

## 交叉扩散驱动的 SI 模型空间斑图\*

陆源杉<sup>1)</sup> 肖敏<sup>1)†</sup> 万佑红<sup>1)</sup> 丁洁<sup>1)</sup> 蒋海军<sup>2)</sup>

1) (南京邮电大学自动化学院, 人工智能学院, 南京 210023)

2) (新疆大学数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830047)

(2023 年 11 月 29 日收到; 2024 年 1 月 17 日收到修改稿)

目前国内外关于 SI 模型空间格局的研究大多数局限在自扩散以及系统参数对斑图模式的影响, 而关于交叉扩散对空间格局的演化机理研究成果较少. 本文建立了一个具有自扩散和交叉扩散的空间流行病模型, 研究了在有自扩散驱动系统不稳定的情况下, 交叉扩散对 SI 模型的稳定性、稳定速度以及斑图结构的影响. 研究发现, 在无自扩散驱动系统不稳定的情况下, 引入交叉扩散能够激发 Turing 斑图的产生; 在自扩散驱动系统不稳定的情况下, 交叉扩散可以实现斑图结构的改变; 对于 SI 模型的稳定速度, 不论有无自扩散驱动系统不稳定, 交叉扩散都影响了其到达稳定所需时间, 且在不同的交叉扩散系数下, 所需时间也不同. 因此, 交叉扩散对于 SI 模型的稳定性、稳定速度、斑图结构都有重要的影响.

**关键词:** Turing 不稳定, 非线性发病率, 交叉扩散, Turing 斑图**PACS:** 02.30.Oz, 05.45.-a, 87.10.Ed, 87.15.A-**DOI:** 10.7498/aps.73.20231877

## 1 引言

1952 年, Turing<sup>[1]</sup> 发现在反应扩散系统中, 在没有扩散的情况下对小时间扰动稳定的齐次稳态在有扩散项的情况下变得不稳定, 这种现象被称作 Turing 不稳定, 这种不稳定在空间域中产生了一种称为 Turing 斑图的模式. 在这一发现之后, 许多研究者受到启发, 将 Turing 斑图应用于物理、化学、生物和生态过程等各个领域<sup>[2-8]</sup>.

反应扩散系统是空间运动建模的重要工具之一, 已广泛应用于化学反应<sup>[9]</sup>、谣言传播<sup>[10]</sup>、图像处理<sup>[11]</sup>、流行病传播<sup>[12]</sup> 等许多空间分布系统. 反应扩散过程提供了由于局部反应和扩散运动而发生的多种物质的浓度变化的最佳模型. 以疾病传播为例, 将不同位置的个体划分为不同的种类, 表示个体相对于模型疾病的易感状态、感染状态. 局部

反应过程代表同一地点的个体相互接触并根据感染动态改变状态. 扩散过程代表空间上个体的自由扩散, 这可能是疾病从一个区域扩散到另一个区域的原因.

在流行病学领域, 研究人员提出了反应扩散模型, Wang 等<sup>[13]</sup> 研究了包含人口与流行病过程的反应扩散模型以捕捉环境的空间异质性和个体的移动对疾病动态的影响. 阮中远<sup>[14]</sup> 介绍了在流行病学领域基于复杂网络的反应扩散模型, 以此加深人们对流行病传播的理解. Wang 等<sup>[15]</sup> 研究了基于网络化亚种群的空间流行病的建模, 促进了人们对突发疾病大规模传播动力学的认识. 空间格局是疾病传播的特征, 可以预测空间中的流行病传播动态, 为研究和管理流行病的空间动态提供了重要的理论依据, 进而指导政策制定<sup>[16]</sup>.

大多数反应扩散流行病模型考虑了传染病病原体在空间中的自发运动或扩散过程, 也就是说在

\* 国家自然科学基金 (批准号: 62073172, U1703262)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK20221329) 和江苏省研究生科研与实践创新计划 (批准号: KYCX\_220968) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [candymanxm2003@aliyun.com](mailto:candymanxm2003@aliyun.com)

这些模型中只考虑到了自扩散项存在的情况<sup>[17-21]</sup>. 比如 Wang 等<sup>[22]</sup>研究了具有饱和感染力的反应扩散流行病模型自扩散系数对 Turing 斑图的影响. Sun 等<sup>[23]</sup>提出了具有非线性发病率的流行病模型的感染率  $\beta$  不同对空间格局的影响.

交叉扩散是指考虑不同物种或类型之间相互影响的扩散过程, 即一个隔间的浓度梯度引起另一个隔间的流通, 而不是仅存在隔间本身的流通. 它首先由 Kerner<sup>[24]</sup>提出. 以流行病学领域为例, 在现实生活中易感者有能力识别感染者并且选择远离或接近他们<sup>[25,26]</sup>, 随后研究人员对流行病学模型的空间格局进行了一系列的研究. Aly 等<sup>[27]</sup>研究了一种具有自扩散和交叉扩散项 SIS 模型的稳定性问题, 并通过数值模拟研究了 Turing 模式. Triska 等<sup>[28]</sup>提出了一种具有负值的感染者交叉扩散 SI 模型, 并研究了负值感染者交叉扩散对斑图种类的影响.

