

# 电磁感应下分数阶神经网络动力学行为分析及应用

丁大为 王谋媛 王金 杨宗立<sup>†</sup> 牛炎 王威

(安徽大学电子信息工程学院, 合肥 230601)

(2023 年 11 月 12 日收到; 2024 年 3 月 31 日收到修改稿)

忆阻器可以用来模拟生物神经突触和描述电磁感应效应. 为了探索电磁感应作用下异构神经网络的动力学行为, 本文首先使用双局部有源忆阻器耦合一个 Hindmarsh-Rose (HR) 和两个 FitzHugh-Nagumo (FN) 神经元, 构成忆阻电磁感应下分数阶异构神经网络. 然后利用相图、分岔图、李雅普诺夫指数谱和吸引盆等动力学分析方法, 对该网络进行数值研究. 结果表明该神经网络表现出丰富的动力学行为, 包括共存行为、反单调现象、瞬态混沌和放电行为等, 为研究人脑放电行为提供支持, 随后进一步利用时间反馈控制方法实现了双稳态的控制. 最后, 在嵌入式硬件平台上实现了该神经网络, 验证了仿真结果的有效性.

**关键词:** 忆阻电磁感应, 分数阶神经网络, 吸引子共存, 反单调性

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Jn

**DOI:** 10.7498/aps.73.20231792

## 1 引言

人类的大脑是一个由大约 1000 亿个神经元组成的异质结构. 每个神经元通过突触与成千上万个其他神经元连接建立一个复杂的网络<sup>[1]</sup>. 在理解和探索大脑的过程中, 学者们提出了一些单神经元模型和人工神经网络模型. 1952 年, 生物学家进行了大量的生物学研究, 提出了一个四维 Hodgkin-Huxley (HH) 神经元模型<sup>[2]</sup>, 这是第一个具有完整数学表示的生物神经元数学模型. 随后, 其他模型也相继被提出, 如 Izhikevich 神经元<sup>[3]</sup>, Morris-Lecar (ML) 神经元<sup>[4]</sup>, 二维 Hindmarsh-Rose (HR) 神经元<sup>[5]</sup>, 三维 HR 神经元<sup>[6]</sup>, FN (FitzHugh-Nagumo) 神经元<sup>[7]</sup>, Chay 神经元<sup>[8]</sup> 和 Rulkov 神经元<sup>[9]</sup> 等. 这些生物神经元模型用非线性微分方程表示, 每个参数都具有独特的生物意义.

神经元通过电突触或化学突触连接起来构成神经网络. 近年来, 在基于神经元的小网络耦合动力学方面取得了充分的进展. Li 等<sup>[10]</sup> 通过将 HR 和 FN 神经元与双稳态、双局部有源忆阻器相结

合, 创建了一个独特的神经网络, 研究其共存放电行为和相位同步现象. Ding 等<sup>[11]</sup> 研究了分数阶超混沌神经网络中隐藏的共存吸引子, 该神经网络由两个异构神经元和一个忆阻突触组成. Njitacke 等<sup>[12]</sup> 构建了两个二维 HR 神经元和一个 FN 神经元组成的三神经网络, 进行了哈密顿能量计算和复杂的动力学行为研究. 在文献<sup>[13]</sup> 中耦合 i 型 (FN 神经元) 和 ii 型 (ML 神经元) 神经元探索了该网络中丰富的动力学行为. 由上述研究的结果可知, 研究异质神经元之间的耦合情况对于更准确地模拟人类神经元具有重要意义<sup>[14-16]</sup>.

噪声和电磁感应等外部刺激与真实的电生理环境有关, 影响神经系统的动力学行为. 当代工业的发展所带来的电气设备的广泛使用, 使神经系统暴露于一个富含电磁感应的环境中, 这对单个神经元和神经网络的动力学行为都有重大影响. 近年来, 研究电磁感应对人体的影响已成为一个热点问题, 因此, 深入研究电磁感应对神经元的影响具有重要的现实意义. 适当的电磁辐射可以诱导神经元的间歇性同步, 然而过度的电磁辐射会促进神经系统的紊乱<sup>[17]</sup>. Hu 等<sup>[18]</sup> 构建并分析了一个由三个神

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: 07115@ahu.edu.cn

经元组成的小 Hopfield 神经网络, 模拟结果表明改变电磁辐射下的神经元数量可以改变神经网络的行为. 为了模拟电磁感应和电磁辐射对 Hopfield 神经网络的影响, Wan 等<sup>[19]</sup>分别采用双曲型忆阻器和二次非线性忆阻器进行了研究, 结果表明, 受电磁感应影响的网络表现出复杂的动力学行为, 可以为某些神经疾病的发生机制提供新的见解.

忆阻器是描述电荷和磁通的一种具有记忆特性的电子元器件. 由于具有可塑性和非易失记忆性, 忆阻器已成为继电阻、电感和电容之后的不可替代的第 4 个基本电路元件, 它经常被用于大脑神经网络的研究<sup>[20-22]</sup>. 忆阻器可用于模拟生物神经突触, 表征两个神经元膜电位之间的电位差产生的感应电流<sup>[23]</sup>. Xu 等<sup>[24]</sup>提出了一种基于三变量忆阻器的 Wilson 神经元模型. 使用动力学分析方法深入研究了忆阻器参数和初始条件相关的电活动. 结果表明, 忆阻 Wilson 神经元模型可以表现出丰富的动力学行为, 包括不对称共存的吸引子和反单调现象. 通过在 HR 神经元模型中引入一个阈值通量控制的忆阻器, 可以模拟电磁感应的阈值效应, 揭示了隐藏爆发放电行为<sup>[25]</sup>. 此外, 利用通量控制的忆阻器作为电磁感应建立了一个由两个相邻的 HR 神经元组成的模型, 并发现了共存放电行为和初始值相关的分岔行为<sup>[26]</sup>. 因此, 探索忆阻电磁感应下新模型的动力学行为具有重要的现实意义.

分数阶微积分作为一种精确而灵活的数学工具, 已被广泛用于描述和分析现实世界中错综复杂的现象, 其应用前景极为广泛, 深入到了诸如股票市场<sup>[27,28]</sup>、电力系统<sup>[29,30]</sup>等多个领域, 为这些领域的研究开辟了新视角并提供了有力工具. 在忆阻器领域, 这种具有记忆功能的非线性电阻与分数阶微积分的无限记忆和遗传特性高度契合. 通过应用分数阶理论, 能够更精确地描述和分析忆阻器的动态行为, 从而深化对其工作原理的理解<sup>[31]</sup>. 此外, 在神经网络领域分数阶微积分的引入, 显著提升了模型的灵活性和准确性<sup>[32]</sup>. 相较于传统基于整数阶微积分的神经网络模型, 分数阶神经网络在处理复杂动态特性问题时表现出更强的模拟能力, 能够更逼真地反映生物神经系统的动态行为<sup>[33]</sup>. 因此, 对分数阶忆阻神经网络的复杂动力学进行深入的研究非常有必要.

受上述讨论的启发, 本文提出了一种由一个 HR、两个 FN 神经元和双局部有源忆阻器组成的分数阶忆阻神经网络. 利用相图、分岔图、李雅普

诺夫指数图和吸引盆等方法研究其动力学行为. 再利用时间反馈控制方法实现了双稳态的控制. 最后, 通过 STM32 F750 实现了该网络, 验证了理论分析的有效性.

## 2 分数阶忆阻器模型及其特点

本节介绍了一种分数阶双局部有源忆阻器, 并分析了其非线性动力学特性.

### 2.1 分数阶忆阻器

卡普托导数是求解分数阶微分方程的一种流行方法<sup>[34]</sup>, 根据卡普托定义, 一种分数阶局部有源忆阻器定义为<sup>[35]</sup>

$$\begin{cases} i = \omega_q(\varphi)v = a\varphi v, \\ \frac{d^q \varphi}{dt} = g(\varphi, v) = \tanh(c\varphi) - \varphi + v, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $v$ ,  $i$ ,  $\varphi$  和  $\omega_q(\varphi)$  分别表示忆阻器的输入电压、忆阻器的输出电流、内部状态变量和忆导函数.  $g(\varphi, v)$  是忆阻器的内部状态函数,  $a$  和  $c$  表示忆阻参数,  $q$  表示阶数.

