, 与网格  $800 \times 800$  相比,  $1200 \times 1200$  和  $1600 \times 1600$  网格误差较小, 且在波头位置几乎重合. 图 1(b) 描绘了在  $y = 15$  时,

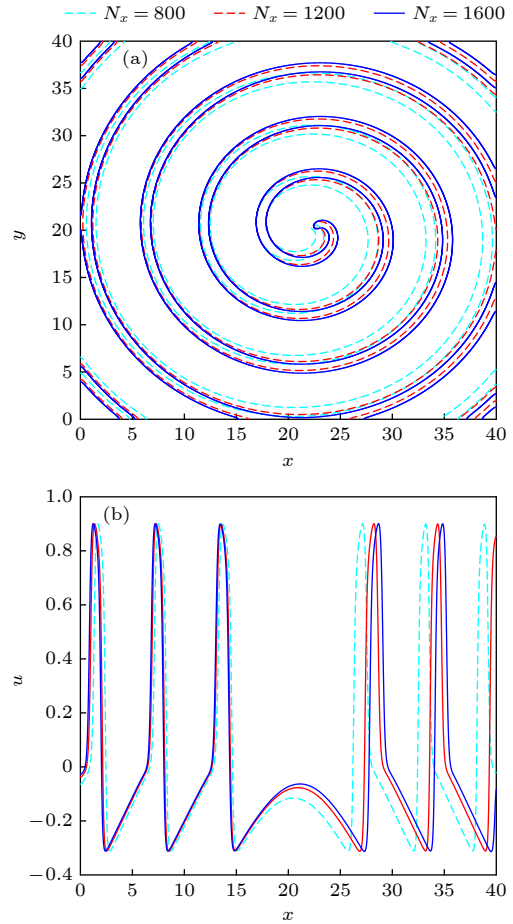


图 1 (a)  $t = 15$  时,  $u = 0.5$  的等值线情况; (b)  $t = 15$  时,  $y = 15$  处  $u$  值情况

Fig. 1. (a) Contour case for  $u = 0.5$  at  $t = 15$ ; (b) value of  $u$  for  $y = 15$  at  $t = 15$ .

在网格  $800 \times 800$ ,  $1200 \times 1200$  和  $1600 \times 1600$  下  $u$  的变化情况. 蓝色虚线、红色实线和蓝色实线分别表示  $800 \times 800$  网格、 $1200 \times 1200$  网格和  $1600 \times 1600$  网格下  $u$  值情况. 由图 1(b) 可以看出  $1200 \times 1200$  和  $1600 \times 1600$  网格结果存在一定差异, 但差异较小.

为了进一步验证网格的无关性, 设定物理边界长度  $L_x = L_y = 40$ , 其他参数  $\varepsilon = 0.004$ ,  $\alpha = 1.0$ . 计算了  $1200 \times 1200$  网格和  $1600 \times 1600$  网格下, 不同半径下钉扎螺旋波的波长情况. 并根据波长情况计算出相对误差, 如表 1 所列. 相对误差的计算公式如下:

$$E(u) = \frac{\sqrt{\sum |\lambda - \lambda'|^2}}{\sqrt{\sum |\lambda'|^2}}, \quad (14)$$

其中,  $\lambda$  表示  $1200 \times 1200$  网格下的波长数据,  $\lambda'$  表示  $1600 \times 1600$  网格下的波长数据.

表 1 不同半径下钉扎螺旋波的波长及相对误差 (1200×1200 网格和 1600×1600 网格下)

Table 1. Wavelengths and relative errors of pinned spiral waves at different radius (under 1200×1200 grids and 1600×1600 grids).

半径	3	4	5	6	7	8	9	10
1200×1200网格下的波长	5.031	5.552	6.055	6.575	7.602	8.275	8.871	9.451
1600×1600网格下的波长	5.041	5.582	6.071	6.602	7.633	8.345	8.912	9.502
相对误差	0.0020	0.0054	0.0026	0.0041	0.0041	0.0081	0.0046	0.0047

从表 1 的数据可知, 在 1200×1200 网格和 1600×1600 网格下, 半径不同钉扎螺旋波的相对误差均为  $10^{-3}$  量级. 因此, 为了提高计算效率并验证格子 Boltzmann 方法的准确性, 选取 1200×1200 网格进行后续钉扎螺旋波的模拟. 下面讨论圆形障碍物下钉扎螺旋波的周期随障碍物半径的变化情况. 设定物理边界长度为  $L_x = L_y = 40$ , 选取参数  $\varepsilon = 0.004$ ,  $\alpha = 1.0$ , 模拟结果如图 2 所示. 可以看出, 随着圆形障碍物半径的增加, 钉扎螺旋波的周期也随之增加. 与文献 [11] 中的结果进行对比, 符合较好.

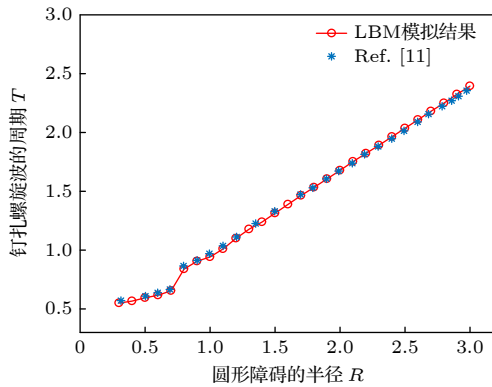


图 2 与文献 [11] 对比, 钉扎螺旋波的周期随圆形障碍物半径的变化

Fig. 2. Compared with Ref. [11], the period of the pinned spiral wave varies with the radius of the circular obstacle.