然而, 当前针对交叉扩散对空间流行病模型的研究大多都局限在 Turing 不稳定以及对斑图数值仿真的初步结果, 但对于交叉扩散对空间流行病模型的稳定性、稳定速度以及斑图结构的影响机制研究相对较少. 为了更好地了解这些机制, 本文研究空间流行病 SI 模型的空间格局的形成等问题.

本文的结构组织如下: 第 2 节提出了一个具有自扩散和交叉扩散项的空间流行病模型; 第 3 节分析了该模型发生 Turing 不稳定的条件; 第 4 节通过一系列的斑图仿真模拟, 阐明了交叉扩散对系统的稳定性、稳定速度以及斑图结构的影响; 第 5 节对本文工作进行总结并展望未来的工作.

## 2 模型介绍

常见的空间流行病模型有 SIS 模型, SIR 模型和 SI 模型, 这些模型被广泛应用于描述和分析传染病在人群中的传播过程, 对理解和控制传染病的传播具有重要意义. SIS 模型将人群分为两类: 易感人群 (S) 与感染人群 (I), 该模型假设易感人群 (S) 在被感染为感染人群 (I) 后能够恢复成易感人群 (S), 通常用于研究一些康复后不会获得长期免疫的疾病, 如普通感冒、疟疾等<sup>[29]</sup>. SIR 模型包含 3 种人群: 易感人群 (S)、感染人群 (I)、康复人群 (R), 与 SIS 模型不同的是, SIR 模型假设感染人群能够恢复成康复人群, 即从感染人群恢复并具有永久免

疫的人群, 该模型适用于研究感染后能够获得长期免疫的疾病, 如白日咳、麻疹<sup>[30]</sup>.

本文考虑空间流行病模型中的一种基本模型: SI 模型. 一般来说, SI 模型的病原体活跃的人群包括两个亚群体: 一类是易感人群 (S), 另一类是感染人群 (I). 其中 S 和 I 都是关于时间与空间的函数, 它们都可以将病毒传播给健康个体. 与 SIR 或 SIS 模型不同, SI 模型假设易感人群一旦被感染, 他们就会持续处于感染状态, 不会恢复成易感状态, 该模型一般用于研究一旦感染后就永久带病原体的疾病, 许多性传播疾病, 如艾滋病, 都遵循 SI 控制的流行病学<sup>[31]</sup>.

文献<sup>[23]</sup>考虑了以下具有非线性发病率的空

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= A - dS - \beta S^p I^q + D_S \nabla^2 S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta S^p I^q - (d + \mu)I + D_I \nabla^2 I,\end{aligned}\quad (1)$$

其中,  $d$  为被感染者的疾病相关死亡率;  $A$  是人

口的吸纳率;  $\mu$  为疑似感染者和被感染者的自然死亡率;  $\beta S^p I^q$  是非线性的发病率, 相比于双线性发病率  $\beta SI$  具有更丰富的动力学行为<sup>[32]</sup>, 其中  $\beta$  是传播率, 本文假设  $p = 1, q = 2$ ;  $\nabla^2$  是二维空间中的拉普拉斯算子,  $x, y$  表示空间;  $D_S$  与  $D_I$  分别表示易感个体和感染个体的自扩散系数.

本文在此研究基础上引入交叉扩散. 模型如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= A - dS - \beta S^p I^q + D_S \nabla^2 S + D_1 \nabla^2 I, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta S^p I^q - (d + \mu)I + D_I \nabla^2 I + D_2 \nabla^2 S,\end{aligned}\quad (2)$$

其中,  $D_1$  为易感人群交叉扩散系数,  $D_1 \nabla^2 I$  代表感染人群对易感人群扩散的影响;  $D_2$  为感染人群的交叉扩散系数,  $D_2 \nabla^2 S$  代表易感人群对感染人群扩散的影响. 交叉扩散系数可以为正、零或负<sup>[17]</sup>. 易感人群交叉扩散系数  $D_1$  为正值, 表示易感人群向感染人群密度较低的方向移动 (易感人群移动后仍保持易感状态), 即易感人群倾向于远离感染人群. 感染者的交叉扩散系数  $D_2$  为正值, 表示感染人群向易感人群密度低的方向移动 (感染人群移动后仍保持感染状态), 即感染人群倾向于远离易感人群. 模型 (2) 需要用初始种群进行分析:

$$S(0) > 0, I(0) > 0,$$

并且边界条件:  $\frac{\partial S}{\partial n}\Big|_{(x,y)} = \frac{\partial I}{\partial n}\Big|_{(x,y)} = 0$ , 其中  $n$  是空间,  $(x, y) \in \partial\Omega$  是空间域.