### 2.2 收缩磁滞回线

令参数  $a = -0.2$  和  $c = 100$ , 采用正弦电压  $v = A\sin(2\pi ft)$  为输入信号, 研究了所提出的分数阶忆阻器在不同输入信号频率、振幅和阶数下的磁滞回线. 当  $A = 2\text{ V}$ ,  $q = 0.9$  和  $\varphi(0) = -0.1$ , 频率分别为 0.5, 3, 3.5, 7 时, 忆阻器的收缩磁滞回线如图 1(a) 所示, 随着  $f$  增大磁滞回线趋于单值函数. 当  $f = 1$ ,  $q = 0.9$ ,  $\varphi(0) = -0.1$ , 图 1(b) 中外部激励振幅  $A$  由 2 V 上升到 3 V 时收缩磁滞回线面积将变大. 显然, 所提出的数学模型表现出忆阻器的特性. 由图 1(c) 可以看出, 当  $f = 1$ ,  $A = 2\text{ V}$  和  $\varphi(0) = -0.1$  时, 随着  $q$  从 1 下降到 0.8, 收缩磁滞回线也不断变化, 说明分数阶阶数对忆阻器特性有显著影响.

### 2.3 非易失性忆阻器和局部有源特性

根据非易失定理<sup>[10]</sup>, 非易失忆阻器的断电图 (POP) 有两个或两个以上的负斜率. 当电源关闭时, 非易失性忆阻器可以在其最近的忆感状态下继续工作<sup>[36]</sup>. 将  $v = 0$  代入 (1) 式时, 可以得到:

$$\frac{d^q \varphi}{dt} = g(\varphi, 0) = \tanh(c\varphi) - \varphi. \quad (2)$$

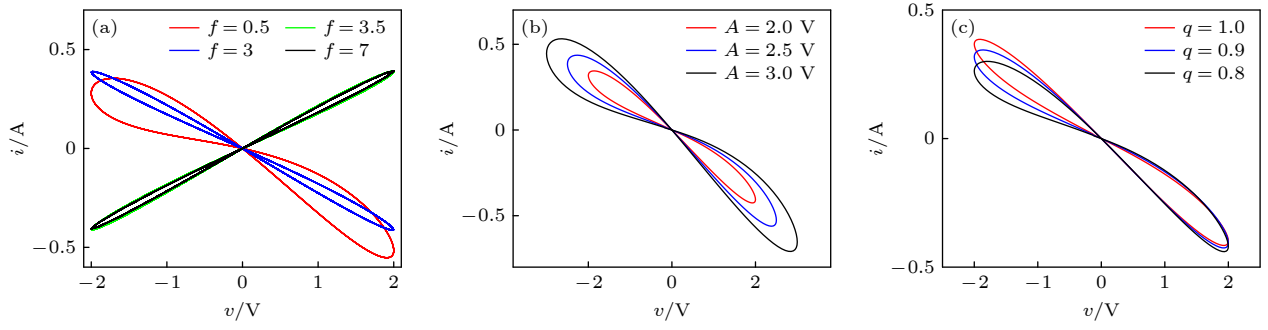


图 1 分数阶忆阻器的磁滞回线 (a) 不同频率; (b) 不同振幅; (c) 不同阶数

Fig. 1. Hysteresis loops of fraction-order memristor: (a) Different frequencies; (b) different amplitudes; (c) different orders.

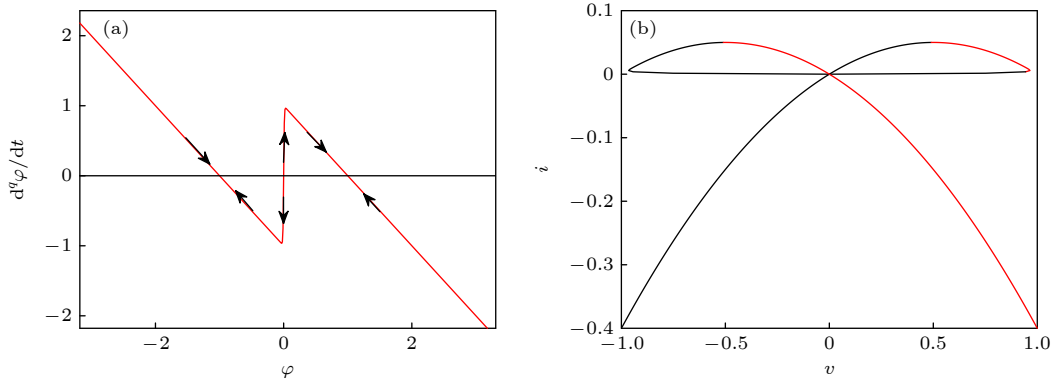

 图 2 (a) 忆阻器的断电图; (b) 忆阻器的直流  $v-i$  图

 Fig. 2. (a) POP plot of the memristor; (b) DC  $v-i$  plot of the memristor.

图 2(a) 显示了忆阻器的 POP 图. 忆阻器的平衡点被认为是交点  $E_0(\varphi = -1)$ ,  $E_1(\varphi = 0)$  和  $E_2(\varphi = 1)$ , 由图可知平衡点  $E_0$  和  $E_2$  都有负的斜率, 并且渐近稳定, 而  $E_1$  是不稳定的. 在不同的初始值下, 它在非易失性忆阻器中表现出两个稳定的平衡态:

$$\varphi = \begin{cases} -1, & \varphi(0) < 0. \\ 1, & \varphi(0) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

两个相应的忆感如下:

$$\begin{cases} \omega_q(\varphi(E_0)) = a\varphi(E_0) = -a = 0.2. \\ \omega_q(\varphi(E_2)) = a\varphi(E_2) = a = -0.2. \end{cases} \quad (4)$$

根据上述研究, 电源关闭时它有两个稳定的平衡态, 所以忆阻器是非易失的.

令  $d^q\varphi/dt = 0$ , 可以推导出:

$$\begin{cases} v = \varphi_0 - \tanh(c\varphi_0), \\ i = a v \varphi_0 = a \varphi_0 [\varphi_0 - \tanh(c\varphi_0)], \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $v$  和  $i$  分别表示直流电压和电流,  $\varphi_0$  为满足  $d^q\varphi/dt = 0$  的平衡点. 根据 (5) 式, 当忆阻器有连

续的直流电压时, 忆阻器的直流  $v-i$  关系如图 2(b) 所示 [37].

当  $di/dv < 0$  时得到局部有源区域. 图 2(b) 中红色曲线的斜率为负值, 表明在忆阻器中存在两个局部有源区域. 根据文献 [38] 中提出的忆阻器的定义, 该忆阻器被称为分数阶双局部有源忆阻器.

### 3 电磁感应作用下的分数阶神经网络模型

本节提出了一个包含 3 个神经元的分数阶神经网络, 并使用双局部有源忆阻器来模拟电磁感应.

#### 3.1 电磁感应作用下的神经网络

通过耦合一个 HR 和两个 FN 神经元可以得到一个具有 3 个神经元的新神经网络, 其拓扑连接图如图 3 所示. 使用 (1) 式中的忆阻器在第一和第二神经元之间建立双向连接, 并选择适当的突触权值, 建立了电磁感应下的分数阶神经网络:

$$\left\{ \begin{array}{l} D^q x_1 = x_1 - b_1 x_1^3 - y_1 + i_1 + ka\varphi(x_2 - x_1) \\ \quad + m_{12}(x_2 - x_1) + m_{13}(x_3 - x_1), \\ D^q y_1 = (1/\varepsilon)(a_1 + x_1 - c_1 y_1), \\ D^q x_2 = y_2 - a_2 x_2^3 + b_2 x_2^2 + i_2 - ka\varphi(x_2 - x_1) \\ \quad + m_{21}(x_1 - x_2) + m_{23}(x_3 - x_2), \\ D^q y_2 = c_2 - d_2 x_2^2 - y_2, \\ D^q x_3 = x_3 - b_3 x_3^3 - y_3 + i_3 + m_{31}(x_1 - x_3) \\ \quad + m_{32}(x_2 - x_3), \\ D^q y_3 = (1/\varepsilon)(a_3 + x_3 - c_3 y_3), \\ D^q \varphi = \tanh(c\varphi) - \varphi + (x_2 - x_1), \end{array} \right. \quad (6)$$

其中  $x_i$  表示 HR 神经元和 FN 神经元的膜电位,  $y_i$  表示恢复变量,  $i_i$  表示外部输入电流,  $m_{ij}$  表示神经元的电耦合强度,  $a$  和  $c$  为忆阻器的内部变量, 其中  $i, j = 1, 2, 3$ . 参数确定为:  $a_1 = 0.6$ ,  $b_1 = 1/3$ ,  $c_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 3$ ,  $c_2 = 1$ ,  $d_2 = 5$ ,  $a_3 = 0.6$ ,  $b_3 = 1/3$ ,  $c_3 = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10$ ,  $i_1 = -3$ ,  $i_2 = 2$ ,  $i_3 = -2$ ,  $a = -0.2$ ,  $c = 10$ ,  $q = 0.9$ ,  $m_{21} = -4.5$ ,  $m_{31} = 1$ .  $k$  表示电磁感应强度. 为了研究网络的动力学行为, 将连接的突触权值  $m_{23}$ ,  $m_{32}$ ,  $m_{13}$ , 阶数  $q$  和电磁感应强度  $k$  作为变量.

