

双端腔 II 类倍频产生四组份纠缠光场*

郝景晨¹⁾ 杜培林¹⁾²⁾ 孙恒信¹⁾²⁾³⁾ 刘奎¹⁾²⁾³⁾ 张静¹⁾²⁾杨荣国^{1)2)†} 郜江瑞¹⁾²⁾³⁾

1) (山西大学物理电子工程学院, 太原 030006)

2) (山西大学, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

3) (山西大学光电研究所, 太原 030006)

(2023 年 10 月 9 日收到; 2023 年 11 月 30 日收到修改稿)

量子纠缠是执行量子计算和构建量子通信网络的关键资源, 制备与操控纠缠态光场是实现量子信息处理的基础要素. 本文提出了利用双端光学腔倍频产生四组份纠缠态的理论模型, 从耦合波方程出发得到 II 类倍频过程的传输矩阵, 通过腔内自再现方程和输入输出传输矩阵理论研究了输出的两束倍频光的噪声特性; 对于两束倍频光和两束基频泵浦场, 利用多组份纠缠光场的充分必要判据 PPT 方法 (positivity under partial transposition criterion) 分析了最小辛本征值与泵浦功率及分析频率之间的关系, 研究结果表明基频泵浦光与倍频光之间存在四组份纠缠.

关键词: 量子纠缠, 双端光学腔, 光学倍频**PACS:** 42.50.-p, 42.65.-k, 03.67.Bg**DOI:** 10.7498/aps.73.20231630

1 引言

量子信息是量子力学与信息科学相结合的交叉学科, 它以量子系统为基本单元完成信息的处理与传送. 量子纠缠是执行量子计算和构建量子通信网络的关键资源, 制备与操控纠缠态光场是实现量子信息处理的基础要素, 它既可以用于检验量子力学的基本原理, 也可以为实现量子测量以及量子通信^[1-4]提供重要的物理基础. 随着科学技术的发展, 多组份纠缠已被广泛应用于量子通讯和量子离物传态网络^[5,6]、远程克隆^[7-9]、可控密集编码^[10,11]和量子计算^[12-14]等方面. 具有不同频率的多色多组份纠缠由于其在量子信息存储和量子信息通讯方面不可替代的作用变得更加重要. 目前, 产生多组

份纠缠态的方法和装置各式各样^[15,16], 参量下转换作为一种典型的非线性过程, 产生的孪生光子对 (信号光与闲置光) 具有较强的纠缠, 在散粒噪声谱和量子非破坏性测量等方面有重要应用^[17-20]. 除参量下转换外, 光波的倍频产生, 又叫二次谐波产生 (second-order harmonic generation, SHG) 也可用于产生多色多组份纠缠, 且方便地制备下转换不易到达的光谱区域. 倍频过程中的基频光和倍频光的压缩特性以及关联特性已有较多的研究报道^[21-25].

本文提出了利用双端光学腔 II 类倍频产生四组份纠缠态的理论模型, 从倍频耦合波方程出发得到 II 类倍频过程的传输矩阵, 通过腔内自再现方程和输入输出传输矩阵理论研究了输出的两束倍频光的噪声特性. 利用 PPT 判据 (positivity under partial transposition criterion) 研究了两束基频泵

* 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (批准号: 2022YFA1404503, 2021YFC2201802) 和国家自然科学基金 (批准号: 11874248, 11874249, 62027821, 12074233) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yrg@sxu.edu.cn

浦光与两束倍频光之间的量子相关性, 表明在一定的泵浦功率和分析频率范围内存在四组份纠缠态. 该方案的核心装置是一个内置非线性晶体的双端倍频腔, 其器件简单、结构紧凑、实验可行性强, 使用一个光学腔就可以产生多色多组份纠缠态光场, 而且可以通过不同端口、不同波长、不同偏振实现纠缠光束空间上的分离.

2 理论模型及 II 类倍频过程传输矩阵

图 1 为利用双端倍频腔产生四组份纠缠态的理论模型. 其物理过程为: 频率为 ω_1 湮灭算符 $\hat{A}_1$ 的基频光通过偏振分束器 1 (PBS1) 的一个端口进入并与另一个端口湮灭算符 $\hat{a}_0$ 的真空模耦合. 为了实现 II 类相位匹配, 使用半波片 1 (HWP1) 将基频光偏振旋转 45° , 在 HWP1 的输出处得到两束具有湮灭算符 $\hat{B}_1$ 和 $\hat{B}_2$ 频率相同偏振垂直的基频泵浦光. 我们称这两个基频泵浦光为 S 偏振方向的基频泵浦光 1 与 P 偏振方向的基频泵浦光 2. 基频泵浦光 1 与基频泵浦光 2 经输入腔镜 M1 入射到腔内, 从左向右穿过非线性晶体, 产生频率为 ω_2 的倍频光 1, 并从腔镜 M2 完全透射从腔输出, 将这个输出的倍频光称为输出光场 1. 从腔镜 M2 反射回来的基频光从右向左穿过晶体再次发生倍频过程, 产生的倍频光 2 以及部分基频光从腔镜 M1 输出, 称为输出光场 2. 此过程只有基频光在腔内共振, 产生的倍频光直接从双端腔两端腔镜输出.