### 3 稳定性分析

为了找出反应扩散系统 (2) 发生 Turing 不稳定的条件, 首先研究无扩散系统平衡点的稳定性. 当无扩散时, 即  $D_1 = D_2 = D_S = D_I = 0$ , 系统 (2) 退化为

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - dS - \beta S^p I^q \triangleq f(S, I), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S^p I^q - (d + \mu)I \triangleq g(S, I). \end{aligned} \quad (3)$$

通过计算可得系统 (3) 有 3 个平衡点:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left( \frac{A\beta - \sqrt{A^2\beta^2 - 4d^3\beta - 8d^2\beta\mu - 4d\beta\mu^2}}{2d\beta}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2d(d + \mu)}{A\beta - \sqrt{A^2\beta^2 - 4d^3\beta - 8d^2\beta\mu - 4d\beta\mu^2}} \right), \\ E_2 &= \left( \frac{A\beta + \sqrt{A^2\beta^2 - 4d^3\beta - 8d^2\beta\mu - 4d\beta\mu^2}}{2d\beta}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2d(d + \mu)}{4\beta + \sqrt{A^2\beta^2 - 4d^3\beta - 8d^2\beta\mu - 4d\beta\mu^2}} \right), \\ E_3 &= \left( \frac{A}{d}, 0 \right). \end{aligned}$$

$E_3$  对应于流行病灭绝的情况, 并且  $E_2$  是不稳定的<sup>[23]</sup>, 所以本文只研究平衡点  $E_1$  处的稳定性, 记  $E_1 = (S_1, I_1)$ . 系统 (3) 在平衡点  $E_1$  处的雅克比矩阵如下:

$$J_0 = \begin{pmatrix} f_S & f_I \\ g_S & g_I \end{pmatrix},$$

其中,  $f_q$  与  $g_q$  ( $q = S, I$ ) 分别是  $f(S, I)$ ,  $g(S, I)$  在平衡点  $E_1$  处关于  $q$  的偏导数. 系统 (3) 的特征方程为

$$\Delta_0(\lambda) = \lambda^2 + m_0\lambda + h_0 = 0, \quad (4)$$

其中,  $m_0 = -(f_S + g_I)$ ,  $h_0 = f_S g_I - f_I g_S$ .

做如下假设:

$$(H_1) : h_0 > 0, m_0 > 0.$$

**定理 1** 若  $(H_1)$  成立, 则系统 (3) 在平衡点  $E_1$  处局部渐进稳定.

**证明** 若  $(H_1)$  成立, 根据赫尔维茨判据可得特征方程 (4) 所有特征根实部均小于 0, 即系统 (3) 在平衡点  $E_1$  处渐近稳定.

**注 1** Turing 不稳定本质是由扩散引起, 因此

下文对于含扩散系统的 Turing 不稳定分析均建立在无扩散系统 (3) 在平衡点  $E_1$  处稳定的前提下, 即  $(H_1)$  成立.

考虑仅含自扩散存在的情况, 即  $D_1 = D_2 = 0$ ,  $D_S \neq 0$ ,  $D_I \neq 0$ . 系统 (2) 退化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= A - dS - \beta S^p I^q + D_S \nabla^2 S, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta S^p I^q - (d + \mu)I + D_I \nabla^2 I. \end{aligned} \quad (5)$$

若平衡点  $E_1$  处的微扰形式为  $e^{\lambda t} \cos(k_x x) \times \cos(k_y y)$ , 则在平衡点  $E_1$  处得到系统 (5) 的雅克比矩阵如下:

$$J_1 = \begin{pmatrix} f_S - k^2 D_S & f_I \\ g_S & g_I - k^2 D_I \end{pmatrix},$$

其中,  $k$  为波数, 并且满足  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . 由雅克比矩阵  $J_1$  得到系统 (5) 的特征方程如下:

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda^2 + m_1\lambda + h_1 = 0, \quad (6)$$

其中:

$$m_1 = (D_S + D_I)k^2 - (f_S + g_I),$$

$$h_1 = (D_S D_I)k^4 - (f_S D_I + g_I D_S)k^2 + f_S g_I - f_I g_S.$$

做如下假设:

$$(H_2) : (-f_S D_I - g_I D_S) > 0 \text{ 或 } (-f_S D_I - g_I D_S) < 0,$$

$$(-f_S D_I - g_I D_S)^2 - 4D_S D_I (f_S g_I - f_I g_S) < 0.$$

$$(H_3) : (-f_S D_I - g_I D_S) < 0,$$

$$(-f_S D_I - g_I D_S)^2 - 4D_S D_I (f_S g_I - f_I g_S) > 0.$$

**定理 2** 对系统 (5) 有如下结论:

1) 若  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  均成立, 则系统 (5) 在平衡点  $E_1$  处局部渐进稳定;

2) 若  $(H_1)$ ,  $(H_3)$  均成立, 则系统 (5) 在平衡点  $E_1$  处发生 Turing 不稳定.

**证明**

1) 若  $(H_1)$  成立, 则有  $m_1 > 0$ . 当  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  均成立时, 对于所有的  $k^2$  都有  $h_1 > 0$ . 此时方程 (6) 无正实部特征根, 系统 (5) 在平衡点  $E_1$  处局部渐进稳定.

2) 若  $(H_3)$  成立, 存在  $k^2$  使得  $h_1 < 0$ . 此时方程 (6) 存在正实部特征根, 则系统 (5) 在平衡点  $E_1$  处发生 Turing 不稳定.