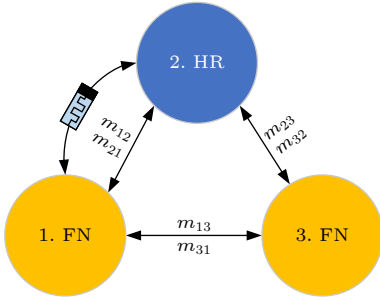


图 3 耦合神经元的拓扑结构  
Fig. 3. Topology of coupled neurons.

### 3.2 平衡点分析

为分析网络的平衡点, 令  $D^q x_i = 0$ ,  $D^q y_j = 0$ ,  $D^q \varphi = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ ), 得到计算如下:

$$E \left[ x_1, \frac{(a_1 + x_1)}{c_1}, x_2, c_2 - d_2 x_2^2, x_3, \frac{(a_3 + x_3)}{c_3}, \varphi \right], \quad (7)$$

$$x_2 = x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi), \quad (8)$$

其中,  $x_1$ ,  $x_3$  和  $\varphi$  的值可由以下 3 个方程确定:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_3, \varphi) = x_1 - b_1 x_1^3 - \frac{a_1 + x_1}{c_1} + i_1 \\ \quad + ka\varphi[\varphi - \tanh(c\varphi)] \\ \quad + m_{12}[\varphi - \tanh(c\varphi)] + m_{13}(x_3 - x_1) = 0, \\ f_2(x_1, x_3, \varphi) = c_2 - d_2[x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi)]^2 \\ \quad - a_2[x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi)]^3 \\ \quad + b_2[x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi)]^2 + i_2 \\ \quad - ka\varphi[\varphi - \tanh(c\varphi)] \\ \quad + m_{21}[-\varphi + \tanh(c\varphi)] \\ \quad + m_{23}[x_3 - x_1 - \varphi + \tanh(c\varphi)] = 0, \\ f_3(x_1, x_3, \varphi) = x_3 - b_3 x_3^3 - \frac{a_3 + x_3}{c_3} \\ \quad + i_3 + m_{31}(x_1 - x_3) \\ \quad + m_{32}[x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi) - x_3] = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

基于 (9) 式中的  $f_2(x_1, x_3, \varphi)$ , 可以得到:

$$\begin{aligned} x_3 = & -(1/m_{23})[c_2 - d_2(x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi))^2 \\ & - a_2[x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi)]^3 \\ & + b_2[x_1 + \varphi - \tanh(c\varphi)]^2 + i_2 \\ & - ka\varphi[\varphi - \tanh(c\varphi)] \\ & + m_{21}[-\varphi + \tanh(c\varphi)] \\ & + m_{23}[-x_1 - \varphi + \tanh(c\varphi)]. \end{aligned} \quad (10)$$

将 (10) 式代入 (9) 式中以消除  $x_3$ , 可以得到  $f_1(x_1, \varphi)$  和  $f_3(x_1, \varphi)$ ,  $x_1$  和  $\varphi$  的值可以通过绘图法确定. 当参数设置为  $m_{13} = -3.5$ ,  $m_{23} = 0.3$ ,  $m_{32} = 0.1$ ,  $k = 0.3$ ,  $q = 0.97$ , 在图 4 中绘制  $f_1(x_1, \varphi)$  与  $f_3(x_1, \varphi)$  曲线, 图中交点即为平衡点.

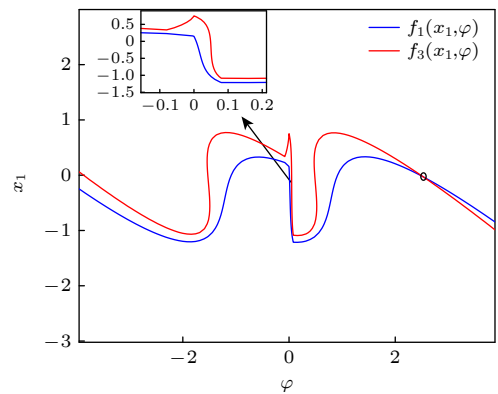


图 4 网络的平衡点  
Fig. 4. Equilibrium point of the network.

从图 4 中可以得出  $x_1 = -0.03145$ ,  $\varphi = 2.5300$ . 将  $x_1$  和  $\varphi$  的值代入 (8) 式和 (10) 式, 得到平衡点  $E = (-0.0314, 5.6855, -1.4985, -10.2282, -0.7622, -1.6223, 2.5300)$ .

使用雅可比矩阵计算平衡点处的特征值, 得到:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2.6248 + 4.9783i, \lambda_2 = 2.6248 - 4.9783i, \\ \lambda_3 &= -0.2574 + 1.0671i, \lambda_4 = -0.2574 - 1.0671i, \\ \lambda_5 &= -1.0095 + 0.0000i, \lambda_6 = -0.0345 + 0.0418i, \\ \lambda_7 &= -0.0345 - 0.0418i. \end{aligned} \quad (11)$$

然后分析平衡点的稳定性. 基于分数阶理论, 如果特征值满足以下要求, 平衡点将渐近稳定:

$$\begin{aligned} |\arg(\lambda_i)| = |\arg(\text{Re}(\lambda_i) + j\text{Im}(\lambda_i))| &> \frac{\pi}{2}q, \\ i &= 1, 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (12)$$

即:

$$\frac{2}{\pi}|\arg(\text{Re}(\lambda_i) + j\text{Im}(\lambda_i))| > q, \quad (13)$$

当  $q$  满足 (13) 式的要求时, 平衡点  $E$  是不稳定的. 基于以上讨论, 平衡点是不稳定的, 不稳定的平衡点可能导致分数阶神经网络产生复杂的动力学行为, 如周期和混沌.

## 4 复杂的动力学行为

本节主要目的是研究神经网络的动力学行为. 阶数、电磁感应强度和电突触耦合强度在多神经网络中都起着重要作用, 对神经元的动力学行为有重要影响.

### 4.1 阶数相关动力学行为

由于阶数在模型的动力学行为中起着重要的作用, 因此讨论非线性动力学在阶数变化时的行为具有重要意义. 首先, 使  $q$  在  $[0.55, 1.05]$  内变化, 其他参数固定为  $m_{32} = 0.1$ ,  $m_{23} = 1$ ,  $m_{13} = -3.5$ ,  $k = 0.3$ , 初始值  $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, x_{30}, y_{30}, \varphi_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.1))$ , 随  $q$  变化的分岔图和相应的前 3 个 Lyapunov 指数谱如图 5 所示, 展示了复杂的动力学行为. 由图 5(a) 可知, 随着阶数的增加, 该神经网络的状态从周期 1 状态开始, 通过倍周期分岔, 周期 1 状态失去稳定性, 在  $q = 0.578$  发展为周期 2 状态, 随后在  $q = 0.67$  和  $q = 0.726$  分别通过倍周期分岔变为周期 4 和周期 8 的状态, 之

后进入广泛的混沌区域. 同时, 图 5(b) 中的前 3 个 Lyapunov 指数谱与图 5(a) 中对应的动力学行为基本一致, 其中图 5(b) 中最大 Lyapunov 指数是正数对应于图 5(a) 中的混沌放电行为, 图 5(b) 中最大 Lyapunov 指数在零附近对应于图 5(a) 中的周期放电行为.

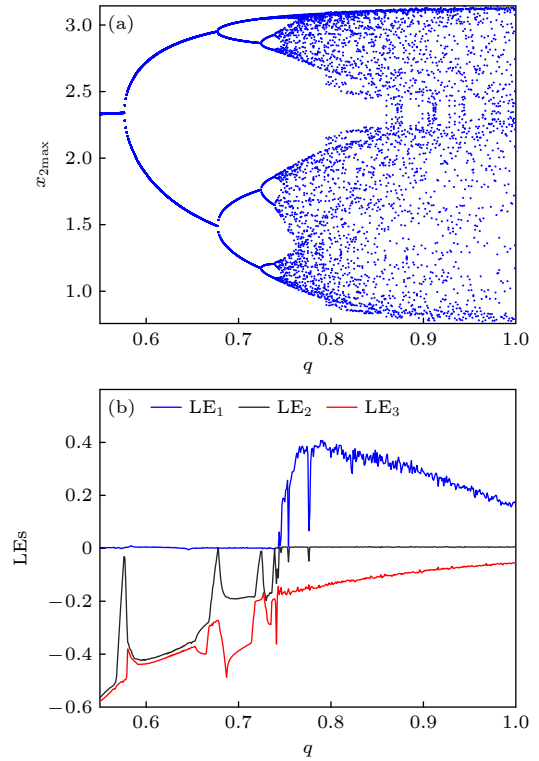


图 5 (a)  $q$  的分岔图; (b) 对应的前 3 个 Lyapunov 指数谱  
Fig. 5. (a) Bifurcation diagram of  $q$ ; (b) the corresponding Lyapunov exponent spectrum.

