

# 高功率垂直腔面发射激光器阵列热特性\*

闫观鑫 郝永芹<sup>†</sup> 张秋波

(长春理工大学, 高功率半导体激光国家重点实验室, 长春 130022)

(2023年10月7日收到; 2023年11月30日收到修改稿)

为了改善垂直腔面发射激光器 (VCSEL) 阵列的热特性, 提高器件的可靠性, 本文基于有限元模型, 研究了不同单元间距、排布方式对阵列器件的热串扰现象、热扩散性能的影响. 在理论分析的基础上, 制备了几种不同排布方式的 VCSEL 阵列器件, 并对其进行测试分析. 结果显示, 相较于正方形排布方式, 新型排布方式器件具有更高的输出功率, 同时阈值电流也有所降低. 其中五边形排布方式的器件表现出最佳的性能, 其输出功率高达 150 mW, 比正方形排布方式提高了约 73%. 这表明通过调整阵列单元的间距、排列方式, 可以使各单元间的热串扰现象得到有效改善, 降低器件的热效应, 进而降低器件温度, 提高输出特性.

**关键词:** 垂直腔面发射激光器, 阵列, 热串扰, 排布方式**PACS:** 42.55.Px**DOI:** 10.7498/aps.73.20231614

## 1 引言

垂直腔面发射激光器 (VCSEL) 因具有低阈值电流、高光束质量、高调制速率、稳定的单纵模工作、易于制作密集二维阵列等显著优势, 在激光泵浦、光存储、三维传感、光探测和激光雷达 (LIDAR) 等领域有广泛的应用<sup>[1-4]</sup>. 然而, VCSEL 在工作时会产生大量的热, 使得整个器件温度升高, 影响激光器的性能<sup>[5,6]</sup>, 例如阈值电流升高、波长红移、输出光功率下降以及转换效率降低等. 在阵列器件中, 由于衬底的热导系数和氧化孔径较小, 导致器件整体串联电阻较大, 热效应严重<sup>[7]</sup>. 除此之外, 相邻单元之间存在热串扰现象, 严重影响了 VCSEL 的性能. 因此, 研究 VCSEL 的热问题具有重要的意义.

许多研究人员对此进行了大量的研究. 对于单元 VCSEL 器件, 已经研究了焦耳热、热扩散和传导、非均匀导热系数和辐射特性的综合热电模

型<sup>[8-10]</sup>. 对于 VCSEL 阵列器件, Desgreys 等<sup>[11]</sup>建立了光-电热耦合模型, 分析了相邻阵列单元之间的热耦合效应对器件热特性的影响. Moench 等<sup>[12]</sup>模拟了 VCSEL 阵列中的热流, 提出了一种细长的矩形 VCSEL 阵列来实现更高功率, 同时分析了氧化限制孔径、注入电流密度和衬底厚度对器件热性能的影响<sup>[13]</sup>. 另外, 优化台面排布也被证明是一种有效改善热效应<sup>[14,15]</sup>的方法. 本文通过优化 VCSEL 阵列单元间距和排布方式来调控台面之间热流密度的相互作用, 从而调控温度分布, 进而改善阵列器件的性能.

## 2 理论仿真

VCSEL 内部产生的热主要来自两部分, 一是来自有源区中非辐射复合释放的热量以及光子被吸收时产生的热量, 二是来自有源区两侧的分分布式布拉格反射镜 (DBR), 特别是 P-DBR 产生的焦耳热. 在阵列器件中, 电流向横向分流会导致横向扩

\* 吉林省科技发展计划 (批准号: 20200401073GX) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [hyq72081220@aliyun.com](mailto:hyq72081220@aliyun.com)

展效应<sup>[16,17]</sup>, 扩展效应会造成阵列单元间电流的叠加, 从而使阵列器件的热效应更加剧烈, 使阵列器件的输出性能大大降低. 另外, 单元间距过小导致的热耦合问题在单元器件排布过于密集的情况下十分严重. 因此, 我们利用 ANSYS 对 VCSEL 阵列的热特性进行模拟, 分析不同单元间距及不同排布方式下的温度分布情况. 由于 VCSEL 阵列的结构较为复杂, 我们对 VCSEL 的结构进行了适当的简化, 主要包括铜热沉、焊料、欧姆接触层以及衬底层、N-DBR 层、有源层、P-DBR 层等, 其中较薄的氧化层对热分析影响不大, 可忽略不计. 且模拟时, 假定每层材料的热导率、热量传递都均匀. 简化后 VCSEL 结构如图 1 所示, 模拟中采用的外延