### 3 模拟结果分析

#### 3.1 全局反馈控制

使用含反馈控制项的模型, 对顺时针旋转的钉扎螺旋波进行控制. 采用半径为 20 的圆形边界情况进行讨论, 边界条件采用无流边界. 选取参数  $\varepsilon = 0.004$ ,  $\alpha = 1.0$ . 空间步长为  $\Delta x = \Delta y = 1/30$ , 选取时间步长为  $\Delta t = 1/1800$ . 圆形障碍物的中心位置为 (20, 20), 障碍物半径大小为  $R = 2.0$ , 控制的区域  $D$  选取为整个系统.

先使钉扎螺旋波在圆形边界系统内顺时针周期旋转至少 5 次. 为了方便描述, 以下时间  $t$  均为时间步数. 图 3(a) 描述了点 (4, 20) 处在加入反馈控制前不同时间步  $t$  下  $u$  的变化值, 图 3(b) 描述了该点下  $u$  和  $v$  的关系. 从图中可以看出, 钉扎螺旋波在半径为 2.0 的圆形障碍物上进行周期运动, 且通过  $u$  的最大值计算出此时钉扎螺旋波的周期为  $T = 3020$ . 根据钉扎螺旋波的周期, 选定记录反馈信号时间  $t_0$  与加入反馈控制时间  $t_1$  之间时间间隔为  $T/6$  ( $t_1 - t_0 = T/6$ ). 如果反馈信号注入易损期的某点, 该点处反馈信号会被激发. 如果反馈信号注入绝对不应期的某点, 该点处反馈信号不会被激发 [12]. 故选取记录反馈信号时间为  $t_0 = 19497$ , 加入反馈控制时间为  $t_1 = 20001$ , 反馈控制结束时间为  $t_2 = 20090$ .

图 4 给出了  $k_{fb} = 0.5$  下, 使用 LBM 模拟圆形障碍物下钉扎螺旋波的控制情况. 首先, 钉扎螺旋波  $S_1$  在系统内顺时针旋转, 如图 4(a) 所示.  $t = 20001$  时间步时加入反馈控制, 如图 4(b) 所示. 由于系统内部分点处于易损期, 会使系统内激发形成第二个钉扎螺旋波  $S_2$ , 且  $S_2$  的波宽会经历逐渐增大后减小的过程, 如图 4(c)–(f) 所示. 随后, 钉扎螺旋波  $S_1$  顺时针旋转, 而钉扎螺旋波  $S_2$  逆时针旋转. 当两个波阵面相遇时, 根据激发态波的特性, 激发态会碰撞消失, 没有进行湮灭的残余部分形成激发态  $S_3$ , 如图 4(g)–(j) 所示. 此时, 系统内没有点缺陷行为, 不会形成新的螺旋波. 当  $S_3$  被逐出系统时, 系统恢复静息态, 如图 4(k)–(l) 所示.

为了更加方便地描述反馈法对钉扎螺旋波的控制效果及控制时间, 采用以下形式来描述系统的行为:

$$u_{\text{all}} = \frac{1}{N_x \times N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |u(x_i, y_j)|, \quad (15)$$

其中,  $u(x, y)$  为系统内全局的快变量  $u$  的值. 当  $u_{\text{all}} \leq 10^{-4}$  时, 认为系统恢复了静息状态.

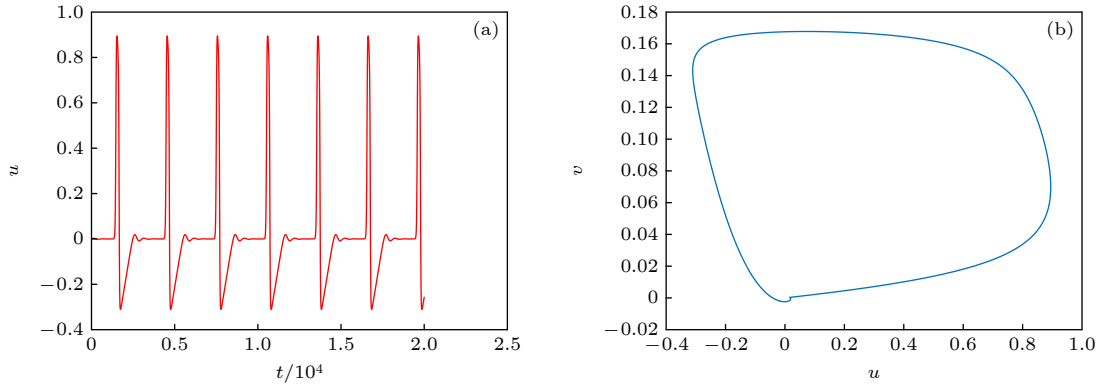


图 3 在点 (4, 20) 处  $u$  和  $v$  的值 (a)  $u$  与时间步  $t$  的关系; (b)  $u$  和  $v$  的相图

Fig. 3. Values of  $u$  and  $v$  at the point (4, 20): (a) Relationship between  $u$  and the time step  $t$ ; (b) phase diagram of  $u$  and  $v$ .