### 4.2 电突触耦合强度相关的动力学行为

初始值为  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.1)$  时, 在参数  $m_{23} - m_{32}$  平面上绘制二维分岔图以进一步阐明神经网络的放电活动, 如图 6(a) 所示. 图 6(a) 右侧颜色条上的彩色标记用于区分各种电活动. 标记为 CH 的颜色表示混沌电活动, 而标记为 P1 到 P8 的颜色分别表示周期 1—周期 8. 结果表明, 在电磁感应下神经网络可能产生混沌电活动和不同周期电活动. 图 6(b) 为光谱熵 (SE) 复杂度图, 颜色条中的颜色从下到上逐渐变暗, 说明复杂度增加. 可以看出, 图 6(a) 中的深蓝色区域形成了一个 U 形结构, 与图 6(b) 中最暗的 U 形区域相对应. 这一结果表明, 复杂度图与分岔图之间存在精确的匹配关系, 进一步验证了关于神经网络放电活动和复杂度的分析.

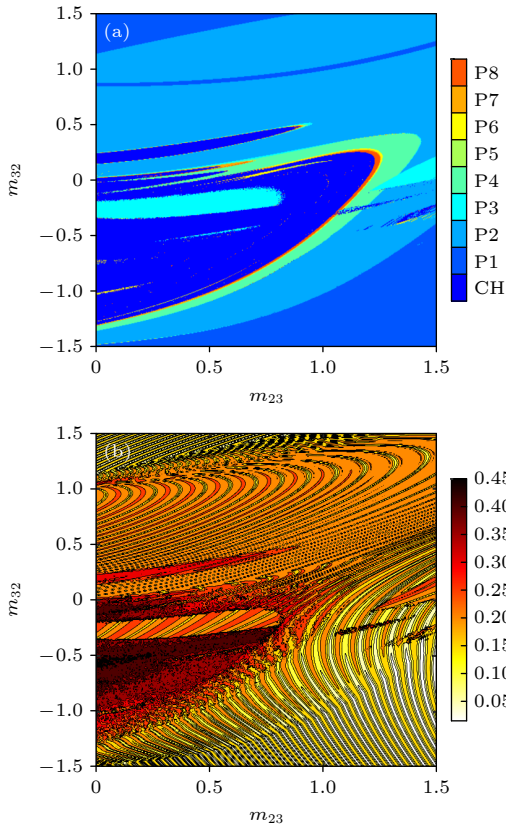


图 6 (a) 双参数分岔图; (b) SE 复杂度图

Fig. 6. (a) Two-parameter bifurcation diagram; (b) SE complexity diagram.

### 4.3 瞬态混沌

边界危机可以表现出间歇性行为, 通常与瞬态混沌一起出现. 系统的轨迹首先在有限的时间间隔内表现出混沌行为, 然后过渡到一个稳定的非混沌状态, 该状态可能是周期或稳定点. 在许多混沌系统中可以发现瞬态混沌现象<sup>[39]</sup>. 当  $m_{13} = -3.5$ ,  $k = -1.5$ , 在迭代区间  $[1, 120000]$  内, 图 7(a) 显示了具有稳定周期脉冲的瞬态混沌爆发的迭代序列. 首先有一个瞬态混沌行为, 它在  $n = 3.4 \times 10^4$  转变为一个稳态周期行为.  $[2 \times 10^3, 3.4 \times 10^4]$  中的序列是混沌爆发 (红色), 而  $[3.4 \times 10^4, 12 \times 10^4]$  中的序列是周期性的尖峰活动 (蓝色), 图 7(b) 中为对应的两种吸引子.

### 4.4 共存行为

将突触权值视为受控参数, 其他参数固定为  $m_{13} = -3.5$ ,  $m_{32} = 0.1$ ,  $k = 0.3$ , 当  $m_{23}$  在  $[0.3, 1.45]$  区域变化时, 研究了两组初始条件  $(-2, 0, 0, -0.5, 0, -1, 1)$  (红色) 与  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.1)$  (蓝色) 下神

经网络的共存行为. 图 8 描述了两组不同初始值下随  $m_{23}$  变化的分岔图和对应的最大 Lyapunov 指数. 从分岔图中可以看出, 神经网络在  $m_{23} = 0.97$  之后在不同初始条件下表现出明显不同的行为. 这种现象表明, 神经网络的动力学行为对初始条件具有敏感性. 图 8(b) 中最大 Lyapunov 指数进一步验证了这一结果.

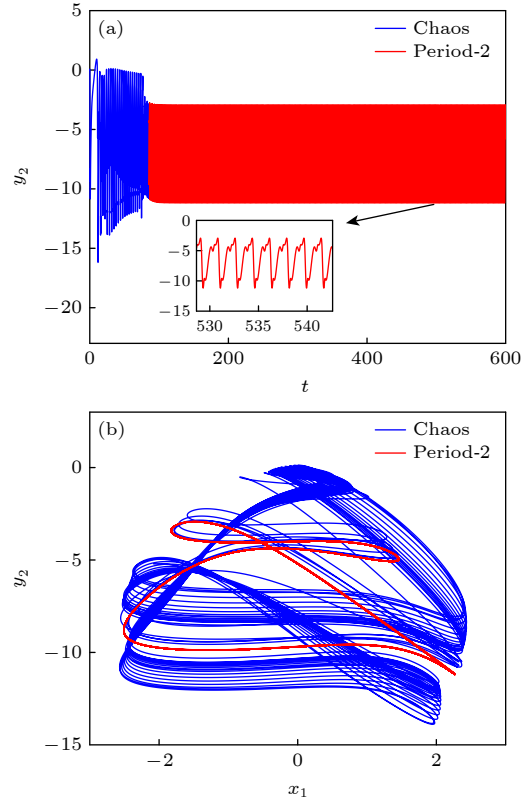


图 7 (a) 迭代序列图; (b) 瞬态混沌图

Fig. 7. (a) Iterative sequences; (b) phases of transient chaotic.

为了进一步揭示共存现象, 选取两个确定的  $m_{23}$ , 研究这两组初始条件下的共存. 当  $m_{23} = 1$  时, 图 8(c) 中绘制了  $x_3 - y_3$  平面的相图, 可以看出, 周期 3 与混沌吸引子共存, 当  $m_{23} = 1.3$  时, 图 8(d) 中绘制了周期 3 与周期 4 吸引子共存相图.

### 4.5 反单调性

随着分岔参数逐渐变化, 先通过倍周期分岔的周期轨道, 然后再通过反向倍周期分岔的周期轨道, 这是动力系统中反单调性的一个特征. 即使在无维数、非线性系统中, 反单调性仍然可能发生. 因此, 这种不寻常的现象在混沌系统的研究中起着至关重要的作用.

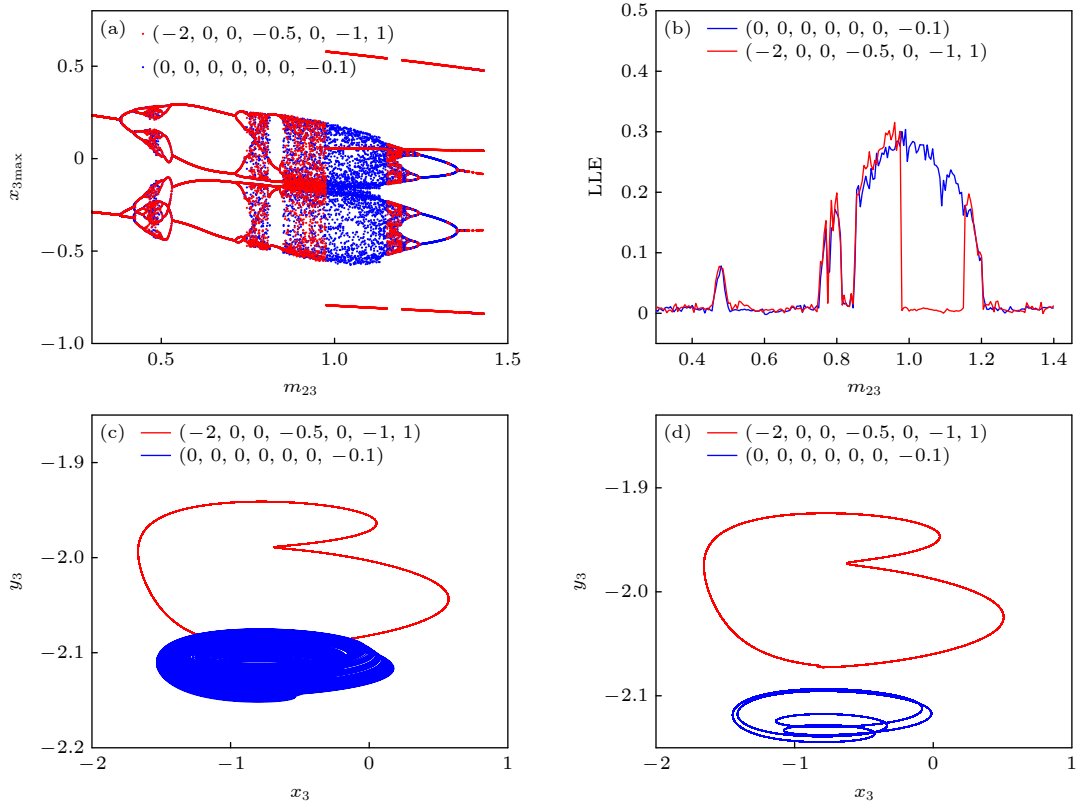


图 8 (a) 共存分岔图; (b) 最大 Lyapunov 指数; (c) 周期与混沌共存吸引子; (d) 不同周期共存吸引子

Fig. 8. (a) Coexisting bifurcation diagrams; (b) the largest Lyapunov exponents; (c) coexisting attractors of periodic and chaotic states; (d) coexisting attractors of different periodic states.