II 类倍频过程的耦合波方程:

$$\frac{d\hat{B}_1}{dz} = -\kappa\hat{B}_2^\dagger\hat{A}_2e^{-i\Delta kz}, \quad (1a)$$

$$\frac{d\hat{B}_2}{dz} = -\kappa\hat{B}_1^\dagger\hat{A}_2e^{-i\Delta kz}, \quad (1b)$$

$$\frac{d\hat{A}_2}{dz} = \kappa\hat{B}_1\hat{B}_2e^{i\Delta kz}, \quad (1c)$$

其中, $\hat{A}_2$ 是频率为 $\omega_2 = 2\omega_1$ 的倍频场的湮灭算符;

$\hat{B}_1$ 和 $\hat{B}_2$ 是两个具有相同频率 ω_1 但偏振垂直的基频场的湮灭算符. $\kappa = d_{\text{eff}}(2\hbar\omega_1^2\omega_2/n_1^2n_2\varepsilon_0c^2V)^{1/2}$, $E_i = -i(2\hbar\omega_i/\varepsilon_0Vn_i)^{1/2}A_i$, $i = 1, 2$, V 是模态体积, n_i 是在频率 ω_i 处光束的折射率, d_{eff} 是有效二阶非线性系数, 相位失配量 $\Delta k = 2k_1 - k_2$.

对于 II 类相位匹配, 使用基频场各模之间的分束器转换关系, 可以将耦合波方程组 (1) 转化为

$$\frac{d\hat{a}_0}{dz} = \kappa\hat{a}_0^\dagger\hat{A}_2e^{-i\Delta kz}, \quad (2a)$$

$$\frac{d\hat{A}_1}{dz} = -\kappa\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2e^{-i\Delta kz}, \quad (2b)$$

$$\frac{d\hat{A}_2}{dz} = \frac{1}{2}\kappa\left(\hat{A}_1^2 - \hat{a}_0^2\right)e^{i\Delta kz}. \quad (2c)$$

式中, 由于 $\hat{a}_0$ 为真空态, 所以 $\hat{a}_0^2$ 对二次谐波场无作用, 故在线性化近似中这一项对强基频场和二次谐波场的量子涨落没有影响. 由于倍频通常有一个较强的泵浦光, 通过非线性过程产生的二次谐波也很强. 因此, 与场的平均值相比, 可以将量子涨落视为小的扰动.

为了简化计算过程, 根据 Asmstrong 等 [26] 的工作, Li 和 Kumar [27] 定义了新的无量纲变量并将由 (2) 式得到的平均场方程以及量子涨落方程分别变形为以下公式:

$$\frac{du_1}{d\zeta} = -u_1u_2\cos\theta, \quad (3a)$$

$$\frac{du_2}{d\zeta} = u_1^2\cos\theta, \quad (3b)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\Delta s + \left(2u_2 - \frac{u_1^2}{u_2}\right)\sin\theta, \quad (3c)$$

$$\frac{d\phi_1}{d\zeta} = -u_2\sin\theta, \quad (3d)$$

$$\frac{d\phi_2}{d\zeta} = -\frac{u_1^2}{u_2}\sin\theta. \quad (3e)$$

定义新的无量纲变量为

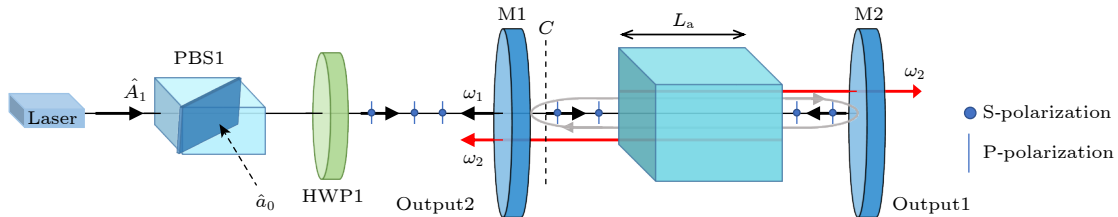


图 1 双端倍频腔产生四组份纠缠态的理论模型

Fig. 1. Theoretical model diagram of quadripartite entanglement generated by a dual-ported singly resonant cavity.

$$u_1 \equiv \frac{|\langle \hat{A}_1(z) \rangle|}{|\langle \hat{A}_1(0) \rangle|}, \quad u_2 \equiv \frac{\sqrt{2}|\langle \hat{A}_2(z) \rangle|}{|\langle \hat{A}_1(0) \rangle|},$$

$$\Delta s \equiv \frac{\sqrt{2}\Delta k}{\kappa|\langle \hat{A}_1(0) \rangle|}, \quad \zeta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|\langle \hat{A}_1(0) \rangle|\kappa z,$$

相位为

$$\phi_1 = \arg\langle \hat{A}_1(z) \rangle, \quad \phi_2 = \arg\langle \hat{A}_2(z) \rangle,$$

$$\theta = \phi_2 - 2\phi_1 - \Delta s\zeta.$$

此外,

$$\frac{d\hat{a}_1}{d\zeta} = -\left(u_2\hat{a}_1^\dagger e^{i\phi_2} + \sqrt{2}u_1\hat{a}_2 e^{-i\phi_1}\right) e^{-i\Delta s\zeta}, \quad (4a)$$

$$\frac{d\hat{a}_2}{d\zeta} = \sqrt{2}u_1\hat{a}_1 e^{i\Delta s\zeta + i\phi_1}. \quad (4b)$$

在线性化近似中, 可以将 (2a) 式中的 $\hat{A}_2$ 替换为它的平均值 $\langle \hat{A}_2 \rangle$, 使用无量纲变量, 将 (2a) 式写为

$$\frac{d\hat{a}_0}{d\zeta} = u_2\hat{a}_0^\dagger e^{i(\phi_2 - \Delta s\zeta)}. \quad (5)$$

为了求解 (4) 式与 (5) 式, 定义正交算符:

$$\hat{x}_l(\zeta) = \left[\hat{a}_l(\zeta) e^{-i\phi(\zeta)} + \hat{a}_l^\dagger(\zeta) e^{i\phi(\zeta)}\right] / 2, \quad (6a)$$

$$\hat{y}_l(\zeta) = \left[\hat{a}_l(\zeta) e^{-i\phi(\zeta)} - \hat{a}_l^\dagger(\zeta) e^{i\phi(\zeta)}\right] / 2i, \quad (6b)$$