**注 2** 当系统处于局部渐进稳定时, 易感人群 (S) 与感染人群 (I) 种群密度在空间的各个位置趋

于平衡态. 当系统处于 Turing 不稳定时, 易感人群 (S) 与感染人群 (I) 种群在空间中出现非均匀的密度分布.

考虑自扩散与交叉扩散均存在的情况, 在平衡点  $E_1$  处得到系统 (2) 的雅克比矩阵如下:

$$J_2 = \begin{pmatrix} f_S - k^2 D_S & f_I - k^2 D_1 \\ g_S - k^2 D_2 & g_I - k^2 D_1 \end{pmatrix},$$

其中,  $k$  为波数, 并且满足  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . 由雅克比矩阵  $J_2$  得到的色散关系如下:

$$\Delta_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0, \quad (7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \alpha &= (D_S + D_1)k^2 - (f_S + g_I), \\ \beta &= (D_S D_1 - D_1 D_2)k^4 + k^2(-D_S g_I - D_1 f_S \\ &\quad + D_2 f_I + D_1 g_S) + f_S g_I - f_I g_S. \end{aligned}$$

做如下假设:

$$\begin{aligned} (H_4) : & (-D_S g_I - D_1 f_S + D_2 f_I + D_1 g_S) < 0, \\ & (-D_S g_I - D_1 f_S + D_2 f_I + D_1 g_S)^2 \\ & - 4(D_S D_1 - D_1 D_2)(f_S g_I - f_I g_S) > 0. \end{aligned}$$

**定理 3** 若  $(H_1), (H_4)$  均成立, 则系统 (2) 在平衡点  $E_1$  处发生 Turing 不稳定.

**证明** 若  $(H_1), (H_4)$  均成立, 总有合适的波数  $k^2$  使得  $\alpha < 0, \beta < 0$ , 此时特征方程 (7) 存在正实部的特征根, 即系统 (2) 在平衡点  $E_1$  处发生 Turing 不稳定.

## 4 数值模拟

在二维空间中由反应扩散系统定义的连续问题在具有  $M = N = 200$  个网格位置的离散域中求解.  $\Delta h$  为网格点之间的间距, 时间步长为  $\Delta t$ . 在离散系统中, 用有限差分计算描述扩散的拉普拉斯函数. 本文设置  $\Delta h = 1, \Delta t = 0.01$ . 离散域初始条件选取为稳态周围 0.01 量级的均匀分布随机扰动, 其形式为

$$\begin{aligned} S(x, y, 0) &= S_1 + 0.01 \times \xi_1, \\ I(x, y, 0) &= I_1 + 0.01 \times \xi_1, \end{aligned}$$

其中  $\xi_1$  表示在  $200 \times 200$  的网格中添加 0—1 之间的随机值. 取参数  $A = 1, \mu = 1.8, d = 1, \beta = 35$  时,  $(H_1)$  成立, 由定理 1 可知, 系统 (2) 在无扩散时是局部渐进稳定的. 分别取自扩散系数  $D_S = 6,$

$D_1 = 6$  (无自扩散驱动系统不稳定);  $D_S = 6, D_1 = 1$  (自扩散驱动系统不稳定) 两种情况进行对比分析.

**注 3** 本文主要参考了文献 [23], 故仿真中也基于该文献中的系统参数以及自扩散系数取值, 并且所取值的系统参数及自扩散系数均满足上文的稳定性条件. 在稳定性分析部分, 我们发现改变交叉扩散系数会影响系统在平衡点处特征方程的特征值, 即改变交叉扩散系数可能会对系统动力学产生一定影响, 故在本文的仿真中选取不同的交叉扩散系数以此研究交叉扩散对系统动力学的影响.

**注 4** 当  $D_S = 6, D_1 = 6$  时,  $(H_1), (H_2)$  均成立, 由定理 2 可知, 系统 (5) 在平衡点  $E_1$  处局部渐进稳定, 即无自扩散驱动系统不稳定. 当  $D_S = 6, D_1 = 1$  时,  $(H_1), (H_3)$  均成立, 系统 (5) 在平衡点  $E_1$  处发生 Turing 不稳定, 即自扩散驱动系统不稳定.

### 4.1 交叉扩散诱导 Turing 斑图的形成

本节讨论当  $D_S = 6, D_1 = 6$  时, 交叉扩散系数  $D_1, D_2$  对系统 (2) 空间格局的影响机理.

绘制系统 (2) 的色散关系曲线, 如图 1 所示. 当  $D_1 = D_2 = 0$  时 (蓝线) 时, 系统 (2) 退化为仅含自扩散的系统 (5), 观察到方程 (7) 所有特征根实部均为负数, 此时系统 (2) 是局部渐进稳定的. 当交叉扩散系数  $D_2 = 6$  (黄线),  $D_2 = 8$  (紫线) 时, 观察到引入交叉扩散使得方程 (7) 在一定波数  $k^2$  范围内存在正实部特征根, 则系统 (2) 发生 Turing 不稳定.