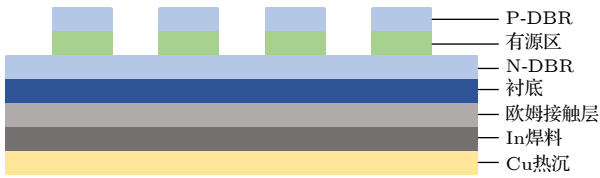


图 1 简化后的 VCSEL 结构图  
Fig. 1. Simplified VCSEL structure.

片结构参数和热参数如表 1 所示.

表 1 模拟中采用的外延片结构参数和热参数  
Table 1. Structural and thermal parameters of epitaxial wafers used in simulation.

各层参数	材料	热导率 $\kappa / (\text{W} \cdot (\text{cm} \cdot \text{K})^{-1})$	厚度/ $\mu\text{m}$
P-DBR层(对)	$\text{Al}_{0.9}\text{GaAs} / \text{Al}_{0.22}\text{GaAs}$	0.5	3.479
有源层	$\text{Al}_{0.3}\text{GaAs} / \text{Al}_{0.6}\text{GaAs}$	0.185	0.2373
N-DBR层(对)	$\text{Al}_{0.9}\text{GaAs} / \text{Al}_{0.22}\text{GaAs}$	0.499	5.6408
衬底层	GaAs	0.55	150
欧姆接触层(N)	Au-Ge-Ni	0.44	0.2
In焊料层	In	0.82	3
Cu热沉	Cu	3.98	1000

以正方形排布为例, 每个单元的台面直径为  $80 \mu\text{m}$ , 比较了不同单元间距时阵列的热性能, 如图 2 所示.

根据 Amann 和 Hofmann<sup>[18]</sup> 建立的等台面间距 VCSEL 阵列热模型可以得到等间距 VCSEL 阵列的温度分布:

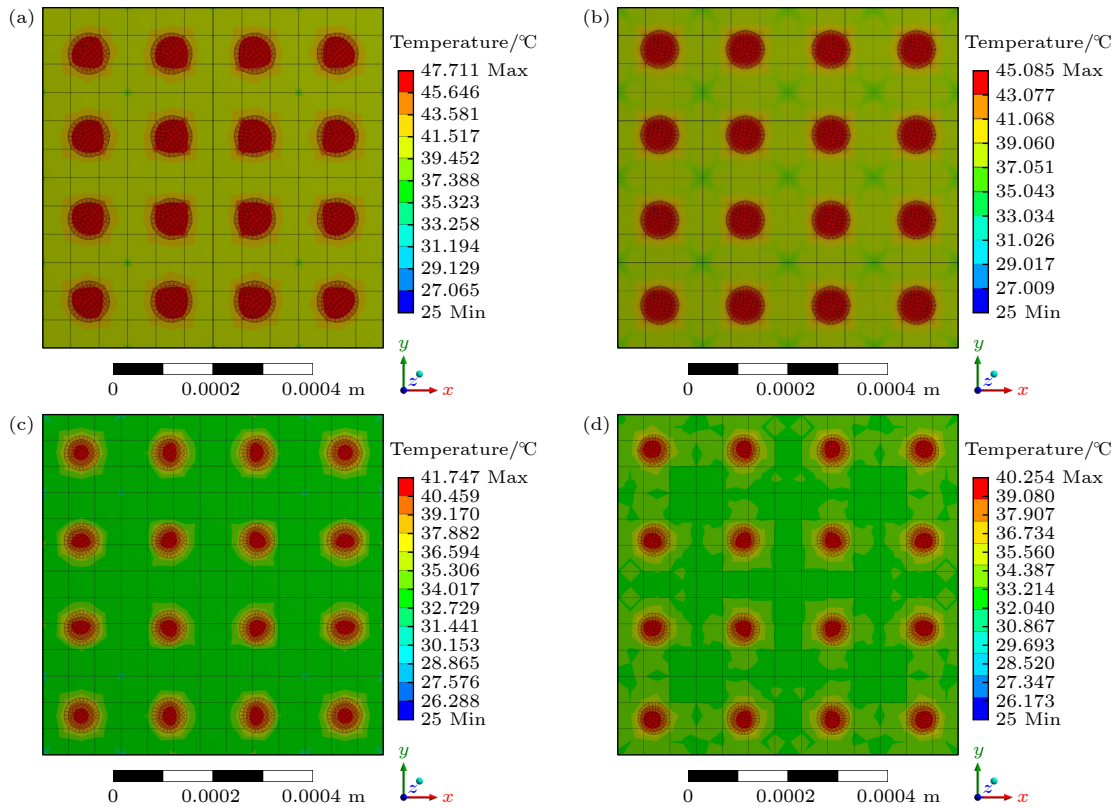


图 2 不同单元间距的正方形 VCSEL 阵列的表面温度分布 (a)  $d = 80 \mu\text{m}$ ; (b)  $d = 100 \mu\text{m}$ ; (c)  $d = 120 \mu\text{m}$ ; (d)  $d = 140 \mu\text{m}$   
Fig. 2. Surface temperature distribution of square VCSEL arrays with different mesa spacings: (a)  $d = 80 \mu\text{m}$ ; (b)  $d = 100 \mu\text{m}$ ; (c)  $d = 120 \mu\text{m}$ ; (d)  $d = 140 \mu\text{m}$ .

$$\Delta T(r) = \left(\frac{g}{d^2}\right) \left(\frac{P}{2\pi\lambda}\right) \left[ 2\pi(R-r) + 2 \int_{R-r}^{R+r} \varphi(s, r) ds \right], \quad (1)$$

$$\varphi(s, r) = \arccos\left(\frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr}\right). \quad (2)$$

在该模型中, 定义阵列近似为圆形, 半径为  $R$ , 阵列的间距为  $d$ ,  $r$  为单元中心到阵列中心的距离,  $g$  为几何因子,  $\lambda$  为均匀衬底的热导率,  $P$  为单元直径范围内热损耗功率. 由 (1) 式可知增大台面间距时, 单元之间的相互作用减弱, 热串扰有所改善. 从图 2 可以看出, 当间距较小时, 各单元之间的热串扰现象明显. 随着间距逐渐增大, 热串扰有所改善, 器件的热扩散性能有所增强, 器件温度下降. 图 3 给出了 VCSEL 阵列的最高温度与单元间距的关系曲线, 可以看出器件的最高温度随着单元间距的增大呈指数衰减, 这与 Jin 等<sup>[19]</sup>提出的 2D VCSEL 阵列的紧凑电光热模型的结果一致. 当间距大于 120  $\mu\text{m}$  时, 器件温度降低缓慢, 继续增大单元间距对温度的改善效果越来越小, 且过大的间距不利于获得小型高功率阵列.

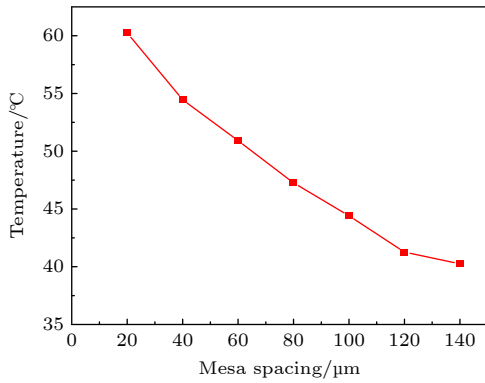


图 3 不同单元间距下 VCSEL 阵列的最高温度  
Fig. 3. Maximum temperature of VCSEL arrays under different mesa spacings.

此外, 单元器件周围的单元数量也会影响热串扰, 尤其是靠近中心的单元器件与周围单元相互作用更强, 从而导致更强的热串扰. 因此, 除了调整单元间距还可以通过优化阵列排布在一定程度上改善热串扰, 降低器件温度, 提高器件性能.