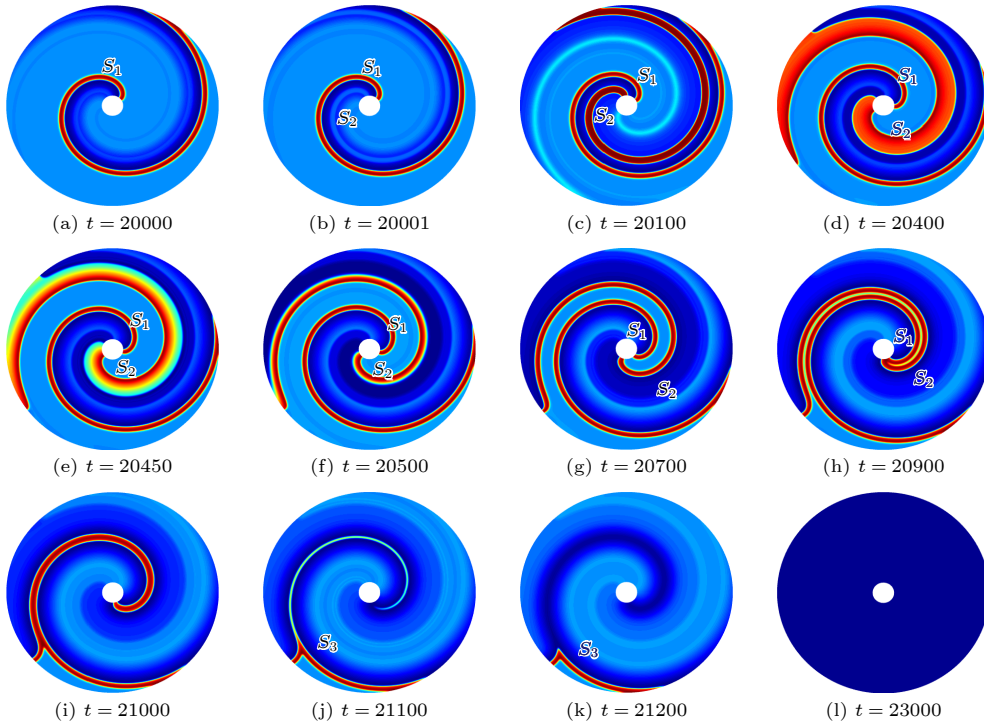


图 4 利用反馈法控制圆形障碍物下钉扎螺旋波的情况

Fig. 4. Suppression of a pinned spiral wave under a circular obstacle by feedback control approach.

图 5 给出了上述圆形障碍物下钉扎螺旋波控制过程中  $u_{\text{all}}$  的变化情况, 从加入反馈控制时间  $t_1$  开始记录  $u_{\text{all}}$ . 从  $u_{\text{all}}$  的变化过程可以看出,  $u_{\text{all}}$  的第一个小高峰值为控制结束时间  $t_2$ ,  $u_{\text{all}}$  的第二个高峰值为钉扎螺旋波  $S_2$  的波宽达到最宽时的状态. 注入反馈信号的 1100 个时间单位后, 此时  $u_{\text{all}} \leq 10^{-4}$ , 系统内的钉扎螺旋波被完全消除, 小于一个激发态周期.

接下来, 为了讨论反馈控制法下障碍物形状的无关性, 考虑矩形障碍物下钉扎螺旋波的控制情况. 采用半径为 20 的圆形边界情况进行讨论,

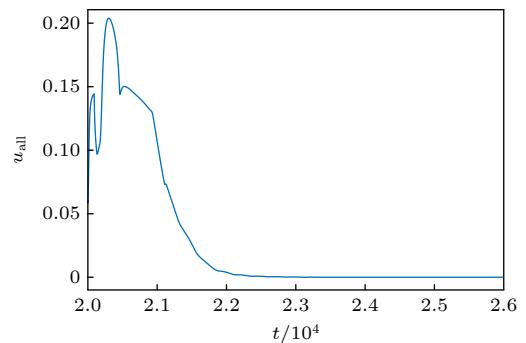


图 5  $\varepsilon = 0.004$ ,  $R = 20$ ,  $k_{\text{fb}} = 0.5$  下反馈法控制钉扎螺旋波过程中  $u_{\text{all}}$  的变化值

Fig. 5. Change of  $u_{\text{all}}$  of unpinning spiral waves with  $\varepsilon = 0.004$ ,  $R = 20$ ,  $k_{\text{fb}} = 0.5$ .

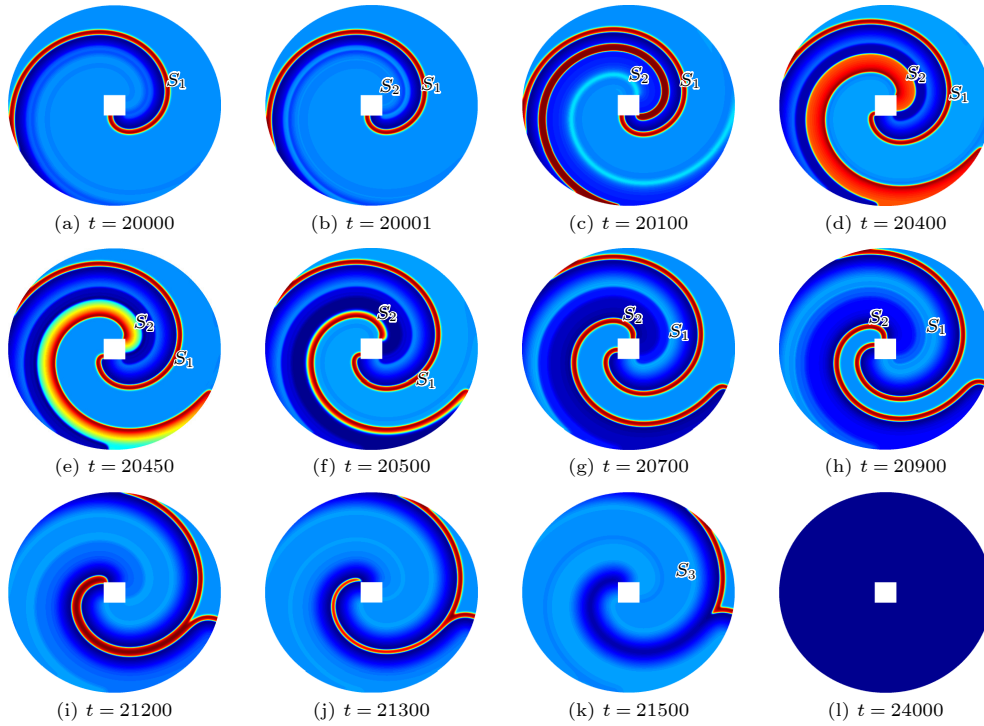


图 6 利用反馈法控制正方形障碍物下钉扎螺旋波的情况

Fig. 6. Suppression of a pinned spiral wave under a square obstacle by feedback control approach.