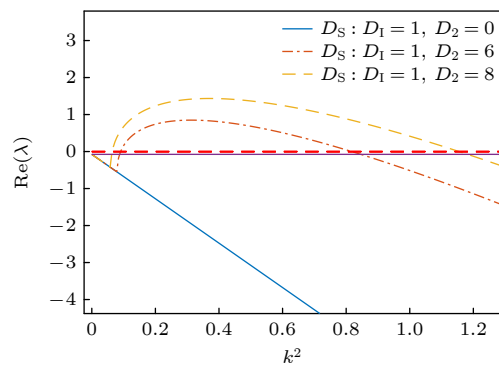


图 1 色散关系曲线

Fig. 1. Dispersion relationship curve.

验证色散关系所得出的结论, 对系统 (2) 进行斑图仿真模拟. 图 2 为  $D_S$  与  $D_1$  比值为 1 (无自扩散驱动系统不稳定), 在未引入交叉扩散时不同迭代步数下的空间格局. 在迭代 200 步时, 由于初值的

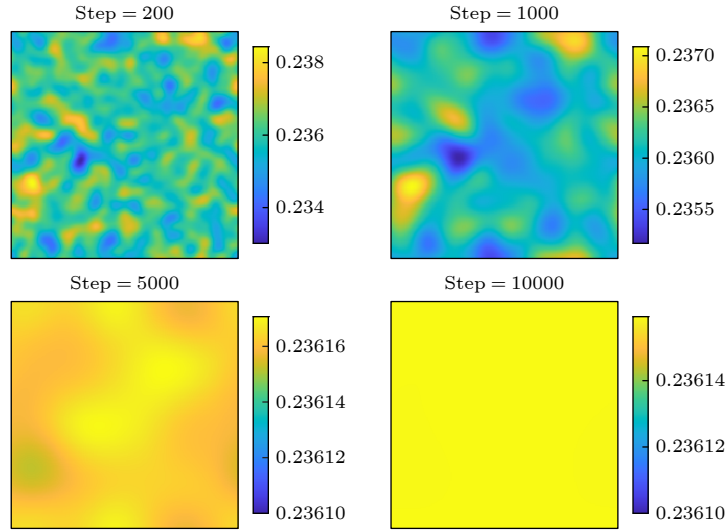


图 2 不同迭代步数下的空间格局  
Fig. 2. Spatial pattern under different iteration steps.

随机扰动, 此时系统 (2) 的空间格局处于一个不稳定的瞬态模式; 当迭代到第 10000 步, 此时空间格局已是稳定的纯色均匀态.

由图 1 色散关系曲线易知, 引入交叉扩散能够改变系统 (2) 的局部稳定性, 即分布均匀的纯色空间格局会发生改变. 图 3(a)—(d) 为  $D_S$  与  $D_1$  比值为 1 时, 引入交叉扩散系统 (2) 出现的空间格局. 图 3(a) 和图 3(b) 分别为交叉扩散系数  $D_2 = 6, 8$  时出现的孔洞-条纹斑图与条状斑图. 图 3(c) 为交叉扩散系数  $D_1 = -6, D_2 = 6$  时出现的条状斑图. 图 3(d) 为交叉扩散系数  $D_1 = -8, D_2 = 8$  时出现的点-条状斑图.

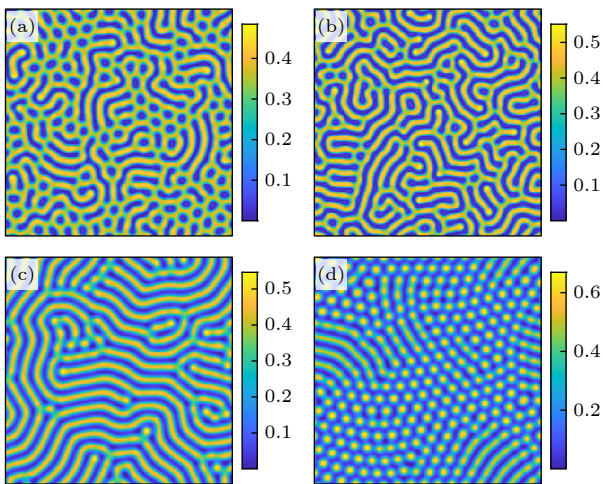


图 3 不同交叉扩散取值的空间格局 (a)  $D_2 = 6$ ; (b)  $D_2 = 8$ ; (c)  $D_1 = -6, D_2 = 6$ ; (d)  $D_1 = -8, D_2 = 8$   
Fig. 3. The spatial pattern of of different cross diffusion values: (a)  $D_2 = 6$ ; (b)  $D_2 = 8$ ; (c)  $D_1 = -6, D_2 = 6$ ; (d)  $D_1 = -8, D_2 = 8$ .

**注 5** 上述模拟结果表明, 在无自扩散驱动系统不稳定的情况下, 引入交叉扩散能够使原本局部稳定的系统转变为不稳定的状态, 即交叉扩散能够诱导 Turing 斑图的形成.

#### 4.2 交叉扩散改变系统的空间格局

首先讨论当  $D_S = 6, D_1 = 1$ , 交叉扩散系数  $D_2 = 0$ , 易感染者交叉扩散系数  $D_1$  对系统 (2) 空间格局的影响机理.