考虑到优化 VCSEL 单元在阵列中的排布, 将任意两个单元间隔设置为离散, 对 (1) 式进行离散化处理, 得到优化后的阵列温度分布<sup>[20]</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta T(r) &= \sum_{0 < s < R-1} 2\pi s \cdot \Delta T_i(s) \\ &+ \sum_{R-r < S < R+1} 2\varphi(s, t) \Delta T_i(s) s \\ &= \sum dS_1 \cdot \Delta T_i(s) + dS_2 \cdot \Delta T_i(s), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\Delta T_i(s)$  与单元间距的倒数成正比. 并引入热耦合因子  $H_c$ :

$$H_c = S \sum_{0 < d_i \leq d_i} \frac{1}{d_i}, \quad (4)$$

其中  $S$  是包括阵列中所有单元的区域面积,  $d_i$  是单元中心的间距. 由 (4) 式可知通过调整单元排布, 可以在平衡单元间距和单元总面积的同时, 获得较小的热耦合因子, 从而减小热串扰. 以 16 个单元为例, 对不同排布方式进行模拟仿真, 如图 4 所示.

目前对于 VCSEL 阵列排布方式的研究多集中于等边三角形及环形排布方式<sup>[21,22]</sup>, 且相较于等边三角形, 环形排布方式对于热性能的改善较为明显. 从图 4 可以看出, 与正方形型排布方式相比, 等边三角形排布热特性改善效果不显著, 此时正方形排布的热耦合因子约为 83232, 等边三角形约为 81636. 而等腰三角形、五边形、环形这 3 种排布方式热特性明显改善, 热耦合因子  $H_c$  分别约为 79560, 75413, 77220. 尤其是五边形排布方式, 每个单元器件的热串扰现象得到明显改善, 使得中心区域与边缘区域温差较小, 整个器件热耦合效应较均匀, 器件温度较低, 效果最佳.

### 3 器件制作

本文采用在同一芯片上、相同工艺条件下, 制备了 4 种不同排布方式的 VCSEL 阵列器件. 外延结构采用 MOCVD 技术生长完成, 其中量子阱由 3 个  $\text{Al}_{0.3}\text{GaAs}/\text{Al}_{0.6}\text{GaAs}$  构成, 阱厚 5 nm, 垒厚 8 nm. n 型 DBR 由 41 对掺杂了硅的  $\text{Al}_{0.9}\text{Ga}_{0.1}\text{As}/\text{Al}_{0.22}\text{Ga}_{0.78}\text{As}$  交替生长而成. 而 p 型 DBR 则由 24 对掺杂了铍的  $\text{Al}_{0.9}\text{Ga}_{0.1}\text{As}/\text{Al}_{0.22}\text{Ga}_{0.78}\text{As}$  组成. 高铝 ( $\text{Al}_{0.98}\text{Ga}_{0.02}\text{As}$ ) 层, 作为氧化限制层, 位于 p 型 DBR 与有源区之间, 并与有源区之间通过  $\text{Al}_{0.9}\text{Ga}_{0.1}\text{As}$  过渡层相连, 整个外延片 PL 谱的峰值波长为 785 nm.