其中, $l = 0, 1, 2$ 分别表示真空模, 基频泵浦场以及倍频场. 从 (4) 式和 (5) 式中得到正交算符的方程:

$$\frac{d\hat{x}_0}{d\zeta} = u_2\hat{x}_0 \cos \theta + u_2\hat{y}_0 \sin \theta - \frac{u_2}{u_1^2}\hat{y}_0 \sin \theta, \quad (7a)$$

$$\frac{d\hat{y}_0}{d\zeta} = -u_2\hat{y}_0 \cos \theta + u_2\hat{x}_0 \sin \theta + \frac{u_2}{u_1^2}\hat{x}_0 \sin \theta, \quad (7b)$$

$$\frac{d\hat{x}_1}{d\zeta} = -u_2\hat{x}_1 \cos \theta - 2u_2\hat{y}_1 \sin \theta - \sqrt{2}u_1\hat{x}_2 \cos \theta$$

$$+ \sqrt{2}u_1\hat{y}_2 \sin \theta, \quad (7c)$$

$$\frac{d\hat{y}_1}{d\zeta} = u_2\hat{y}_1 \cos \theta - \sqrt{2}u_1\hat{x}_2 \sin \theta - \sqrt{2}u_1\hat{y}_2 \cos \theta, \quad (7d)$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{d\zeta} = \sqrt{2}u_1\hat{x}_1 \cos \theta + \sqrt{2}u_1\hat{y}_1 \sin \theta - \frac{u_1^2}{u_2}\hat{y}_2 \sin \theta, \quad (7e)$$

$$\frac{d\hat{y}_2}{d\zeta} = -\sqrt{2}u_1\hat{x}_1 \sin \theta + \sqrt{2}u_1\hat{y}_1 \cos \theta + \frac{u_1^2}{u_2}\hat{x}_2 \sin \theta. \quad (7f)$$

由于在倍频实验中完美相位匹配的条件下可以实现谐波转化效率最大化, 故要求 $\theta = 0$. 此时将方程组 (3) 中 u_1, u_2 的解代入方程组 (7), 求得

方程组 (7) 的解为

$$\hat{x}_0(\zeta) = \hat{x}_0(0) \cosh \zeta, \quad (8a)$$

$$\hat{y}_0(\zeta) = \hat{y}_0(0) \operatorname{sech} \zeta, \quad (8b)$$

$$\hat{x}_1(\zeta) = \hat{x}_1(0) (1 - \zeta \tanh \zeta) \operatorname{sech} \zeta$$

$$- \sqrt{2}\hat{x}_2(0) \tanh \zeta \operatorname{sech} \zeta, \quad (8c)$$

$$\hat{y}_1(\zeta) = \hat{y}_1(0) \operatorname{sech} \zeta - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y}_2(0) (\sinh \zeta + \zeta \operatorname{sech} \zeta), \quad (8d)$$

$$\hat{x}_2(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}_1(0) (\tanh \zeta + \zeta \operatorname{sech}^2 \zeta) + \hat{x}_2(0) \operatorname{sech}^2 \zeta, \quad (8e)$$

$$\hat{y}_2(\zeta) = \sqrt{2}\hat{y}_1(0) \tanh \zeta + \hat{y}_2(0) (1 - \zeta \tanh \zeta). \quad (8f)$$

随后, 利用基频场各模态之间的关系式对变量 $\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2$ 进行计算, 即可得到 II 类倍频传输矩阵 $\mathbf{N}(\zeta_i)$ 中各个元素表达式. II 类倍频传输矩阵为一个 6×6 的矩阵:

$$\mathbf{N}(\zeta_i) = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & 0 & 0 & 0 \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & N_{45} & N_{46} \\ 0 & 0 & 0 & N_{54} & N_{55} & N_{56} \\ 0 & 0 & 0 & N_{64} & N_{65} & N_{66} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

传输矩阵 $\mathbf{N}(\zeta_i)$ 中的元素如下:

$$N_{11}(\zeta) = \frac{\cosh \zeta + \operatorname{sech} \zeta - \zeta \operatorname{sech} \zeta \tanh \zeta}{2},$$

$$N_{12}(\zeta) = \frac{-\cosh \zeta + \operatorname{sech} \zeta - \zeta \operatorname{sech} \zeta \tanh \zeta}{2},$$

$$N_{13}(\zeta) = -\tanh \zeta \operatorname{sech} \zeta,$$

$$N_{21}(\zeta) = \frac{-\cosh \zeta + \operatorname{sech} \zeta - \zeta \operatorname{sech} \zeta \tanh \zeta}{2},$$

$$N_{22}(\zeta) = \frac{\cosh \zeta + \operatorname{sech} \zeta - \zeta \operatorname{sech} \zeta \tanh \zeta}{2},$$

$$N_{23}(\zeta) = -\tanh \zeta \operatorname{sech} \zeta,$$

$$N_{31}(\zeta) = \frac{\tanh \zeta + \zeta \operatorname{sech}^2 \zeta}{2},$$

$$N_{32}(\zeta) = \frac{\tanh \zeta + \zeta \operatorname{sech}^2 \zeta}{2},$$

$$N_{33} = \operatorname{sech}^2 \zeta, \quad N_{44} = \operatorname{sech} \zeta, \quad N_{45} = 0,$$

$$N_{46} = -\frac{\sinh \zeta + \zeta \operatorname{sech} \zeta}{2},$$

$$\begin{aligned} N_{54} &= 0, \quad N_{55} = \operatorname{sech} \zeta, \\ N_{56} &= -(\sinh \zeta + \zeta \operatorname{sech} \zeta)/2, \quad N_{64}(\zeta) = \tanh \zeta, \\ N_{65}(\zeta) &= \tanh \zeta, \quad N_{66}(\zeta) = 1 - \zeta \tanh \zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