边界条件采用无流边界. 选取参数  $\varepsilon = 0.004$ ,  $\alpha = 1.0$ . 空间步长为  $\Delta x = \Delta y = 1/30$ . 选取时间步长为  $\Delta t = 1/1800$ . 正方形障碍物的中心位置为  $(20, 20)$ , 障碍物边长为  $L = 4.0$ . 由数值模拟可知, 钉扎螺旋波在正方形障碍物边长为 4.0 时的周期为  $T = 3621$ , 则选定  $t_0$  与  $t_1$  之间时间间隔约为  $T/6$ . 因此, 选取  $t_0 = 19397$ ,  $t_1 = 20001$ ,  $t_2 = 20090$ .

图 6 给出了  $k_{fb} = 0.5$  时, 使用 LBM 模拟正方形障碍物下钉扎螺旋波的控制情况, 可以发现方形障碍物下利用反馈法控制钉扎螺旋波的情况跟圆形障碍物下的控制情况类似. 钉扎螺旋波  $S_1$  在系统内绕着正方形障碍物顺时针旋转, 加入反馈控制后, 系统内形成第二个钉扎螺旋波  $S_1$ , 见图 6(a), (b). 钉扎螺旋波  $S_2$  会被系统激发成可激状态, 其波宽逐渐增大后减小, 如图 6(c)—(f) 所示. 随后, 钉扎螺旋波  $S_2$  绕着正方形障碍物顺时针旋转, 而钉扎螺旋波  $S_1$  绕着正方形障碍物逆时针旋转, 直到两者相遇形成激发态  $S_3$ , 如图 6(g)—(j) 所示. 随着  $S_3$  被逐出系统, 系统恢复静息态, 见图 6(k)—(l).

### 3.2 参数对钉扎螺旋波控制的影响

本节以圆形障碍物为例, 考虑控制系统中各参数对钉扎螺旋波控制的影响. 从 (3) 式可以看出,

反馈控制的幅度  $k_{fb}$ 、可激性系数  $\varepsilon$  和记录反馈信号时间  $t_0$  对反馈控制有影响. 此外, 还将讨论障碍物大小对钉扎螺旋波控制的影响.

#### 3.2.1 反馈控制的幅度 $k_{fb}$

$k_{fb}$  的大小是反馈控制的关键因素, 其取值一般介于 0—1 之间. 对于心脏系统来说, 若  $k_{fb}$  取值过大, 则对系统损伤严重. 取定扩散系数  $\alpha = 1.0$ , 可激性系数  $\varepsilon = 0.004$ , 圆形障碍半径  $R = 2.0$ , 在 0—1 范围内均匀增大  $k_{fb}$ , 考虑不同  $k_{fb}$  下消除钉扎螺旋波的时间, 如图 7 所示. 从图中可以看出钉扎螺旋波的控制时间随着  $k_{fb}$  的增大而减小. 当  $k_{fb}$  越大

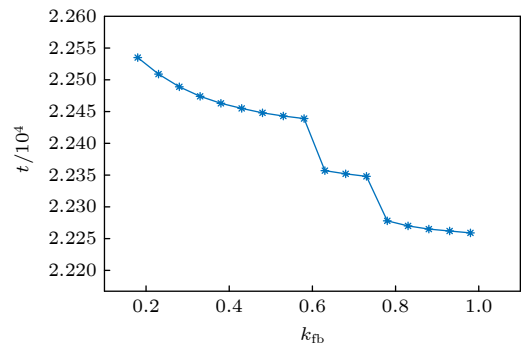


图 7 不同  $k_{fb}$  下消除钉扎螺旋波的时间步

Fig. 7. Time step of unpinning spiral wave with different  $k_{fb}$ .

时, 注入系统内反馈项的值越大, 被激发成新的钉扎螺旋波所需的时间越少, 因此影响钉扎螺旋波的控制时间.

### 3.2.2 可激性系数 $\varepsilon$

可激性系数  $\varepsilon$  影响着钉扎螺旋波的动力学行为. 接下来, 考虑在不同的可激性系数  $\varepsilon$  下钉扎螺旋波的控制情况. 控制扩散系数  $\alpha = 1.0$ , 圆形障碍半径  $R = 2.0$  不变, 讨论能使不同的可激性系数  $\varepsilon$  下钉扎螺旋波得到控制的  $k_{fb}$  最小值, 这里用  $k_{fbmin}$  来表示. 加入反馈控制时间  $t_1 = 20000$ , 反馈控制结束时间  $t_2 = 20090$ . 图 8(a) 记录了不同  $\varepsilon$  下, 钉扎螺旋波的周期  $T$ . 根据不同  $\varepsilon$  下的周期  $T$ , 选取记录反馈信号时间  $t_0$ , 使其与  $t_1$  之间的时间间隔为  $T/10$ , 如图 8(b) 所示. 图 8(c) 描绘了能成功控制钉扎螺旋波所需的  $k_{fbmin}$ . 可以看出  $k_{fbmin}$  随着可激性系数  $\varepsilon$  的增大呈现先减小后增大的现象. 在保持  $k_{fb} = 0.5$  的情况下, 讨论了不同可激性系数  $\varepsilon$  下的控制时间, 如图 8(d) 所示. 反馈法下钉扎螺旋波

的控制时间随着可激性参数的增大而增大.