器件的制备过程如下: 首先以  $\text{SiO}_2$  为掩膜, 采用感应耦合等离子体 (ICP) 刻蚀进行台面刻蚀以

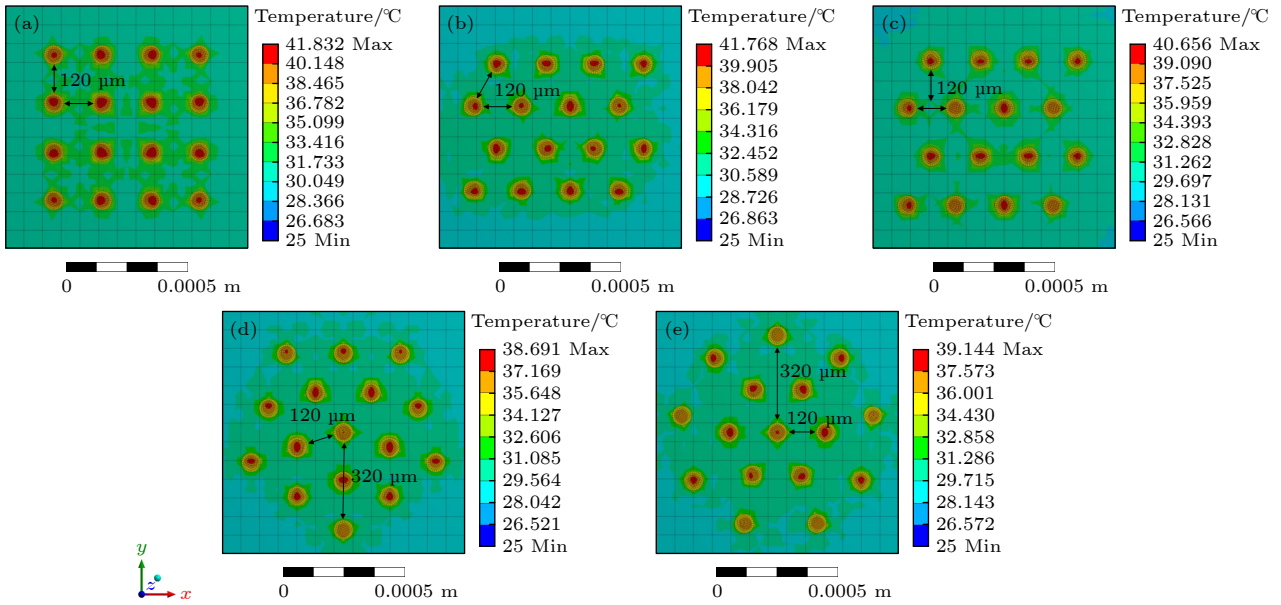


图 4 不同排布方式 VCSEL 阵列温度分布图 (a) 正方形; (b) 等边三角形; (c) 等腰三角形; (d) 五边形; (e) 环形

Fig. 4. Temperature distribution of VCSEL arrays with different arrangements: (a) Square; (b) equilateral triangle; (c) isosceles triangle; (d) pentagon; (e) circular.

暴露富 Al 层. 然后, 将外延片放置在氧化炉中通  $N_2/H_2O$  进行氧化, 以达到光电限制的目的, 其中氧化温度为  $420\text{ }^\circ\text{C}$ , 水汽温度为  $85\text{ }^\circ\text{C}$ . 然后利用 PECVD 在外延片上镀  $200\text{ nm}$  的  $SiO_2$  钝化层, 经过多次套刻形成出光孔和电极窗口. 在外延片上溅射 Ti-Pt-Au 制作 p 型电极, 再次在外延片 n 面进行减薄抛光, 使外延片厚度降至  $150\text{ }\mu\text{m}$  左右, 以降低热效应, 接着溅射 Au-Ge-Ni 制作 n 面电极. 最后在  $420\text{ }^\circ\text{C}$  下快速热退火  $60\text{ s}$  以降低接触电阻.

#### 4 结果与分析

图 5 展示了 4 种不同排列方式的 VCSEL 阵列的近场图. 可观察到, 这 4 种排布方式的阵列器件均表现出良好的光输出效果, 并且每个单元器件都能够成功激励.

图 6 为不同排布方式 VCSEL 阵列的  $P-I-V$  特性曲线. 可以看出, 正方形阵列器件在工作电流  $0.8\text{ A}$  时, 器件的最大输出功率为  $87\text{ mW}$ ; 相较于正方形排布方式, 新型排布方式的阈值电流均有所降低, 最大输出功率均有所提高, 分别为  $95, 150, 136\text{ mW}$ , 其中五边形排布方式的输出功率最大, 阈值电流最低, 分别为  $150\text{ mW}$  和  $60\text{ mA}$ . 这是因为优化排布方式在一定程度上降低了器件的热串

扰, 提高了器件的热扩散性能, 从而降低了器件的温度. 从而减小了有源区域非辐射复合的发生概率, 同时也提高了内部和外部的量子效率. 进而降低了器件的阈值电流, 增大了器件的输出功率. 因此, VCSEL 阵列器件在光电特性和热特性方面都表现出良好的性能. 实验结果表明优化的排布方式可以使各单元间的热串扰现象得到有效改善, 从而使器件的电光特性得到改善.