3 倍频场量子噪声计算

在双端倍频腔理论模型中, 我们认为内腔基频场与倍频场在稳态条件是自再现的, 将参考位置设置在腔镜 M1 右边 C 处位置, 该位置处内腔场湮灭算符为 $\hat{a}_{iC}$, 即

$$\begin{aligned} \hat{a}_{iC}(t + \tau) &= \mathbf{r}_1 \mathbf{N}(\zeta_1) \mathbf{r}_2 \mathbf{N}(\zeta_2) \hat{a}_{iC}(t) + \mathbf{t}_1 \hat{b}_{i1}(t) \\ &\quad + \mathbf{r}_1 \mathbf{N}(\zeta_2) \mathbf{t}_2 \hat{b}_{i2}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

这里 $i = 1, 2$ 分别代表基频场和二次谐波场, $\hat{b}_{ij}(t)$ 是频率为 i 在镜子 j 处引入的真空噪声. $j = 1, 2$ 代表腔镜 M1, M2. τ 是光在腔内传播一周所用的时间.

本文忽略了由于晶体吸收和晶体表面反射导致的内腔损耗, 对于腔镜 M1, M2 的透射和反射用非零对角元 6×6 矩阵表示:

$$\mathbf{t}_j = \operatorname{diag} \left(\sqrt{T_{1j}}, \sqrt{T_{1j}}, \sqrt{T_{2j}}, \sqrt{T_{1j}}, \sqrt{T_{1j}}, \sqrt{T_{2j}} \right), \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j = \operatorname{diag} \left(\sqrt{1 - T_{1j}}, \sqrt{1 - T_{1j}}, \sqrt{1 - T_{2j}}, \sqrt{1 - T_{1j}}, \right. \\ \left. \sqrt{1 - T_{1j}}, \sqrt{1 - T_{2j}} \right). \end{aligned} \quad (12b)$$

式中, T_{ij} 为频率为 i 在腔镜 j 处的功率透射率. $\mathbf{N}(\zeta_i)$ 是单次穿过晶体过程的传输矩阵, 它表示为晶体内部任意非线性作用长度时的光场量子噪声的输入输出关系, 其中, 穿过晶体的归一化传输长度为

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\varepsilon_1 E_{\text{NL1}} P_{\text{in}}}}, \quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\varepsilon_2 E_{\text{NL2}} P_{\text{in}}}}.$$

这里引入了非线性转化效率 $\varepsilon_1 = P_{21}/P_{\text{in}}$, $\varepsilon_2 = P_{22}/P_{\text{in}}$, P_{21} 和 P_{22} 为往返穿过晶体的倍频光功率, P_{in} 代表注入光学腔的泵浦功率. E_{NL1} 和 E_{NL2} 为往返晶体的单次转化效率:

$$E_{\text{NL}} = \frac{2\omega_1^2 d_{\text{eff}}^2}{\varepsilon_0 c^3 n_1^2 n_2} \frac{L_a^2}{\pi \omega^2} |h|^2,$$

$$h = \int_{-1/2}^{1/2} d\xi \frac{e^{i\Delta k L_a \xi}}{1 + i(L_a/z_{R1})\xi},$$

其中, L_a 是晶体的长度, c 是真空中光速, $z_{R1} = \pi n_1 \omega_1 w^2 / (2\pi c)$ 是基频光的瑞利长度.

将时域内的自再现方程 (11) 变为频域内的傅里叶自再现形式:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{iC}(\omega) e^{i\omega\tau} &= \mathbf{r}_1 \mathbf{N}(\zeta_1) \mathbf{r}_2 \mathbf{N}(\zeta_2) \hat{a}_{iC}(\omega) + \mathbf{t}_1 \hat{b}_{i1}(\omega) \\ &\quad + \mathbf{r}_1 \mathbf{N}(\zeta_2) \mathbf{t}_2 \hat{b}_{i2}(\omega). \end{aligned} \quad (13)$$

通过使用光场的正交振幅与正交位相定义:

$$\begin{aligned} x_{iC}(\omega) &= a_{iC}(\omega) + a_{iC}^*(\omega), \\ y_{iC}(\omega) &= -i[a_{iC}(\omega) - a_{iC}^*(\omega)], \\ u_{ij}(\omega) &= b_{ij}(\omega) + b_{ij}^*(\omega), \\ v_{ij}(\omega) &= -i[b_{ij}(\omega) - b_{ij}^*(\omega)]. \end{aligned} \quad (14)$$

我们可以得到基频场与倍频场的正交振幅与正交位相的向量表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_C &= [I - D \mathbf{r}_1 \mathbf{N}(\zeta_2) \mathbf{r}_2 \mathbf{N}(\zeta_1)]^{-1} \\ &\quad \times D [\mathbf{t}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{r}_1 \mathbf{N}(\zeta_2) \mathbf{t}_2 \mathbf{V}_2], \end{aligned} \quad (15)$$

其中, 内腔基频和倍频场的量子起伏列向量表示为

$$\mathbf{X}_C = (x_{1C}, x_{1C}, x_{2C}, y_{1C}, y_{1C}, y_{2C})^T.$$

这里, x 和 y 表示正交振幅和正交位相分量, 右下标 1 和 2 分别表示基频和倍频, C 是自再现方程的位置. $\mathbf{V}_j$ 代表由腔镜 M1, M2 引入的真空噪声, 真空噪声列向量表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j &= (u_{1j}(\omega), u_{1j}(\omega), u_{2j}(\omega), v_{1j}(\omega), \\ &\quad v_{1j}(\omega), v_{2j}(\omega))^T, \end{aligned}$$

这里 u_{1j} 和 v_{1j} 是频域内基频光的正交振幅和正交位相噪声, u_{2j} 和 v_{2j} 是倍频光正交噪声. ω 为分析频率. 矩阵 $D = \operatorname{diag}(e^{i\omega/v_{c1}}, e^{i\omega/v_{c1}}, e^{i\omega/v_{c2}}, e^{i\omega/v_{c1}}, e^{i\omega/v_{c1}}, e^{i\omega/v_{c2}})$ 为内腔场环形一周引起的相移, $v_{ci} = c/(2L_c + 2n_i L_a)$ 是腔的自由光谱区, L_c 为腔中空气的长度.