此外, 还讨论了在不同的可激性系数  $\varepsilon$  下能够成功控制钉扎螺旋波的记录反馈信号时间  $t_0$  与加入反馈控制时间  $t_1$  之间时间间隔的范围. 在其余系统参数不变的情况下, 钉扎螺旋波的周期跟障碍物的周长有关. 并将该时间间隔与钉扎螺旋波的周期进行换算 (例如, 若  $t_0$  与  $t_1$  之间的时间间隔为 60, 某参数下钉扎螺旋波周期为 600, 则该时间间隔为周期的  $1/10$ ). 为了方便观察记录, 将不同  $\varepsilon$  下的  $t_1$  都选取为钉扎螺旋波的可激态刚好运动到圆形障碍物的正上方 (即圆形障碍物的十二点钟方向), 并以  $T/360$  为时间间隔进行讨论, 其中  $T$  为钉扎螺旋波的周期. 从图 9 可以看出, 随着  $\varepsilon$  的增大,  $t_0$  与  $t_1$  之间时间间隔的范围减小, 这是由加入反馈信号时系统是否处于易损期决定的. 并且在不同的  $\varepsilon$  下,  $t_0$  与  $t_1$  之间时间间隔最小均可为  $T/360$ , 即当  $t_0$  与  $t_1$  之间的时间间隔为相应钉扎螺旋波周期的  $1/360$  时, 也能成功消除钉扎螺旋波.

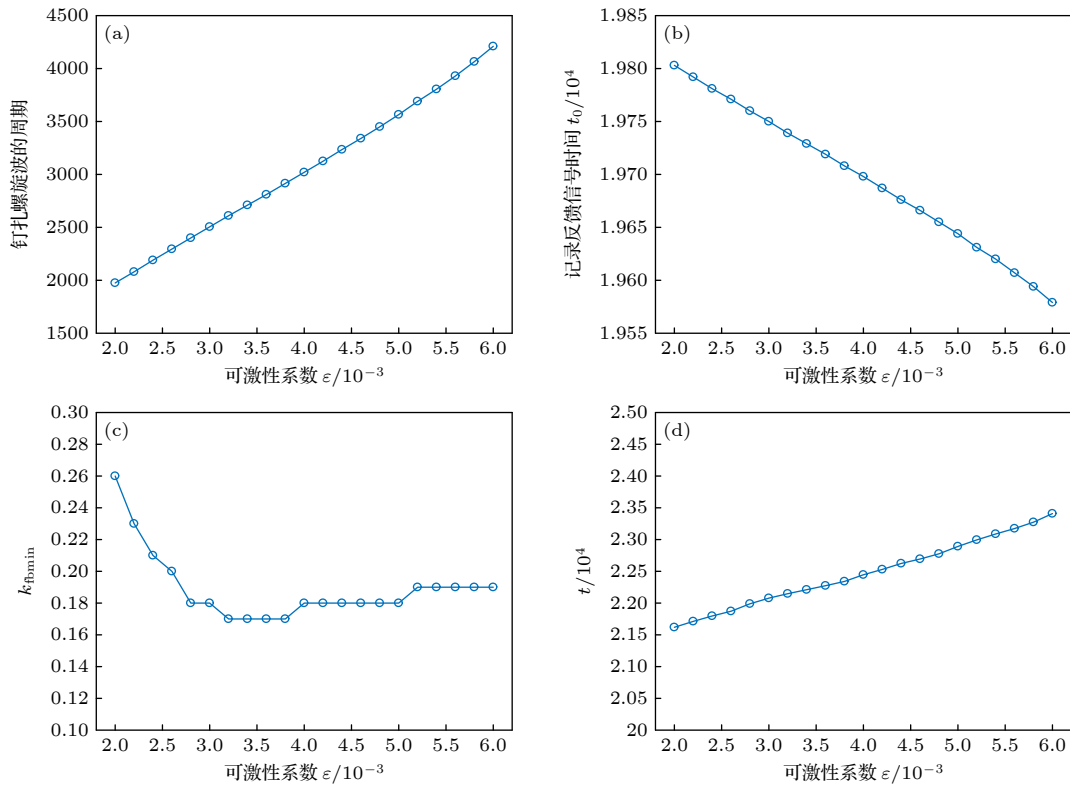


图 8 (a) 钉扎螺旋波的周期随可激性系数  $\varepsilon$  的变化; (b) 记录反馈信号时间  $t_0$  随可激性系数  $\varepsilon$  的变化; (c)  $k_{fbmin}$  随可激性系数  $\varepsilon$  的变化; (d) 钉扎螺旋波的控制时间  $t$  随可激性系数  $\varepsilon$  的变化

Fig. 8. (a) Variation of the period of the pinned spiral wave with  $\varepsilon$ ; (b) variation of the time of recording the feedback signal with  $\varepsilon$ ; (c) variation of  $k_{fbmin}$  with  $\varepsilon$ ; (d) variation of the time required to eliminate the pinned spiral wave with  $\varepsilon$ .