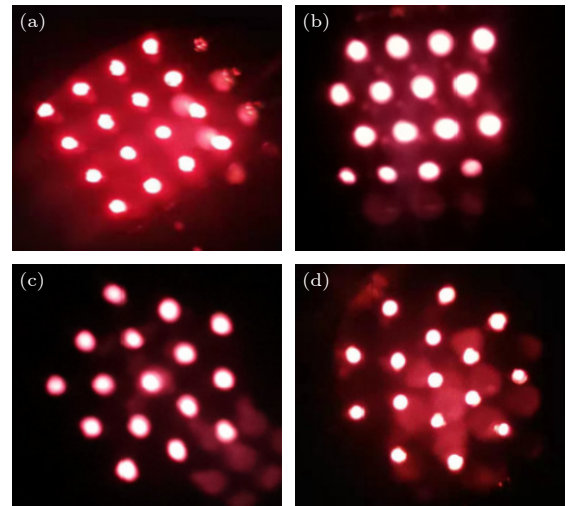


图 5 不同排布方式 VCSEL 阵列器件的近场效果图 (a) 正方形; (b) 等腰三角形; (c) 五边形; (d) 环形

Fig. 5. Near fields of VCSEL arrays with different arrangements: (a) Square; (b) isosceles triangle; (c) pentagon; (d) circular.

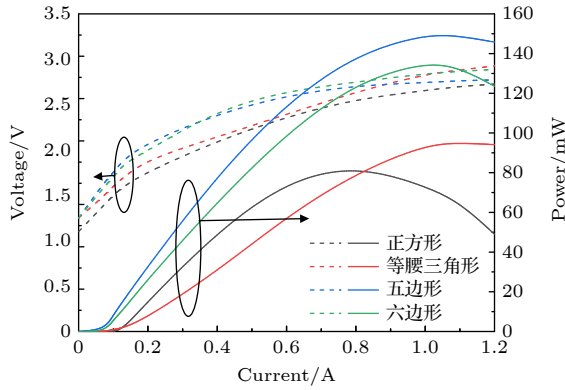


图6 不同排布方式 VCSEL 阵列器件的  $P-I-V$  曲线

Fig. 6.  $P-I-V$  curve of VCSEL array devices with different arrangements.

## 5 结论

在 VCSEL 热特性理论分析的基础上, 采用有限元分析的方法, 研究了优化单元间距、排布方式对器件热串扰、热扩散性能的影响. 结果表明, 单元间距对阵列器件的热耦合有影响, 且随着单元间距的增大, VCSEL 阵列器件热串扰现象和热扩散性能得到明显改善, 最终确定合适的单元间距为  $120\ \mu\text{m}$ ; 新型排布方式相对于正方形排布方式阵列器件的热串扰有明显改善, 尤其是五边形排布方式, 器件整体热串扰较小, 单元器件受热较均匀, 器件温度最低, 效果最佳. 在理论研究的基础上, 利用相同工艺, 在同一外延片制备出正方形排布方式和新型排布方式的 VCSEL 阵列. 测试结果显示新型排布方式相较于正方形排布方式器件的输出功率更高, 阈值电流有所降低. 其中五边形排布方式器件输出功率最高, 为  $150\ \text{mW}$ , 比正方形排布提升了约 73%, 输出性能最好. 研究表明, 通过调整单元间距和排布方式, 可以有效改善阵列的热性能, 降低阈值, 改善输出特性, 从而使得 VCSEL 阵列具有良好的光电性能.