图 4(a) 为不同交叉扩散系数  $D_1$  下的色散关系曲线. 当  $D_S$  与  $D_1$  的比值为 6, 且  $D_1 = 0$  (蓝线) 时, 方程 (7) 已经存在正实部特征根, 系统 (2) 发生 Turing 不稳定. 交叉扩散系数  $D_1$  为负值, 即  $D_1 = -0.2, -1$  (色散关系图对应红、黄曲线) 时, 能够看出随着  $D_1$  的减小, 方程 (7) 特征根的正实部越来越大, 此时系统 (2) 仍然会发生 Turing 不稳定. 当交叉扩散系数  $D_1$  为正值, 即  $D_1 = 1, 3.5$  (色散关系图对应紫、绿曲线) 时, 能够看出随着  $D_1$  的增大, 方程 (7) 特征根的实部变小直至出现负值, 即引入交叉扩散使原本在平衡点  $E_1$  处不稳定的系统 (2) 转变为稳定的状态.

图 4(b) 为当  $D_1 = 0$  时的空间格局为点-条状斑图; 图 4(c) 和图 4(d) 分别为负交叉扩散系数  $D_1 = -0.2, -1$  的空间格局; 当  $D_1 = -0.2$ , 虽然此时的空间格局仍为点-条状斑图, 但可以明显看出相较于  $D_1 = 0$  的空间格局点状的斑图数量更多, 而当  $D_1 = -1$  时, 此时的空间格局已经全部变为点状斑图. 图 4(e) 和图 4(f) 分别为正交叉扩散系数  $D_1 = 1,$

3.5的空间格局. 当  $D_1 = 1$ , 此时空间格局为迷宫状斑图; 当  $D_1 = 3.5$ , 此时的空间格局变为了分布均匀的纯色图, 即系统 (2) 转变为局部稳定状态.

**注 6** 图 4 所示结果表明, 在自扩散驱动系统不稳定的情况下引入易感染者交叉扩散系数  $D_1$  改变了系统 (2) 的 Turing 斑图结构, 并且使自扩散驱动不稳定的系统转变为局部稳定状态.

下面考虑当交叉扩散系数  $D_1 = 0$  时, 感染者交叉扩散系数  $D_2$  对系统 (2) 的空间格局影响机理.

同样取  $D_S = 6, D_1 = 1$ .

图 5(a) 为不同交叉扩散系数  $D_2$  下的色散关系曲线. 当正交叉扩散系数  $D_2 = 0.5, 2$  时 (色散关系图对应橙、黄曲线), 能够看出随着  $D_2$  的增大, 方程 (7) 特征根的实部越来越大, 此时系统 (2) 发生 Turing 不稳定. 当负交叉扩散系数  $D_2 = -1, -2$  时, 方程 (7) 特征根的实部越来越小直至出现负值, 即交叉扩散引入使得系统 (2) 在平衡点  $E_1$  处转变为局部稳定的状态.

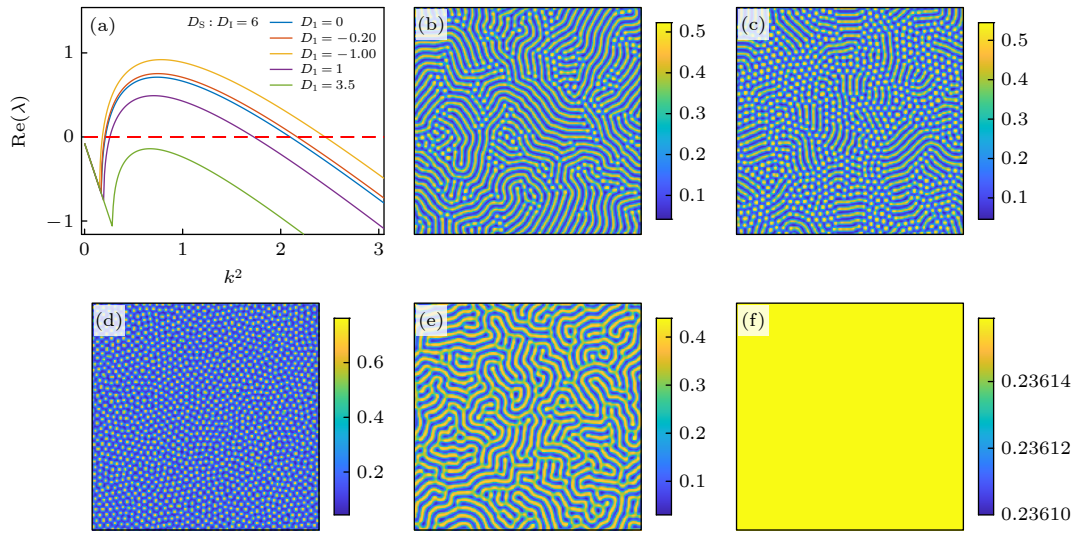


图 4 不同取值的交叉扩散系数  $D_1$  的色散关系曲线及空间格局 (a) 色散关系曲线; (b)  $D_1 = 0$ ; (c)  $D_1 = -0.2$ ; (d)  $D_1 = -1$ ; (e)  $D_1 = 1$ ; (f)  $D_1 = 3.5$

Fig. 4. Dispersion relationship curves and spatial patterns of cross diffusion coefficients  $D_1$  with different values: (a) Dispersion relationship curve; (b)  $D_1 = 0$ ; (c)  $D_1 = -0.2$ ; (d)  $D_1 = -1$ ; (e)  $D_1 = 1$ ; (f)  $D_1 = 3.5$ .