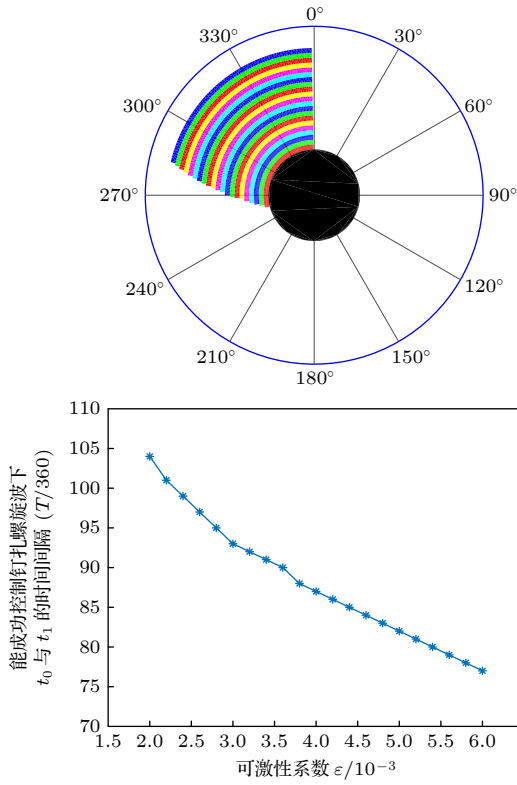


图 9 不同  $\varepsilon$  下, 能够成功控制钉扎螺旋波的记录反馈信号时间  $t_0$  与加入反馈控制时间  $t_1$  之间时间间隔对应的范围  
 Fig. 9. Corresponding range of the time interval between the recording feedback signal time  $t_0$  and the adding feedback control time  $t_1$  with different  $\varepsilon$ .

### 3.2.3 记录反馈信号时间 $t_0$ 及圆形障碍物半径

由前面的讨论可知, 在不同的可激性系数  $\varepsilon$  下, 能够成功控制钉扎螺旋波的记录反馈信号时间  $t_0$  与加入反馈控制时间  $t_1$  之间都有一个时间间隔. 若保持  $\varepsilon$  及  $t_1$  不变, 在对应的时间间隔内讨论  $t_0$ , 则可以得到不同  $t_0$  下能成功控制钉扎螺旋波的情况. 控制变量不变, 保持  $t_0$  持续变化, 讨论不同  $t_0$  下能够成功控制钉扎螺旋波所需的最小的  $k_{fb}$ , 如图 10 所示.  $k_{fbmin}$  随着  $t_0$  的增大呈现先减小后增大的情况, 这与文献 [13] 反馈法控制自由螺旋波的情况一致. 圆形障碍物的大小对使用反馈法控制螺旋波也有重要的影响. 图 11 给出了不同半径下能够成功控制钉扎螺旋波的记录反馈信号时间  $t_0$  与加入反馈控制时间  $t_1$  之间对应的时间间隔. 随着圆形障碍半径  $R$  的增大,  $t_0$  与  $t_1$  之间时间间隔的范围减小. 这是由加入反馈信号时系统是否处于易损期决定的. 并且  $R$  不同时, 能成功控制钉扎螺旋波下  $t_0$  与  $t_1$  之间时间间隔最小均可为  $T/360$ .

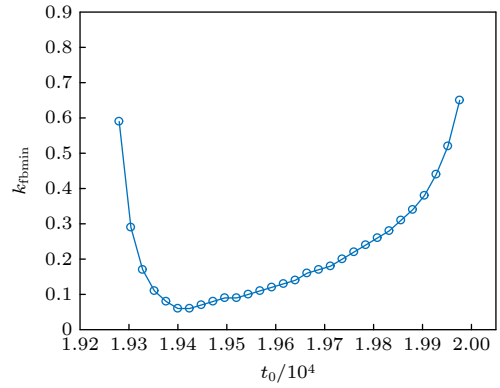


图 10 在不同的  $t_0$  下, 能成功控制钉扎螺旋波所需的  $k_{fbmin}$  的变化情况  
 Fig. 10. Change of  $k_{fbmin}$  of unpinning spiral wave successfully with different  $t_0$ .

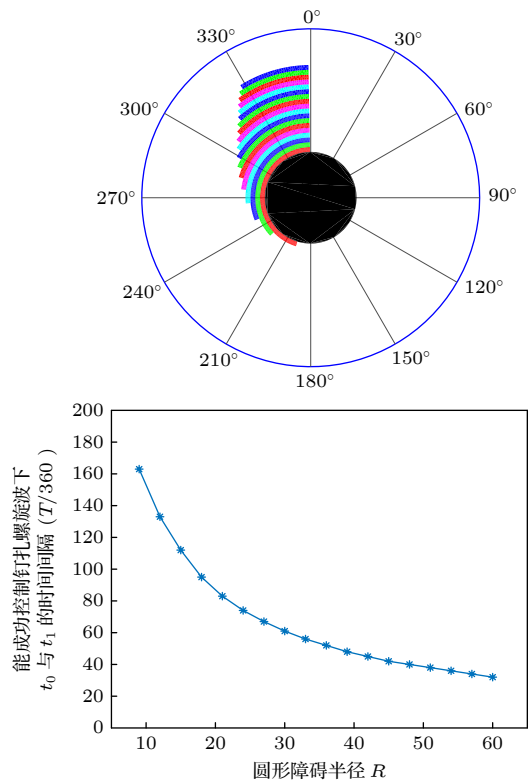


图 11 不同  $R$  下, 能够成功控制钉扎螺旋波的记录反馈信号时间  $t_0$  与加入反馈控制时间  $t_1$  之间时间间隔对应的范围  
 Fig. 11. Corresponding range of the time interval between the recording feedback signal time  $t_0$  and the adding feedback control time  $t_1$  with different  $R$ .