## 参考文献

- [1] Soda H, Iga K, Kitahara C, Suematsu Y 1979 *Jpn. J. Appl. Phys.* **18** 2329
- [2] Iga K 2018 *Jpn. J. Appl. Phys.* **57** 08PA01
- [3] Inoue S, Nishimura S, Nakahama M, Matsutani A, Sakaguchi T, Koyama F 2018 *Jpn. J. Appl. Phys.* **57** 040308
- [4] Kuramoto M, Kobayashi S, Akagi T, Tazawa K, Tanaka K, Nakata K, Saito T 2019 *Appl. Phys. Express* **12** 091004
- [5] Gao L 2014 *M. S. Thesis* (Changchun: Changchun University of Science and Technology) (in Chinese) [高亮 2014 硕士学位论文 (长春: 长春理工大学)]
- [6] Zhao Q Y 2020 *M. S. Thesis* (Xi'an: University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [赵秦丰 2020 硕士学位论文 (西安: 中国科学院大学)]
- [7] Zhang Q B 2020 *M. S. Thesis* (Changchun: Changchun University of Science and Technology) (in Chinese) [张秋波 2020 硕士学位论文 (长春: 长春理工大学)]
- [8] Nakwaski W, Osinski M 1991 *IEEE J. Quantum Elect.* **27** 1391
- [9] Chen G, Hadley M A, Smith J S 1994 *J. Appl. Phys.* **76** 3261
- [10] Choi J H, Wang L, Bi H, Chen R T 2006 *IEEE J. Sel. Top. Quant.* **12** 1060
- [11] Desgreys P, Karray M, Charlot J, Charlot, Herve Y 2002 *Proceedings of the 2002 IEEE International Workshop on Behavioral Modeling and Simulation* Santa Rosa, CA, USA, 2002 pp123-126
- [12] Moench H, Dumoulin R, Gronenborn S, Gu X, Heusler G, Kolb J, Miller M, Pekarski P, Pollmann-Retsch J, Pruijboom A, Stroesser M 2012 *SPIE* **8276** 9
- [13] Wang J, Savidis I, Friedman E G 2011 *Microelectronics J.* **42** 820
- [14] Zhong C Y, Zhang X, Liu D, Ning Y Q, Wang L J 2017 *Chin. Phys. B* **26** 064204
- [15] Zhong C, Zhang X, Hofmann W, Ning Y Q, Wang L J 2018 *IEEE Photon. J.* **10** 1504608
- [16] Pan G Z, Xie Y Y, Xu C, Wang Q H, Dong Y B, Deng J, Chen H D, Sun J 2019 *IEEE Photonic Tech. L.* **31** 1647
- [17] Gao Z H, Thompson B J, Ragunathan G, Johnson M T, Rout B, Choquette K D *IEEE Photonic Tech. L.* **28** 513-515
- [18] Amann M C, Hofmann W 2009 *IEEE J. Sel. Top. Quant.* **15** 861
- [19] Jin D Y, Yang S M, Zhang F, Wu L, Guan B L, Yang Y Q, Zhang W R 2022 *IEEE Trans. Electron Devices* **69** 3761
- [20] Liu Y Y, Huang Y W, Zhong C Y, Zhang X, Zhang J W, Hofmann W, Ning Y Q, Wang L J 2019 *Optik* **186** 443
- [21] Wang C, Li C, Dai J 2019 *Opt. Quantum Electron* **51** 1
- [22] Qin Y X, Li W, Liu S P, Ma X Y 2019 *J. Appl. Phys.* **126** 193101

# Thermal characteristics of high-power vertical cavity surface emitting laser array\*

Yan Guan-Xin Hao Yong-Qin<sup>†</sup> Zhang Qiu-Bo

(National Key Lab of High-Power Semiconductor Lasers, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

(Received 7 October 2023; revised manuscript received 30 November 2023)