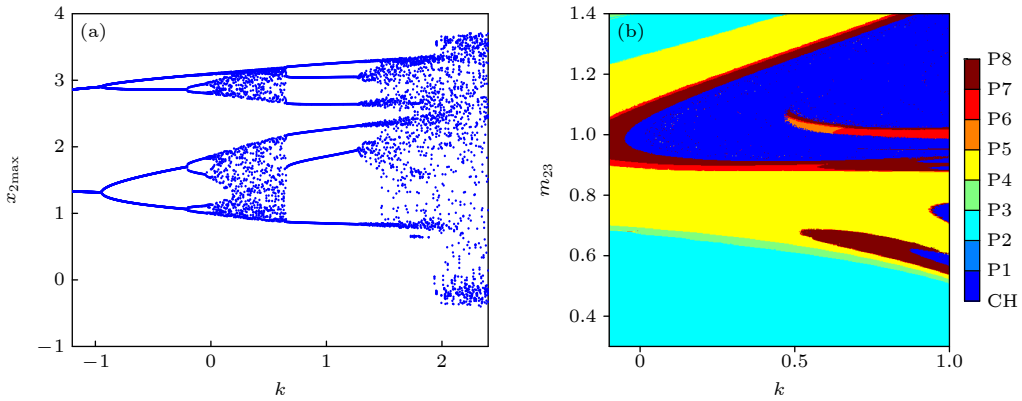


图 9 (a)  $k$  的分岔图; (b)  $k - m_{23}$  平面的双参数分岔图

Fig. 9. (a) Bifurcation diagram of the  $k$ ; (b) the two-parameter bifurcation diagrams in the  $k - m_{23}$  plane.

当  $m_{13} = -3.4$ ,  $m_{32} = 0.1$ ,  $m_{23} = 1$ , 图 9(a) 是电磁感应强度  $k$  变化的分岔图, 可以看出电磁感应对神经网络的动力学行为有显著影响. 图 9(b) 为  $k - m_{23}$  平面上的双参数分岔图, 提供了一个更加全面的视角来探究电磁感应强度和电耦合强度  $m_{23}$  同时变化时神经网络的动力学行为.

图 10 绘制了  $k$  取某些值时随着  $m_{23}$  变化的分岔图, 结果说明了反单调现象. 可以看出, 随着电磁

感应强度增大, 分岔图中气泡增多, 混沌区域增大.

#### 4.6 放电行为

神经元的信息传递主要是通过放电行为来实现的, 这种行为可以分为两种形式, 一种是峰放电, 表现为连续脉冲放电的模式, 即产生一系列尖峰状的电信号, 图 7(a) 中的放电行为即为峰放电. 另一种是簇放电, 簇放电则是一种更为复杂的放电模

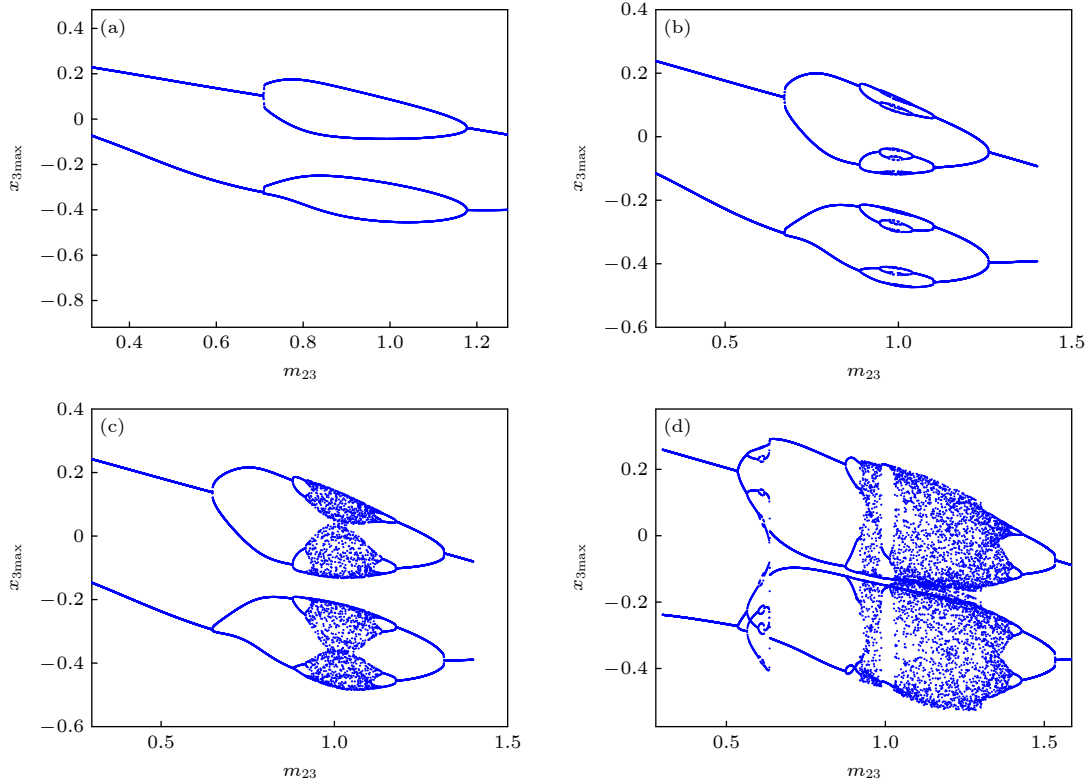

 图 10 电磁感应强度不同时,  $m_{23}$  的分岔图 (a)  $k = -0.3$ ; (b)  $k = 0$ ; (c)  $k = 0.2$ ; (d)  $k = 0.9$ 

 Fig. 10. Bifurcation diagrams of the  $m_{23}$  for different  $k$ : (a)  $k = -0.3$ ; (b)  $k = 0$ ; (c)  $k = 0.2$ ; (d)  $k = 0.9$ .

式, 是在连续脉冲放电状态和静息状态之间转换, 簇放电可以承载更多的信息, 值得进行深入探索<sup>[11]</sup>.

根据图 9(a) 中的电磁感应强度  $k$  变化的分岔图, 选择了 3 个合适的  $k$  来研究神经网络的放电行为,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  和  $\varphi$  的放电行为如图 11 所示. 可以观察到, 不同的参数表现出不同的放电行为, 连续脉冲处于不同的位置,  $x_1$  的时间序列中连续脉冲位于底部,  $x_1, \varphi$  的时间序列中连续脉冲位于顶端,  $x_3$  的时间序列中连续脉冲位于中间位置, 上下为两个尖端. 随着电磁感应强度  $k$  的增大, 簇放电的放电频率和峰值未发生明显变化, 而连续脉冲区域不断缩小, 直至消失, 最终变为峰放电. 其中, 红色表示  $k = 0.3$  时的时间序列, 蓝色表示  $k = 0.5$  时的时间序列, 绿色表示  $k = 0.7$  时的时间序列. 分析结果表明, 电磁感应强度可以影响神经网络的放电行为, 使放电模式由簇放电转变为峰放电.

## 5 分数阶忆阻神经网络的应用

### 5.1 异质双稳态的控制

在多个学科领域中, 非线性系统的控制已成为

重要的研究焦点<sup>[40-42]</sup>. 混沌控制的研究尤其突出, 主要包含两个核心方面: 首先是混沌的抑制. 由于混沌可能引发不良后果, 需要采取专门措施来控制, 旨在降低或消除混沌所带来的潜在危害; 其次是混沌的主动诱导与增强, 其目标在于创造或加强混沌状态. 基于此, 我们应用时间反馈法控制双稳态动力系统中吸引子. 该方法的关键在于利用反馈机制, 将系统动力学引导至预定状态, 并在状态成功切换后终止控制, 使系统能够遵循其内在动力学规律自由演进.