## 4 结 论

本文利用反馈控制法研究了钉扎螺旋波的消除情况, 并研究了反馈控制中参数的影响. 模拟结果表明, 反馈法能够有效控制钉扎螺旋波. 首先, 分别在圆形障碍物和矩形障碍物下验证了反馈法

对于钉扎螺旋波消除的有效性. 其次, 研究了反馈控制信号幅度和可激性系数对控制钉扎螺旋波的影响, 并研究记录了能够成功控制钉扎螺旋波的记录反馈信号时间与加入反馈控制时间之间对应的的时间间隔. 可以发现钉扎螺旋波的控制时间随着反馈控制信号幅度的增大而减小. 而钉扎螺旋波的控制时间随着可激性系数的增大而增大, 这是由于可激性系数增大时, 螺旋波的波宽随之减小, 从而影响控制时间. 最后, 研究了圆形障碍的半径和记录信号时间的影响. 在不同的记录信号时间下, 能成功消除钉扎螺旋波的最小反馈控制信号幅度不同, 呈现先减小后增大的趋势. 基于本文的讨论可知, 反馈法对于自由螺旋波和钉扎螺旋波都具有很好的控制作用. 基于该方法具有反馈信号弱和反馈持续时间短的优点, 对该方法进一步研究, 可以大幅度提高控制螺旋波的效果.

## 附录 A

在本附录中, 采用直接泰勒展开 (DTE) 从现有的格子 Boltzmann 模型中恢复带有反馈控制项的 FHN 模型. 对方程 (5) 进行泰勒展开, 可以得到:

$$\begin{aligned} \Delta t D_i h_i + \frac{\Delta t^2}{2} D_i^2 h_i + O(\Delta t^3) \\ = -\frac{1}{\tau} h_i^{\text{ne}} + \Delta t \left( G_i + \frac{\Delta t}{2} \partial_t G_i \right), \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

其中,  $D_i = \partial_t + \mathbf{c}_i \cdot \nabla$ ;  $h_i^{\text{ne}}$  为非平衡态分布函数,  $h_i^{\text{ne}} = h_i - h_i^{\text{eq}}$ . 从 (A1) 式可以看出,  $h_i^{\text{ne}} = O(\Delta t)$ , 并且可以得到不同  $\Delta t$  阶数的方程:

$$D_i h_i^{\text{eq}} = -\frac{1}{\tau \Delta t} h_i^{\text{ne}} + G_i + O(\Delta t), \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} D_i (h_i^{\text{eq}} + h_i^{\text{ne}}) + \frac{\Delta t}{2} D_i^2 h_i^{\text{eq}} \\ = -\frac{1}{\tau \Delta t} h_i^{\text{ne}} + G_i + \frac{\Delta t}{2} \partial_t G_i + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

由 (A2) 式可以得到:

$$\frac{\Delta t}{2} D_i^2 h_i^{\text{eq}} = -\frac{1}{2\tau} D_i h_i^{\text{ne}} + \frac{\Delta t}{2} D_i G_i + O(\Delta t^2). \quad (\text{A4})$$

将 (A4) 式代入 (A3) 式, 有

$$\begin{aligned} D_i h_i^{\text{eq}} + D_i \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) h_i^{\text{ne}} + \frac{\Delta t}{2} D_i G_i \\ = -\frac{1}{\tau \Delta t} h_i^{\text{ne}} + G_i + \frac{\Delta t}{2} \partial_t G_i + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

为了恢复正确的带有反馈控制项的 FHN 模型, 分布函数  $h_i$ ,  $h_i^{\text{eq}}$  和  $G_i$  满足以下条件:

$$\sum_i h_i = \sum_i h_i^{\text{eq}} = u, \quad \sum_i \mathbf{c}_i h_i^{\text{eq}} = 0, \quad \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i h_i^{\text{eq}} = c_s^2 u I. \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \sum_i G_i = -\frac{1}{\varepsilon} [v + u(u-a)(u-1)] + \frac{k_{\text{fb}}}{\varepsilon} I_{\text{feedback}}, \\ \sum_i \mathbf{c}_i G_i = 0. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

通过上述关系, 对具有  $O(\Delta t)$  和  $O(\Delta t^2)$  阶的 (A2) 式和 (A5) 式求零阶矩, 可得:

$$\partial_t u = \frac{1}{\varepsilon} [-v - u(u-a)(u-1)] + \frac{k_{\text{fb}}}{\varepsilon} I_{\text{feedback}} + O(\Delta t), \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nabla \cdot \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) \sum_i \mathbf{c}_i h_i^{\text{ne}} \\ = \frac{1}{\varepsilon} [-v - u(u-a)(u-1)] + \frac{k_{\text{fb}}}{\varepsilon} I_{\text{feedback}} + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

其中,  $\sum_i \mathbf{c}_i h_i^{\text{ne}}$  可以由 (A2) 式变形得到:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{c}_i h_i^{\text{ne}} &= -\Delta t \tau \sum_i \mathbf{c}_i (D_i h_i^{\text{eq}} - G_i) + O(\Delta t^2) \\ &= -\Delta t \tau \nabla \cdot \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i h_i^{\text{eq}} + O(\Delta t^2) \\ &= -\Delta t \tau c_s^2 \nabla \cdot u. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

将 (A10) 式代入 (A9) 式即可恢复宏观方程 (3), 且  $\alpha = (\tau - 1/2) c_s^2 \Delta t$ .