输出光场 1 与输出光场 2 的正交振幅和位相的列向量表示为 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$,

$$\mathbf{X}_1 = (X_{12}^1, X_{12}^2, X_{22}, Y_{12}^1, Y_{12}^2, Y_{22})^T, \quad (16a)$$

$$\mathbf{X}_2 = (X_{11}^1, X_{11}^2, X_{21}, Y_{11}^1, Y_{11}^2, Y_{21})^T, \quad (16b)$$

其中, X_{ij}^k (Y_{ij}^k) 表示腔镜 j 处基频光 k 的正交振幅 (位相), X_{2j} (Y_{2j}) 表示腔镜 j 处倍频光的正交振幅 (位相).

$\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 可以由腔内自再现项表示为

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{t}_2 \mathbf{N}(\zeta_1) \mathbf{X}_C - \mathbf{r}_2 \mathbf{V}_2, \quad (17a)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t}_1 \mathbf{N}(\zeta_2) \mathbf{r}_2 \mathbf{N}(\zeta_1) \mathbf{X}_C - \mathbf{r}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{t}_1 \mathbf{N}(\zeta_2) \mathbf{t}_2 \mathbf{V}_2. \quad (17b)$$

由于基频场在腔内共振, 产生的倍频场在两个

腔镜中全部透射, 所以 $T_{12}^1 = T_{12}^2 = 0$ 和 $T_{21} = T_{22} = 1$. 接着, 通过上述腔内自再现方程得到 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 列向量中对应的元素 $X_{1j}^k, Y_{1j}^k, X_{2j}, Y_{2j}$.

下面讨论两个二次谐波的归一化噪声谱, $\Omega = \frac{\omega}{v_{cj}\gamma}$, 为归一化到腔带宽的频率:

$$S_{Xj} = \frac{\langle X_{2j}(\Omega) X_{2j}^*(\Omega) \rangle}{\langle u_{21}(\Omega) u_{21}^*(\Omega) \rangle}, \quad (18a)$$

$$S_{Yj} = \frac{\langle Y_{2j}(\Omega) Y_{2j}^*(\Omega) \rangle}{\langle v_{21}(\Omega) v_{21}^*(\Omega) \rangle}. \quad (18b)$$

根据上述方程, 可以得到两束倍频光随泵浦功率 P_{in} 的噪声谱, 如图 2 所示. 两束倍频光都是正交振幅噪声压缩, 正交位相是反压缩的, 并且可以

发现, 两束光的正交噪声大小略有差异. 这是由于腔内基频场从左向右第一次穿过晶体时有一小部分转化为倍频光, 导致基频场从右向左穿过晶体时的功率略小于第一次穿过晶体时的基频场功率.

4 利用 PPT 判据研究四模纠缠特性

通过 PPT 判据求解所有光模的部分转置协方差矩阵的最小辛本征值来度量多组份纠缠. 该判据为纠缠的充分必要判据, 辛本征值越小纠缠度越大 [28,29]. 首先, 双端倍频腔产生独立的可分离的四个光束, 用 11, 12, 21, 22 分别表示基频光 1, 基频光 2, 倍频光 1, 倍频光 2, 该系统的协方差矩阵写为

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c_{11,11}^x & 0 & c_{11,12}^x & 0 & c_{11,21}^x & 0 & c_{11,22}^x & 0 \\ 0 & c_{11,11}^y & 0 & c_{11,12}^y & 0 & c_{11,21}^y & 0 & c_{11,22}^y \\ c_{12,11}^x & 0 & c_{12,12}^x & 0 & c_{12,21}^x & 0 & c_{12,22}^x & 0 \\ 0 & c_{12,11}^y & 0 & c_{12,12}^y & 0 & c_{12,21}^y & 0 & c_{12,22}^y \\ c_{21,11}^x & 0 & c_{21,12}^x & 0 & c_{21,21}^x & 0 & c_{21,22}^x & 0 \\ 0 & c_{21,11}^y & 0 & c_{21,12}^y & 0 & c_{21,21}^y & 0 & c_{21,22}^y \\ c_{22,11}^x & 0 & c_{22,12}^x & 0 & c_{22,21}^x & 0 & c_{22,22}^x & 0 \\ 0 & c_{22,11}^y & 0 & c_{22,12}^y & 0 & c_{22,21}^y & 0 & c_{22,22}^y \end{pmatrix}. \quad (19)$$

这里, $c_{p,q}^x (p, q = 11, 12, 21, 22)$ 表示四个输出模正交振幅的关联项, $c_{p,q}^y (p, q = 11, 12, 21, 22)$ 表示正交位相的关联项.

对协方差矩阵进行全等变换, $\mathbf{v}' = \mathbf{S}^T \mathbf{v} \mathbf{S}$, 得到新矩阵 $\mathbf{v}'$, 其中 $\mathbf{S}$ 为辛变换矩阵, 表达式为

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}_1 \oplus \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

其中 $\mathbf{I}_1$ 是一个 4×4 的单位矩阵, 对于模 k 的部分转置相当于改变模 k 的正交位相的迹, 因此模 k 的部分转置协方差矩阵可以表示为 $\mathbf{v}'^{(T_k)} = \mathbf{T}_k \mathbf{v}' \mathbf{T}_k^T$, 这里 $\mathbf{T}_k$ 为一个 $2N \times 2N$ 的对角矩阵, 除 $T_{2k,2k} = -1$ 外, 其他所有对角元素均为 1. 对部分转置协方差矩阵进行区域对角化, 对角化矩阵 $\mathbf{J}_N = \bigoplus_{i=1}^N i\sigma_y$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. 随后, 求区域对角化后矩阵的最小辛本征值来度量纠缠.