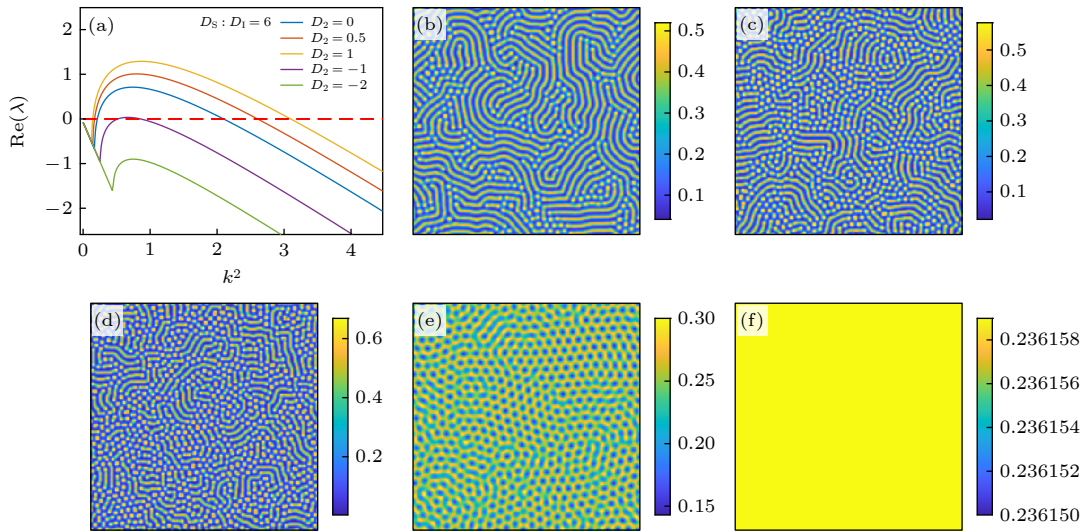


图 5 不同取值的交叉扩散系数  $D_2$  的色散关系曲线及空间格局 (a) 色散关系曲线; (b)  $D_2 = 0$ ; (c)  $D_2 = 0.5$ ; (d)  $D_2 = 1$ ; (e)  $D_2 = -1$ ; (f)  $D_2 = -2$

Fig. 5. Dispersion relationship curves and spatial patterns of cross diffusion coefficients  $D_2$  with different values: (a) Dispersion relationship curve; (b)  $D_2 = 0$ ; (c)  $D_2 = 0.5$ ; (d)  $D_2 = 1$ ; (e)  $D_2 = -1$ ; (f)  $D_2 = -2$ .

图 5(b) 为  $D_2 = 0$  时的空间格局为点-条状斑图. 图 5(c), (d) 分别为正交叉扩散系数  $D_2 = 0.5, 2$  时出现的点-条状斑图, 能够看出随着  $D_2$  的增大点状斑图数量逐渐增加, 且条状斑图的形状越来越不规则. 图 5(e) 和图 5(f) 分别为负交叉扩散系数  $D_2 = -1, -2$  时的空间格局. 当  $D_2 = -1$ , 此时的空间格局为洞孔状斑图; 当  $D_2 = -2$  时, 此时的空间格局变为了分布均匀的纯色图.

**注 7** 图 5 所示结果表明, 在自扩散驱动系统不稳定的情况下引入感染者交叉扩散系数  $D_2$  改变了系统的 Turing 斑图结构, 并且使自扩散驱动不稳定的系统转变为局部稳定状态.

### 4.3 交叉扩散改变系统的稳定速度

本节研究在有无自扩散驱动系统不稳定的情况下, 讨论交叉扩散对系统 (2) 到达稳定状态所需时间的影响机理.

首先考虑在  $D_S = 6, D_I = 6$  的情况下, 当交叉扩散系数  $D_2 = 0$  时, 易感者交叉扩散系数  $D_1$  对系统 (2) 到达稳定状态所需时间的影响机理.

由图 6 可知, 虽然引入交叉扩散没有改变系

统 (2) 局部稳定状态, 但是能观察到交叉扩散对系统 (2) 到达稳定状态所需要的时间具有一定影响. 在迭代 200 步时, 系统 (2) 的空间格局由于初值的随机扰动, 当  $D_1 = -9, -9.8, -10.2$  时都处于一个不规则的瞬态模式. 当迭代到第 450 步时, 三组参数的斑点轮廓都逐渐减弱并且能够看出  $D_1$  越小, 斑点的轮廓越明显, 即系统 (2) 到达稳定状态所需要的时间越多. 当  $D_1 = -9$ , 迭代到第 800 步时, 系统 (2) 的空间格局进入了均匀的纯色分布状态; 当  $D_1 = -9.8, -10.2$  时, 分别到第 1500, 3000 步时系统 (2) 的空间格局才到达均匀的纯色状态.