根据文献 [43] 中的定义, 给出控制模型:

$$\dot{\mathbf{X}} = \psi(\mathbf{X}) - \eta h(\tau) \mathbf{G} \times (\mathbf{X} - \mathbf{A}), \quad (14)$$

其中  $\mathbf{X} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \varphi)^T$  是一个七维矩阵,  $\dot{\mathbf{X}} = \psi(\mathbf{X})$  为神经网络,  $-\eta h(\tau) \mathbf{G} \times (\mathbf{X} - \mathbf{A})$  是控制器,  $\eta$  为控制强度,  $\mathbf{G}$  是一个七维单位矩阵,  $h(\tau)$  是一个矩形函数,  $\mathbf{A} = (0, \alpha_i, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  是一个确定所选吸引子位置的矩阵,  $y_{1\max}$  与  $y_{1\min}$  表示所选吸引子的上、下边界, 用来估计  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i = (y_{1\max} + y_{1\min})/2$ . 选择不同的  $\alpha_i$  值使神经网络即使在不同初始条件下也只有一种吸引子, 即由双稳态变为单稳态.

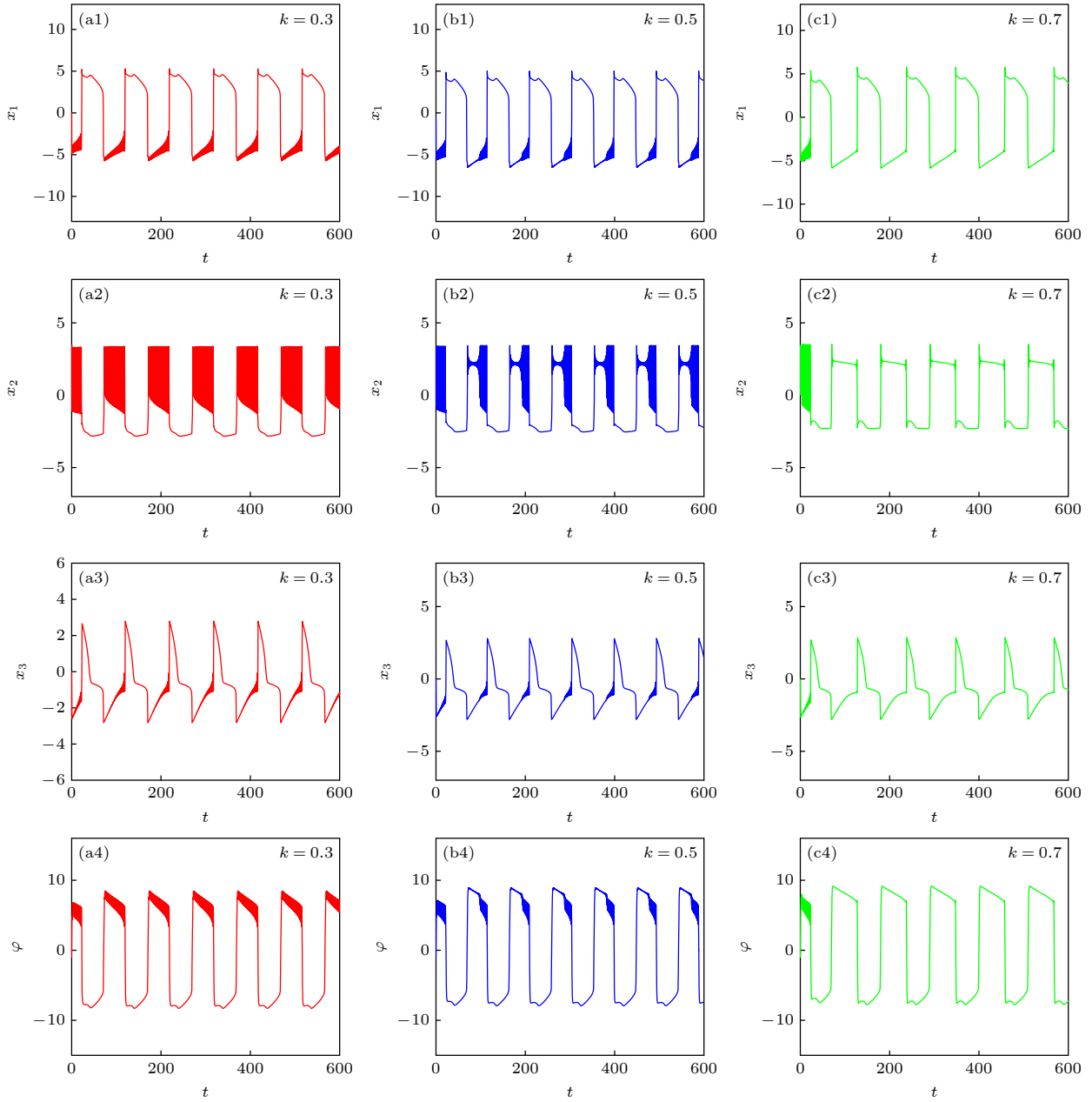


图 11 电磁感应相关的  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  和  $\varphi$  放电行为 (a1)–(a4)  $k = 0.3$ ; (b1)–(b4)  $k = 0.5$ ; (c1)–(c4)  $k = 0.7$ .  
 Fig. 11. Induction strength-related firing patterns for  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  and  $\varphi$ : (a1)–(a4)  $k = 0.3$ ; (b1)–(b4)  $k = 0.5$ ; (c1)–(c4)  $k = 0.7$ .

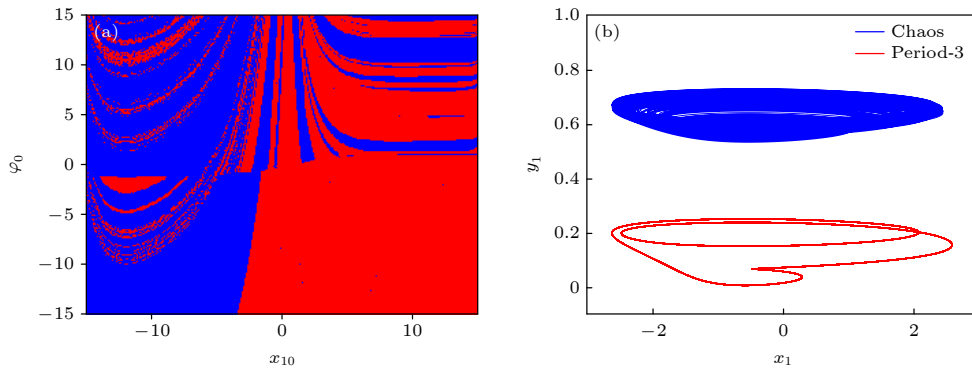


图 12 (a)  $x_{10} - \varphi_0$  平面上的吸引盆; (b)  $x_1 - y_1$  平面上的相图  
 Fig. 12. (a) Basin of attraction of  $x_{10} - \varphi_0$  plane; (b) phases of  $x_1 - y_1$  plane.

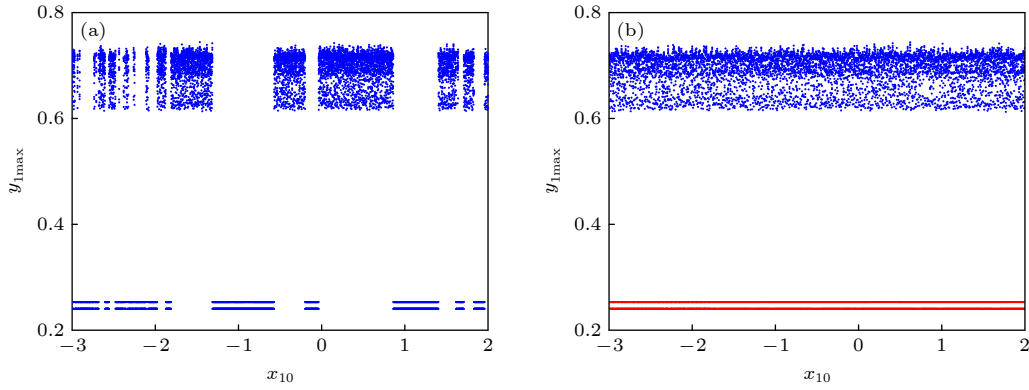


图 13 (a) 原分岔图; (b) 时间反馈控制后的分岔图

Fig. 13. (a) Bifurcation diagram; (b) the desired distribution diagram controlled via temporal feedback.