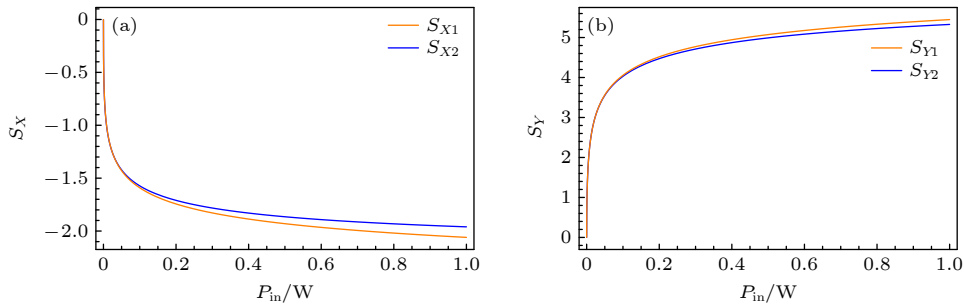


图 2 双端腔倍频产生的两束倍频光的噪声特性 (a) 正交振幅噪声的压缩谱; (b) 正交位相噪声的反压缩谱

Fig. 2. Output squeezing spectra of the harmonic fields: (a) Compression spectrum of orthogonal amplitude noise; (b) inverse compression spectrum of orthogonal phase noise.

这里, 选择长度为 1 cm 的 KTP 作为非线性晶体, 最佳焦距为 21.1 μm , 参数为 $E_{\text{NL1}} = E_{\text{NL2}} = 0.015$, $n_1 = n_2 = 2.1$, $d_{\text{eff}} = 11 \text{ pm/V}$, $T_{ij} = 0.04$, $\lambda = 1560 \text{ nm}$, 皆为实验可行性参数^[21-23,30].

当 $\Omega = 0$ 时, 四个光场的部分转置协方差矩阵的最小辛本征值随泵浦功率的变化如图 3 所示. 在一定的泵浦功率范围内, 部分转置矩阵对应的最小辛本征值均小于 1, 说明在合适的腔参数条件下, 四组份纠缠存在. 随着泵浦功率的增大, 纠缠趋于饱和. 由图 3(b) 和图 3(c) 可以看出, 两条曲线在较大的功率处有略微差异, 这是由于腔内基频泵浦功率不可避免的衰减导致, 因为从左向右的基频场在第一次穿过晶体时有一小部分转化为了倍频光使得腔内从右向左的基频场功率略小于从左往右的基频场功率, 但在稳态条件下左端腔镜处源源

不断有基频光注入, 内腔基频场整体平衡.

当 $P_{\text{in}} = 2 \text{ W}$ 时, 光场部分转置矩阵对应的最小辛本征值随分析频率的变化如图 4 所示. 这里, $\Omega = \frac{\omega}{v_{\text{cj}}\gamma}$, $\gamma = 0.01$. 从图 4 可以看出, 在一定频率范围内, 四组份纠缠都存在且在零频处存在最大的纠缠. 随着分析频率的增加, 四组份纠缠逐渐减弱. 图 4(a) 可以发现, $\Omega < 0.05$ 时, 两束基频光的纠缠强于两束倍频光的纠缠, 随着分析频率的增加, 两束基频光的纠缠度下降快于两束倍频光的纠缠度导致两束倍频光的纠缠逐渐强于两束基频光的纠缠. 图 4(b) 和图 4(c) 中的两条曲线略有差异, 是由于腔内基频泵浦功率不可避免的衰减所造成.

实验上, 可以利用基频、倍频光双波长输出的激光器, 将基频泵浦光注入到内含 KTP 晶体的双

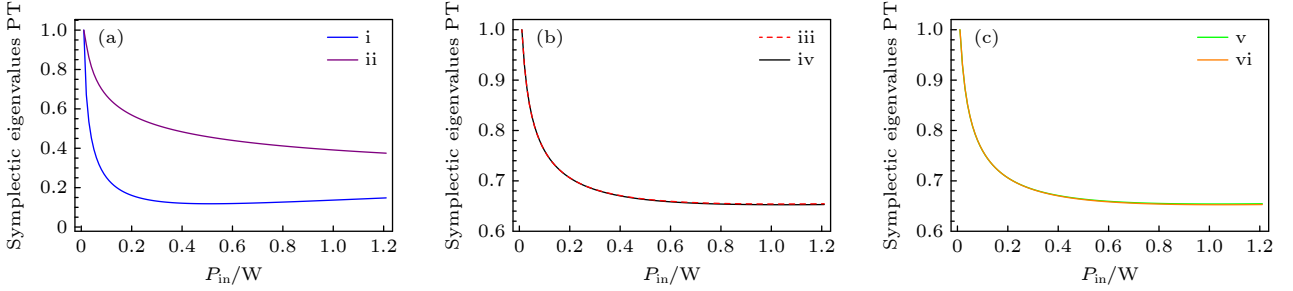


图 3 最小辛本征值与泵浦功率 P_{in} 的关系图 (a) i 表示两束基频光的纠缠, ii 表示两束倍频光的纠缠; (b) iii 表示基频光 1 与倍频光 1 的纠缠, iv 表示基频光 1 与倍频光 2 的纠缠; (c) v 表示基频光 2 与倍频光 1 的纠缠, vi 表示基频光 2 与倍频光 2 的纠缠

Fig. 3. Lines about symplectic eigenvalues are plotted as functions of P_{in} when $\Omega = 0$: (a) i represents the entanglement of two fundamental beams, ii represents the entanglement of two frequency-doubling beams; (b) iii represents the entanglement of fundamental beam1 and frequency-doubling beam1, iv represents the entanglement of fundamental beam1 and frequency-doubling beam2; (c) v represents the entanglement of fundamental beam2 and frequency-doubling beam1, vi represents the entanglement of fundamental beam2 and frequency-doubling beam2.