## 参考文献

- [1] Winfree A T 1972 *Science* **175** 634
- [2] Rotermund H H, Jakubith S, Von Oertzen A, Ertl G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 3083
- [3] Witkowski F X, Leon L J, Penkoske P A, Giles W R, Spano M L, Ditto W L, Winfree A T 1998 *Nature* **392** 78
- [4] Zakin A N, Zhabotinsky A M 1970 *Nature* **225** 535
- [5] Valderrábano M, Kim Y, Yashima M, Wu T, Karagueuzian H S, Chen P S 2000 *J. Am. Coll. Cardiol.* **36** 2000
- [6] Zou X, Levine H, Kessler D A 1993 *Phys. Rev. E* **47** R800
- [7] Steinbock O, Müller S C 1993 *Phys. Rev. E* **47** 1506
- [8] Fu Y Q, Zhang H, Cao Z 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046206
- [9] Ponboonjaroenchai B, Srithamma P, Kumchaisemak N, et. al. 2017 *J. Phys. Conf. Ser.* **901** 012027
- [10] Chen J X, Peng L, Ma J 2014 *EPL* **107** 38001
- [11] Yuan G Y, Gao Z, Yan S 2021 *Nonlinear Dyn.* **104** 2583
- [12] Yuan G Y, Yang S P, Wang G R, Chen S G 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1674
- [13] Hou Z M, Shi B C, Chai Z H 2017 *Comput. Math. Appl.* **74** 2330
- [14] Chai Z H, Shi B C 2020 *Phys. Rev. E* **102** 023306
- [15] Shi B C, Guo Z L 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016701
- [16] Higuera F J, Succi S 1989 *EPL* **8** 517
- [17] Hodgkin A L, Huxley A F 1952 *J. Physiol.* **117** 500
- [18] FitzHugh R 1961 *Biophys. J* **1** 445
- [19] Courtemanche M, Skaggs W, Winfree A T 1990 *Phys. D* **41** 173
- [20] Liang H, Wu H 2008 *J. Am. Stat. Assoc.* **103** 1570
- [21] Concha A, Garrido R 2015 *J. Comput. Nonlinear Dyn.* **10** 021023
- [22] He Y L, Wang Y, Li Q 2009 *Lattice Boltzmann Method: Theory and Applications* (Beijing: Science Press) pp123–126 (in Chinese) [何雅玲, 王勇, 李庆 2009 格子 Boltzmann 方法的理论及应用 (北京: 科学出版社) 第 123—126 页]

# Lattice Boltzmann method based feedback control approach for pinned spiral waves\*

Lai Yao-Yao<sup>1)2)3)</sup>    Chen Xin-Meng<sup>1)2)3)</sup>  
Chai Zhen-Hua<sup>1)2)3)</sup>    Shi Bao-Chang<sup>1)2)3)†</sup>

1) (*School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

2) (*Hubei Key Laboratory of Engineering Modeling and Scientific Computing, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

3) (*Institute of Interdisciplinary Research for Mathematics and Applied Science, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

( Received 22 September 2023; revised manuscript received 20 October 2023 )

## Abstract

Spiral waves are common in nature and have received a lot of attention. Spiral wave is the source of ventricular tachycardia and fibrillation, and pinned spiral wave is less likely to be eliminated than free spiral wave. Therefore, it is important to find an effective method to control the pinned spiral wave. In this work, we investigate the feedback control approach to eliminating pinned spiral wave based on the lattice Boltzmann method, by using the FitzHugh-Nagumo model as an object. The numerical results show that the feedback control method has a good control effect on the pinned spiral wave no matter whether it is pinned on a circular or rectangular obstacle. In addition, the excitability coefficient, amplitude of feedback control, recording feedback signal time and obstacle size are systematically investigated by numerical simulation. The study shows that there are three cases of pinned spiral wave cancellation. Firstly, the amplitude of feedback control and excitability coefficient are related to the time required to eliminate the pinned spiral wave, and the larger the amplitude of feedback control signal or the smaller the excitability coefficient, the faster the cancellation of the pinned spiral wave. Secondly, the size of the obstacle and the excitability coefficient affect the time interval between the time of recording the feedback signal and the time of adding the feedback control that can successfully control the pinned spiral wave. Finally, the recorded feedback signal time affects the minimum amplitude of feedback control required to successfully eliminate the pinned spiral wave, while the added feedback control time is constant. According to the discussion in this paper, it can be seen that the feedback control method has a good control effect on the pinned spiral wave.

**Keywords:** feedback control approach, pinned spiral waves, FitzHugh-Nagumo model, lattice Boltzmann method

**PACS:** 05.45.-a, 47.11.Qr, 82.40.Ck

**DOI:** [10.7498/aps.73.20231549](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231549)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12072127, 51836003).

† Corresponding author. E-mail: [shibc@hust.edu.cn](mailto:shibc@hust.edu.cn)



## 基于格子Boltzmann方法的钉扎螺旋波反馈控制

赖瑶瑶 陈鑫梦 柴振华 施保昌

### Lattice Boltzmann method based feedback control approach for pinned spiral waves

Lai Yao-Yao Chen Xin-Meng Chai Zhen-Hua Shi Bao-Chang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 040502 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231549

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231549>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 极化电场对可激发介质中螺旋波的控制

Control of spiral waves in excitable media under polarized electric fields

物理学报. 2020, 69(8): 080503 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191934>

#### 基于格子Boltzmann方法的二维气泡群熟化过程模拟

Lattice Boltzmann method based simulation of two dimensional bubble group ripening process

物理学报. 2022, 71(11): 110504 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20212183>

#### 平衡分布正值性对格子Boltzmann方法数值表现影响分析

Effect of equilibrium distribution positivity on numerical performance of lattice Boltzmann method

物理学报. 2019, 68(20): 204701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190624>

#### 基于格子Boltzmann方法的幂律流体二维顶盖驱动流转捩研究

Transitions of power-law fluids in two-dimensional lid-driven cavity flow using lattice Boltzmann method

物理学报. 2021, 70(18): 184703 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210451>

#### 光电管耦合FitzHugh-Nagumo神经元的同步

Synchronization between FitzHugh-Nagumo neurons coupled with phototube

物理学报. 2021, 70(9): 090502 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201953>

#### 倾斜多孔介质方腔内纳米流体自然对流的格子Boltzmann方法模拟

Numerical simulation of natural convection of nanofluids in an inclined square porous enclosure by lattice Boltzmann method

物理学报. 2020, 69(16): 164401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200308>