因此, 受控神经网络由 (15) 式给出:

$$\left\{ \begin{array}{l} D^q x_1 = x_1 - b_1 x_1^3 - y_1 + i_1 + ka\varphi(x_2 - x_1) \\ \quad + m_{12}(x_2 - x_1) + m_{13}(x_3 - x_1), \\ D^q y_1 = (1/\varepsilon)(a_1 + x_1 - c_1 y_1) - \eta h(\tau)(y_1 - \alpha_i), \\ D^q x_2 = y_2 - a_2 x_2^3 + b_2 x_2^2 + i_2 - ka\varphi(x_2 - x_1) \\ \quad + m_{21}(x_1 - x_2) + m_{23}(x_3 - x_2), \\ D^q y_2 = c_2 - d_2 x_2^2 - y_2, \\ D^q x_3 = x_3 - b_3 x_3^3 - y_3 + i_3 \\ \quad + m_{31}(x_1 - x_3) + m_{32}(x_2 - x_3), \\ D^q y_3 = (1/\varepsilon)(a_3 + x_3 - c_3 y_3), \\ D^q \varphi = \tanh(c\varphi) - \varphi + (x_2 - x_1). \end{array} \right. \quad (15)$$

矩形函数  $h(\tau)$ , 也可以近似为

$$h(\tau) = \tanh(e_1 \tau) - \tanh(e_1 \tau - e_2), \quad (16)$$

其中, 参数设置为  $e_1 = 1000$ ,  $e_2 = 30000$ .

将其他参数保持为  $m_{13} = -3.5$ ,  $m_{32} = 0.1$ ,  $m_{23} = 1$ ,  $k = 0.3$ ,  $\eta = 0$ , 初始值  $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, x_{30}, y_{30}) = (0, 0, -0.5, 0, -1)$  时, 平面  $x_{10} - \varphi_0$  上的吸引盆如图 12(a) 所示, 两个颜色区域对应于两种状态的吸引子.  $x_1 - y_1$  平面上共存的混沌和周期 3 吸引子如图 12(b) 所示.

图 13(a) 为随  $x_{10}$  变化的分岔图, 显示了混沌状态和周期状态之间的转变. 在图 13(b) 中选择  $\alpha_1 = 0.634$  与  $\alpha_2 = 0.11$  来演示双稳态的控制, 固定  $\eta = 1$  和  $\varphi_0 = 10$ , 当  $\alpha_1 = 0.634$  时得到只有混沌吸引子的分岔图, 表现为深蓝色,  $\alpha_2 = 0.11$  时全为红色, 即只有周期吸引子. 具体来说, 通过精确调整时间反馈项的参数, 可以将系统从一种周期状态转

变为混沌状态, 或者从混沌状态中稳定到特定的周期状态. 这种灵活的控制能力使得可以根据需要生成具有特定性质的混沌序列, 例如用于图像加密的混沌密钥. 由于混沌序列具有高度的不可预测性和敏感性, 因此它们在加密领域具有广泛的应用前景, 可以有效提高数据传输的安全性.

## 5.2 分数阶忆阻神经网络的 ARM 实现

神经网络的硬件实现是将神经网络应用于工程实践的关键问题. 目前, 该实现主要以模拟电路和数字电路的形式实现. 然而, 模拟电路中的许多电子元件受到温度等因素的影响, 会降低硬件实现的精度. 本节介绍了一种基于 ARM 平台的数字实现方法, 该方法以主频高达 216 MHz 的 32 位 STM32 F750 芯片为核心处理器, 实现的硬件框图如图 14 所示. 先运用 ADM 算法对网络进行了精细的离散化处理, 确保能够在 ARM 平台上精确模拟网络动态行为. 在随后的实现过程中, ARM 执行了一系列迭代计算, 并通过 D/A 转换器将这些数字迭代结果转换为模拟信号, 供后续观察和分析使用. 这些模拟信号进一步被接入示波器, 以便

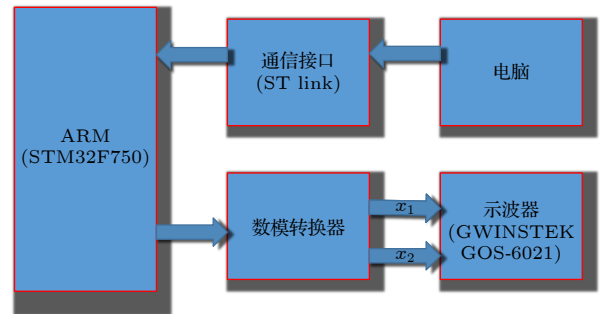


图 14 设计网络的硬件框图

Fig. 14. Hardware block diagram of the designed network.

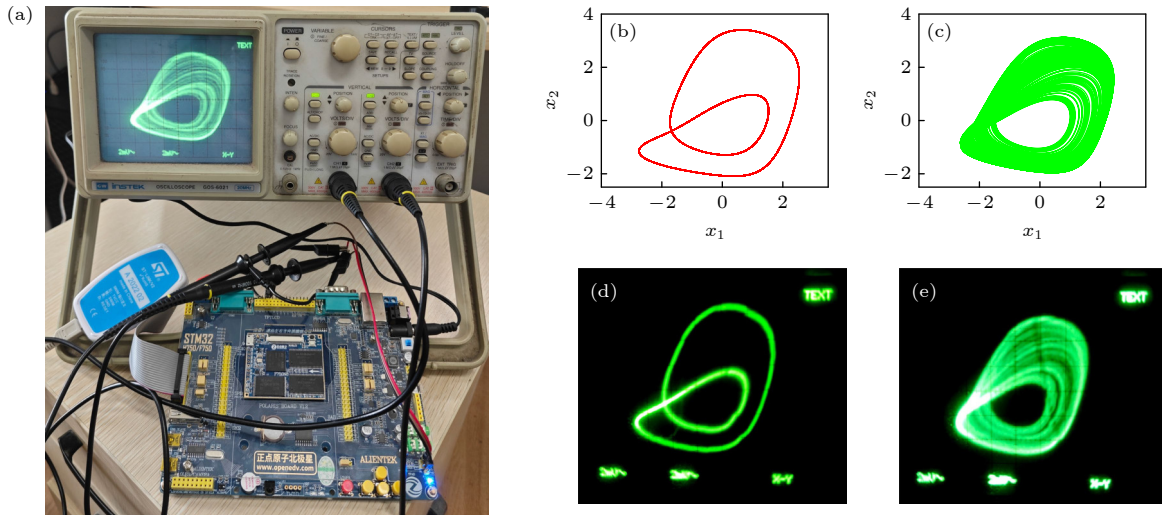


图 15 基于 ARM 平台的硬件实现 (a) 硬件连接图; (b), (c) MATLAB 仿真图; (d), (e) 单片机实验结果

Fig. 15. Hardware implementation based on ARM platform: (a) Hardware connection plot; (b), (c) MATLAB simulation diagram; (d), (e) ARM implementation of the attractors.

对其进行观察. 基于 ARM 平台的硬件物理连接图如图 15(a) 所示.

对应于图 8 中的分岔图, 当初始值为  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.1)$ , 选取其中两个特定的电耦合值  $m_{23} = 0.3, 1.0$ . 针对这两个值, 在 MATLAB 环境中进行了仿真实验, 分别绘制了周期 2 和混沌状态下  $x_1 - x_2$  平面的相图, 如图 15(b), (c) 所示. 同时, 还利用示波器捕获了网络不同状态的吸引子, 相关结果展示在图 15(d), (e) 中. 通过比较可以看出, ARM 平台得到的结果与 MATLAB 仿真结果得到的相图相同, 验证了分数阶忆阻神经网络的可实现性.

## 6 结 论

本文构建了由一个 FN 神经元和两个 HR 神经元组成的分数阶异质网络, 并引入了忆阻器以模拟电磁感应对神经网络的影响. 为了全面探究网络的动力学行为, 采用多种数值仿真方法揭示了该网络在电磁感应作用下丰富的电活动, 包括共存行为、反单调现象、瞬态混沌以及放电行为等. 结果表明, 电突触耦合强度、电磁感应强度、阶数和初始值都对网络的动力学行为产生重要影响. 接着研究一种时间反馈控制策略, 用以对网络的动力学行为进行调控. 通过引入反馈机制, 成功地实现了对异质双稳态的控制. 根据此方法可将周期状态转换成混沌状态, 进而生成具有潜在应用价值的混沌序列, 这些序列在图像加密等领域展现出了广阔的应

用前景. 最后, 在嵌入式平台上设计并实现了该神经网络, 验证了所构建神经网络模型具有实际应用的潜力.