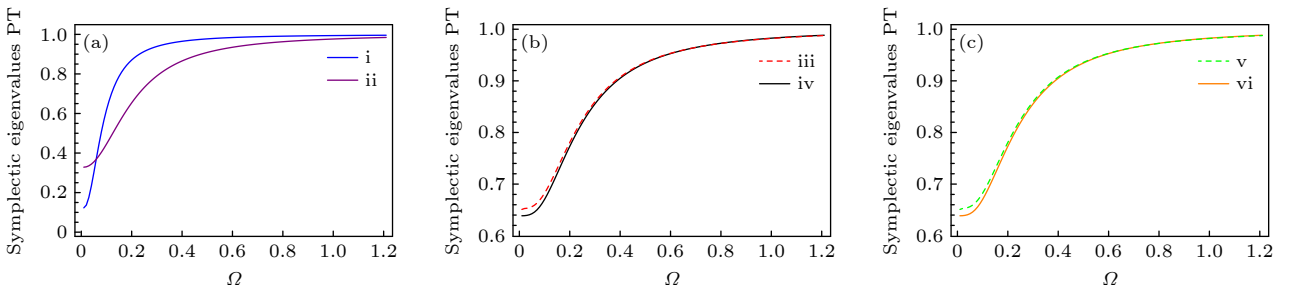


图 4 最小辛本征值与归一化到腔带宽频率 Ω 的关系图 (a) i 表示两束基频光的纠缠, ii 表示两束倍频光的纠缠; (b) iii 表示基频光 1 与倍频光 1 的纠缠, iv 表示基频光 1 与倍频光 2 的纠缠; (c) v 表示基频光 2 与倍频光 1 的纠缠, vi 表示基频光 2 与倍频光 2 的纠缠

Fig. 4. Lines about symplectic eigenvalues are plotted as functions of Ω when $P_{\text{in}} = 2 \text{ W}$: (a) i represents the entanglement of two fundamental beams, ii represents the entanglement of two frequency-doubling beams; (b) iii represents the entanglement of fundamental beam1 and frequency-doubling beam1, iv represents the entanglement of fundamental beam1 and frequency-doubling beam2; (c) v represents the entanglement of fundamental beam2 and frequency-doubling beam1, vi represents the entanglement of fundamental beam2 and frequency-doubling beam2.

端光学倍频腔中, 从双端腔中得到四个输出光场. 分别利用基频、倍频双波长本地光搭建四套平衡零拍探测器, 通过锁定相对相位, 测量各个光场的正交振幅与正交位相噪声, 由此构建一个 8×8 的协方差矩阵, 对协方差矩阵进行分析研究, 得到输出光场之间的纠缠特性. 此外, 也可以采用分析腔扫描的方法来测得每一个光场的量子噪声^[31], 再构建协方差矩阵, 分析辛本征值所反映的量子纠缠特性.

5 总 结

本文提出了双端光学腔 II 类倍频过程产生四组份纠缠的理论模型, 并用 PPT 充分必要判据研究给出了四模纠缠特性. 光学倍频过程作为一种产生多组份纠缠态方法, 实验结构简单, 产生的功率大, 易于短波长光场的制备, 结合能对应 1560 nm 光纤低损耗窗口和 780 nm 的 Rb 原子吸收线优势, 可以为量子通讯网络和量子存储奠定相应的量子资源, 有助于促进量子通讯网络的发展.

参考文献

- [1] Tang J F, Hou Z B, Shang J W, Zhu H J, Xiang G Y, Li C F, Guo G C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 060502
- [2] Xie B Y, Feng S 2021 *Chin. Opt. Lett.* **19** 072701
- [3] Brendel J, Gisin N, Tittel W, Zbinden H 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2594
- [4] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2004 *Science* **306** 1330
- [5] Avis G, Rozpedek F, Wehner S 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012609
- [6] Bugalho L, Coutinho B C, Monteiro F A, Omar Y 2023 *Quantum* **7** 920
- [7] Karpow E, Navez P, Gerf N J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 040301
- [8] Wang X W, Yang G J 2009 *Phys. Rev. A* **79** 062315
- [9] Das S, Halder P, Banerjee R, Sen A 2023 *Phys. Rev. A* **107** 042414
- [10] Jing J T, Zhang J, Yan Y, Zhao F G, Xie C D, Peng K C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 167903
- [11] Navascues M, Wolfe E, Rosset D, Pozas-Kerstjens A 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 240505
- [12] Menicucci N C, van Loock P, Gu M, Weedbrook C, Ralph T C, Nielsen M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 110501
- [13] Bruch D, Macchiavello C 2011 *Phys. Rev. A* **83** 052313
- [14] Su X L, Hao S H, Deng X W, Ma L Y, Wang M H, Jia X J, Xie C D, Peng K P 2013 *Nat. Commun.* **4** 2828
- [15] Yu S, Liu H Z, Liu S S, Jing J T 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 090303 (in Chinese) [余胜, 刘焕章, 刘胜帅, 荆杰泰 2020 物理学报 **69** 090303]
- [16] Du P L, Wang Y, Liu K, Yang R G, Zhang J 2023 *Opt. Express* **31** 7535
- [17] He Y Q, Ding D, Peng T, Yan F L, Gao T 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 060302 (in Chinese) [何英秋, 丁东, 彭涛, 闫凤利, 高亭 2018 物理学报 **67** 060302]
- [18] Ding D, He Y Q, Yan F L, Gao T 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 160301 (in Chinese) [丁东, 何英秋, 闫凤利, 高亭 2015 物理学报 **64** 160301]
- [19] Zhang Y, Hou F Y, Liu T, Zhang X F, Zhang S G, Dong R F 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 144204 (in Chinese) [张越, 侯飞雁, 刘涛, 张晓斐, 张首刚, 董瑞芳 2018 物理学报 **67** 144204]
- [20] Leng H Y, Wang J F, Yu Y B, Yu X Q, Xu P, Xie Z D, Zhao J S, Zhu S N 2009 *Phys. Rev. A* **79** 032337
- [21] Lim O K, Saffman M 2006 *Phys. Rev. A* **74** 023816
- [22] Zhai S Q, Yang R G, Liu K, Zhang H L, Zhang J X, Gao J R 2009 *Opt. Express* **17** 9851
- [23] Yang R G, Zhai S Q, Liu K, Zhang J X, Gao J R 2010 *J. Opt. Soc. Am. B* **27** 2721
- [24] Xue X X, Leo F, Xuan Y, Jaramillo-Villegas J A, Wang P H, Leaird D E, Erkintalo M, Qi M H, Weiner Andrew M 2017 *Light: Sci. Appl.* **6** e16253
- [25] Barral D, Bencheikh K, Belabas N, Levenson J A 2019 *Phys. Rev. A* **99** 051801
- [26] Armstrong J A, Bloembergen N, Ducuing J, Pershan P S 1962 *Phys. Rev.* **127** 1918
- [27] Li R D, Kumar P 1994 *Phys. Rev. A* **49** 2157
- [28] Simón R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726
- [29] Bohnet-Waldraff F, Braun D, Giraud O 2016 *Phys. Rev. A* **94** 042343
- [30] Feng J X 2008 *Ph. D. Dissertation* (Shanxi: Shanxi University) (in Chinese) [冯晋霞 2008 博士学位论文 (太原: 山西大学)]
- [31] Villar A S, Cruz L S, Cassemiro K N, Martinelli M, Nussenzveig P 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 243603