## Abstract

Due to the excellent characteristics such as good beam quality, dynamic single-longitudinal mode, low power consumption, and good wavelength stability, especially easy-to-integrate high-density 2D area arrays, vertical-cavity surface-emitting laser (VCSEL) is widely used in optical identification, optical interconnection systems, optical data storage and other fields. In recent years, with the improvement of materials and process technology, VCSEL has played an increasingly important role in the fields of smartphone face recognition, drone obstacle avoidance, virtual reality/augmented reality (VR/AR), sweeping robots, home cameras, etc., and with the rapid development and application of 5G communication, VCSEL will become an indispensable main component. However, due to the introduction of distributed Bragg mirrors, the thermal effect of VCSEL is very serious, especially when VCSEL is integrated into an array device, current-induced self-heating of each individual array cell and the thermal coupling among array cells have become the major factors contributing to thermal rollover and hence restraining the optical output performance of the VCSEL arrays. Therefore it is of great significance to study the thermal characteristics of VCSELs, in order to solve the problem of thermal crosstalk between single-tube devices, and increase the life of the device. This paper analyzes the influence of cell spacing and arrangement on the thermal crosstalk phenomenon and thermal diffusion performance of VCSEL array device based on the finite element model. The simulation results show that the maximum temperature of the device decays exponentially with the increase of cell spacing, the thermal crosstalk phenomenon and thermal diffusion performance of VCSEL array devices are significantly improved. When the cell spacing is 120  $\mu\text{m}$ , the influence between the cells is small, the thermal crosstalk phenomenon is significantly improved, and the heat dissipation effect is better. On this basis, four non-square VCSEL arrays with 16 cells are designed, and it can be seen that compared with the square arrangement, the isosceles triangle, pentagonal and hexagonal configurations have improved the thermal crosstalk phenomenon and thermal diffusion performance, and the overall temperature rise of the VCSEL array is significantly reduced. The thermal crosstalk phenomenon of the pentagonal arrangement is significantly improved, and the device temperature is 37.32  $^{\circ}\text{C}$ , which is the best effect among several arrangement methods. According to the results of theoretical simulation, the VCSEL array devices with different arrangements are prepared and characterized on the same epitaxial wafer by the same process. From the  $P$ - $I$ - $V$  characteristic curves, it can be seen that the threshold currents of isosceles triangles, pentagons and hexagons are lower than those of the square arrangement, and the maximum output power is higher than that of the square arrangement, especially the maximum output power value of the pentagonal is 150 mW. The results show that the new arrangement can effectively improve the thermal crosstalk phenomenon between the cells, increase the output power of the device, and make the VCSEL array device have good optoelectronic and thermal characteristics.

**Keywords:** vertical cavity surface emitting laser, array, thermal crosstalk, layout method

**PACS:** 42.55.Px

**DOI:** 10.7498/aps.73.20231614

\* Project supported by the Science and Technology Development Plan of Jilin Province, China (Grant No. 20200401073GX).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [hyq72081220@aliyun.com](mailto:hyq72081220@aliyun.com)



## 高功率垂直腔面发射激光器阵列热特性

闫观鑫 郝永芹 张秋波

### Thermal characteristics of high-power vertical cavity surface emitting laser array

Yan Guan-Xin Hao Yong-Qin Zhang Qiu-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 054204 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231614

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231614>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 表面液晶-垂直腔面发射激光器阵列的热特性

Thermal characteristics of surface liquid crystal vertical cavity surface emitting laser arrays

物理学报. 2020, 69(6): 064203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191793>

#### 795 nm亚波长光栅耦合腔垂直腔面发射激光器的超窄线宽特性

Ultra-narrow linewidth characteristics of 795-nm subwavelength grating-coupled cavity vertical cavity surface emitting laser

物理学报. 2021, 70(22): 224207 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210293>

#### 基于单向注入垂直腔面发射激光器系统的密钥分发

Key distribution based on unidirectional injection of vertical cavity surface emitting laser system

物理学报. 2018, 67(20): 204202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181038>

#### 内腔亚波长光栅液晶可调谐垂直腔面发射激光器

Liquid crystal tunable vertical cavity surface emission laser with inner cavity sub-wavelength grating

物理学报. 2021, 70(22): 224208 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210957>

#### 高速850 nm垂直腔面发射激光器的优化设计与外延生长

Optimized design and epitaxy growth of high speed 850 nm vertical-cavity surface-emitting lasers

物理学报. 2018, 67(10): 104205 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172550>

#### 高功率垂直外腔面发射半导体激光器增益设计及制备

Design of gain region of high-power vertical external cavity surface emitting semiconductor laser and its fabrication

物理学报. 2020, 69(5): 054204 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191787>