## 参考文献

- [1] Zhou X R, Luo X S, Jing P Q, Yuan W J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5679 (in Chinese) [周小荣, 罗晓曙, 蒋品群, 袁五届 2007 物理学报 **56** 5679]
- [2] Xu Y, Jia Y, Ge M Y, Lu L L, Yang L J, Zhan X 2018 *Neurocomputing* **283** 196
- [3] Izhikevich E M 2003 *IEEE Trans. Neural Netw.* **14** 1569
- [4] Bao B C, Yang Q, Zhu L, Bao H 2019 *Int. J. Bifurc. Chaos* **29** 1930010
- [5] Hindmarsh J L, Rose R M 1982 *Nature* **296** 5853
- [6] Hindmarsh J L, Rose R M 1984 *Proc. R. Soc. Lond, Ser B: Biol. Sci.* **221** 87
- [7] Izhikevich E M, Fitzhugh R 2006 *Scholarpedia* **1** 1349
- [8] Chay T R 1985 *Physica D* **16** 233
- [9] Xu Q, Liu T, Feng C T, Bao H, Wu H G, Bao B C 2021 *Chin. Phys. B* **30** 128702
- [10] Li Z J, Zhou H Y, Wang M J, Ma M L 2021 *Nonlinear Dyn.* **104** 1455
- [11] Ding D W, Jiang L, Hu Y B, Yang Z L, Li Q 2021 *Chaos* **31** 083107
- [12] Njitacke Z T, Awrejcewicz J, Ramakrishnan B, Rajagopal K, Kengne J 2022 *Nonlinear Dyn.* **107** 2867
- [13] De S, Balakrishnan J 2020 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **90** 105391
- [14] Sun X J, Yang B H, Wu Y, Xiao J H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 120502 (in Chinese) [孙晓娟, 杨白桦, 吴晔, 肖井华 2014 物理学报 **63** 120502]
- [15] Ding X L, Gu H G, Jia B, Li Y Y 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 218701 (in Chinese) [丁学利, 古华光, 贾冰, 李玉叶 2021 物理学报 **70** 218701]
- [16] Wu Y, Xu J X, He D H, Jin W Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3457 (in Chinese) [吴莹, 徐健学, 何岱海, 靳伍银 2005 物理学报 **54** 3457]

- [17] Lv M, Ma J, Yao Y G, Alzahrani F 2019 *Sci. China-Technol. Sci.* **62** 448
- [18] Hu X Y, Liu C X, Liu L, Ni J K, Yao Y P 2018 *Nonlinear Dyn.* **91** 1541
- [19] Wan Q Z, Yan Z D, Li F, Chen S M, Liu J 2022 *Chaos* **32** 073107
- [20] Lin H R, Wang C H, Hong Q H, Sun Y C 2020 *IEEE Trans. Circuits Syst. II-Express Briefs* **67** 3472
- [21] Li C L, Li H D, Xie W W, Du J R 2021 *Nonlinear Dyn.* **106** 1041
- [22] Yu F, Zhang Z N, Shen H, Huang Y Y, Cai S, Du S C 2022 *Chin. Phys. B* **31** 020505
- [23] Luo J, Sun L, Qiao Y H 2022 *Chin. J. Comput. Phys.* **39** 109 (in Chinese) [罗佳, 孙亮, 乔印虎 2022 计算物理 **39** 109]
- [24] Xu Q, Ju Z T, Ding S K, Feng C T, Chen M, Bao B C 2022 *Cogn. Neurodyn.* **16** 1221
- [25] Bao H, Hu A H, Liu W B, Bao B C 2020 *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **31** 502
- [26] Bao H, Liu W B, Hu A H 2019 *Nonlinear Dyn.* **95** 43
- [27] Tenreiro Machado J, Duarte F B, Duarte G M, 2012 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22** 1250249
- [28] Tenreiro Machado J A, Lopes A M 2016 *Nonlinear Dyn.* **86** 1613
- [29] Tzounas G, Dassios I, Murad M A A, Milano F 2020 *IEEE Trans. Power Syst.* **35** 4622
- [30] Kërçi T, Giraldo J, Milano F 2020 *Int. J. Elec. Power* **119** 105819
- [31] Chen L, He Z L, Li C D, Wen S P, Chen Y R 2020 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **30** 2050172
- [32] Jahanshahi H, Yousefpour A, Munoz-Pacheco J M, Kacar S, Viet-Thanh P, Alsaadi F E 2020 *Appl. Math. Comput.* **383** 125310
- [33] Dong J, Zhang G J, Xie Y, Yao H, Wang J 2014 *Cogn. Neurodyn.* **8** 167
- [34] Wu G C, Baleanu D 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** 95
- [35] Lin H R, Wang C H, Sun Y C, Yao W 2020 *Nonlinear Dyn.* **100** 3667
- [36] Chua L 2013 *Nanotechnology* **24** 383001
- [37] Chua L 2015 *Radioengineering* **24** 319
- [38] Weiher M, Herzig M, Tetzlaff R, Ascoli A, Mikolajick T, Slesazeck S 2019 *IEEE Trans. Circuits Syst. I-Regul* **66** 2627
- [39] Yu H, Du S Z, Dong E Z, Tong J G 2022 *Chaos Solitons Fractals* **160** 112220
- [40] Li C B, Wang X, Chen G R 2017 *Nonlinear Dyn.* **90** 1335
- [41] Li C B, Sprott J C, Hu W, Xu Y J 2017 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **27** 1750160
- [42] Park J H, Huh S H, Kim S H, Seo S J, Park G T 2005 *IEEE Trans. Neural Netw.* **16** 414
- [43] Yadav K, Prasad A, Shrimali M D 2018 *Phys. Lett. A* **382** 2127

# Dynamic behaviors analysis of fraction-order neural network under memristive electromagnetic induction

Ding Da-Wei    Wang Mou-Yuan    Wang Jin  
Yang Zong-Li<sup>†</sup>    Niu Yan    Wang Wei

(*School of Electronics and Information Engineering, Anhui University, Hefei 230601, China*)

( Received 12 November 2023; revised manuscript received 31 March 2024 )

## Abstract

The dynamic behaviors of coupled neurons with different mathematical representations have received more and more attention in recent years. The coupling among heterogeneous neurons can show richer dynamic phenomena, which is of great significance in understanding the function of the human brain. In this paper, we present a fraction-order heterogeneous network with three neurons, which is built by coupling an FN neuron with two HR neurons. Complex electromagnetic surroundings have meaningful physical influence on the electrical activities of neurons. To imitate the effects of electromagnetic induction on the three-neuron heterogeneous network, we introduce a fraction-order locally active memristor in the neural network. The characteristics of this memristor are carefully analyzed by pinched hysteresis loops and its locally active characteristic is proved by the power-off plot and the DC  $v-i$  plot. Then, the parameter-dependent dynamic activities are investigated numerically by using several dynamical analysis methods, such as the phase diagrams, bifurcation diagrams, Lyapunov exponent spectra, and attraction basins. In addition, the network also reveals rich dynamic behaviors, including coexisting activities, anti-monotonicity phenomena, transient chaos and firing patterns, providing support for further investigating the firing patterns of the human brain. In particular, complex dynamics, including coexisting attractors, anti-monotonicity, and firing patterns, can be influenced by the order and strength of electrical synaptic coupling and electromagnetic induction. The control of the bistable state can be realized through the time feedback control method, so that the bistable state can be transformed into an ideal monostable state. The study of the fraction-order memristive neural network may expand the field of view for understanding the collective behaviors of neurons. Finally, based on the ARM platform, we give a digital implementation of the fraction-order memristive neural network, which can verify the consistency with the numerical simulation results. In the future, we will explore more interesting memristive neural networks and study different types of methods to control the firing behaviors of the networks.

**Keywords:** memristive electromagnetic induction, fraction-order neural network, attractor coexistence, anti-monotonicity

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Jn

**DOI:** [10.7498/aps.73.20231792](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231792)

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [07115@ahu.edu.cn](mailto:07115@ahu.edu.cn)



## 电磁感应下分数阶神经网络动力学行为分析及应用

丁大为 王谋媛 王金 杨宗立 牛炎 王威

### Dynamic behaviors analysis of fraction-order neural network under memristive electromagnetic induction

Ding Da-Wei Wang Mou-Yuan Wang Jin Yang Zong-Li Niu Yan Wang Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 100502 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231792

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231792>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

分数阶忆阻耦合异质神经元的多稳态及硬件实现

Multistability of fractional-order memristor-coupled heterogeneous neurons and its hardware realization

物理学报. 2022, 71(23): 230501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221525>

$\text{NbO}_x$  忆阻神经元的设计及其在尖峰神经网络中的应用

Design of  $\text{NbO}_x$  memristive neuron and its application in spiking neural networks

物理学报. 2022, 71(11): 110501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220141>

多频正弦混沌细胞神经网络及其复杂动力学特性

Multi-frequency sinusoidal chaotic neural network and its complex dynamics

物理学报. 2020, 69(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200725>

基于忆阻器的脉冲神经网络硬件加速器架构设计

Memristor based spiking neural network accelerator architecture

物理学报. 2022, 71(14): 148401 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220098>

具有无穷共存吸引子的简单忆阻混沌系统的分析与实现

Analysis and implementation of simple four-dimensional memristive chaotic system with infinite coexisting attractors

物理学报. 2022, 71(16): 160502 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220593>

一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步

Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors

物理学报. 2018, 67(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172354>