Quadripartite entanglement from two-port resonator with second-order harmonic generation*

Hao Jing-Chen¹⁾ Du Pei-Lin¹⁾²⁾ Sun Heng-Xin¹⁾²⁾³⁾ Liu Kui¹⁾²⁾³⁾

Zhang Jing¹⁾²⁾ Yang Rong-Guo^{1)2)†} Gao Jiang-Rui¹⁾²⁾³⁾

¹⁾ (College of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

²⁾ (State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

³⁾ (Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 9 October 2023; revised manuscript received 30 November 2023)

Abstract

Quantum entanglement is a crucial resource for performing quantum computing and constructing quantum communication networks. The preparation and manipulation of entangled light field are the basic elements of quantum communication. With the development of science and technology, multicolor multipartite entanglement is becoming a kind of special resource for quantum information, quantum networks, and quantum memory. In this paper, we propose a scheme of generating quadripartite entanglement among four output beams from a two-port frequency doubling resonator, in which a type-II phase matching nonlinear crystal is placed. We make two fundamental-frequency pump beams with the same frequency and vertical polarization pass through the nonlinear crystal to produce two frequency-doubling beams. There is a quadripartite entanglement between the frequency-doubling beams, which are output at two ports of the optical resonator, and the incident fundamental beams. Based on the transmission matrix from the coupled wave equation, the self-consistent equations of the intracavity modes and the corresponding noise properties of the output modes can be obtained. Then, the quadripartite entanglement produced from two second harmonic beams and two reflected fundamental-frequency pump beams, is verified by using the positive partial transposition criterion, in a wide range of pumping power and analysis frequency. The setup proposed in this work is compact and experimentally feasible. It is also convenient to separate the four entangled beams spatially, with different wavelengths and polarizations. When the beam wavelengths are matched with 1560 nm (low loss window of fiber) and 780 nm (atomic absorption line of Rb), this scheme can be more useful in both quantum communication and quantum memory.

Keywords: quantum entanglement, two-port frequency doubling resonator, positive partial transposition criterion

PACS: 42.50.-p, 42.65.-k, 03.67.Bg

DOI: [10.7498/aps.73.20231630](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231630)

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant Nos. 2022YFA1404503, 2021YFC2201802) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11874248, 11874249, 62027821, 12074233).

† Corresponding author. E-mail: yrg@sxu.edu.cn



双端腔 II 类倍频产生四组份纠缠光场

郝景晨 杜培林 孙恒信 刘奎 张静 杨荣国 郜江瑞

Quadripartite entanglement from two-port resonator with second-order harmonic generation

Hao Jing-Chen Du Pei-Lin Sun Heng-Xin Liu Kui Zhang Jing Yang Rong-Guo Gao Jiang-Rui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 074203 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231630

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231630>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

与热库耦合的光学腔内三原子间的纠缠动力学

Entanglement dynamics of three atoms in optical cavity coupled to reservoir

物理学报. 2018, 67(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172546>

级联四波混频系统中纠缠增强的量子操控

Quantum manipulation of entanglement enhancement in cascaded four-wave-mixing process

物理学报. 2019, 68(9): 094205 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181837>

量子纠缠与宇宙学弗里德曼方程

Quantum entanglement and cosmological Friedmann equations

物理学报. 2018, 67(17): 179501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180813>

基于四波混频过程的纠缠光放大

Amplification of entangled beam based on four-wave mixing process

物理学报. 2022, 71(5): 050301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211324>

基于金刚石氮-空位色心自旋系综与超导量子电路混合系统的量子节点纠缠

Entanglement of quantum node based on hybrid system of diamond nitrogen-vacancy center spin ensembles and superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172634>

级联四波混频相干反馈控制系统量子纠缠特性

Quantum entanglement in coherent feedback system based on the cascaded four wave mixing processes

物理学报. 2020, 69(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200042>