考虑不同迭代步数时空间离散域中感染者  $I$  到达平衡点浓度的网格个数. 当传播率  $\beta = 35$  时, 此时平衡点处的浓度  $I_1 = 0.2362$ . 选择  $M = N = 200$ , 共有 40000 个网格. 图 7 展示了在不同的交叉扩散系数下, 不同迭代步数稳定到平衡点处浓度的网格数. 在相同的迭代步数下  $D_1$  的值越大, 稳定到平衡点浓度的网格个数就越多, 即在没有自扩散驱动系统不稳定的情况下, 负交叉扩散系数  $D_1$  的值越大, 稳定的速度越快, 系统 (2) 到达稳定状态的时间越少.

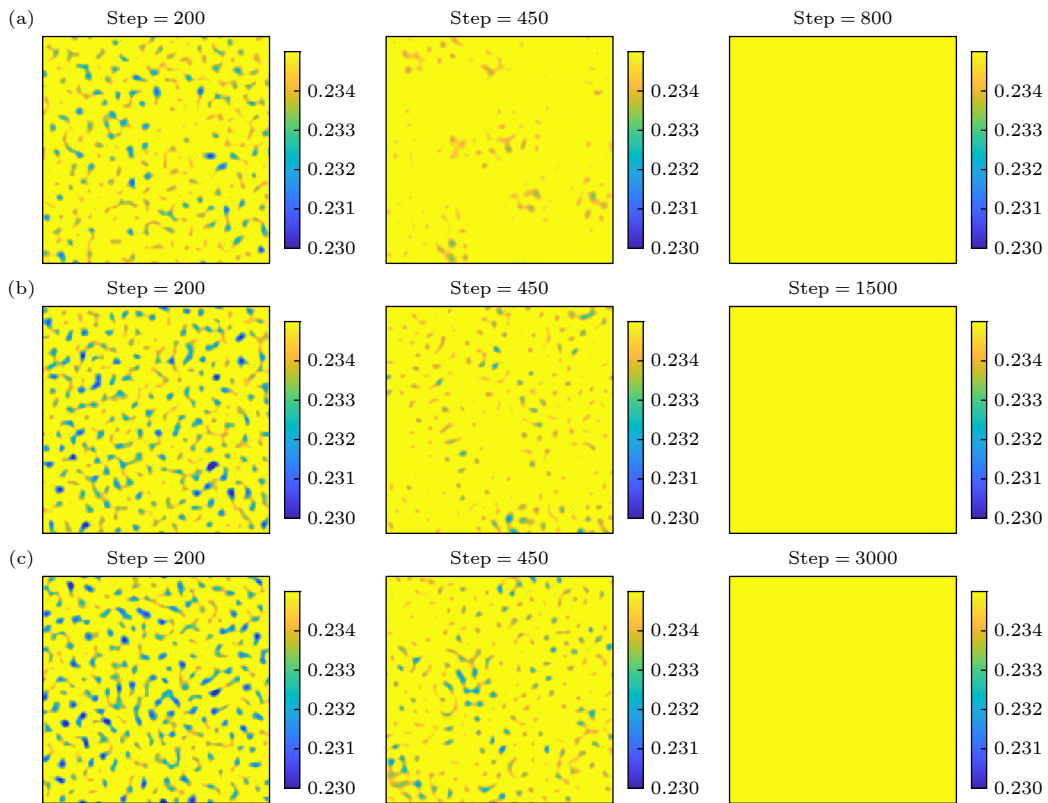


图 6 不同交叉扩散系数对应的系统演化图 (a)  $D_1 = -9$ ; (b)  $D_1 = -9.8$ ; (c)  $D_1 = -10.2$

Fig. 6. System evolution diagrams corresponding to different cross diffusion coefficients: (a)  $D_1 = -9$ ; (b)  $D_1 = -9.8$ ; (c)  $D_1 = -10.2$ .

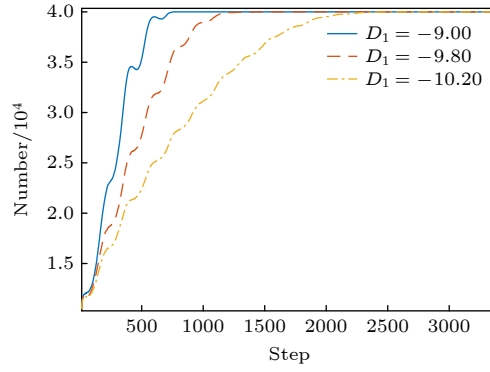


图 7 当  $D_1 = -9, -9.8, -10.2$  时, 不同迭代步数稳定到平衡点的网格个数

Fig. 7. The number of grids that stabilize to the equilibrium point with different iteration steps when  $D_1 = -9, -9.8, -10.2$ .

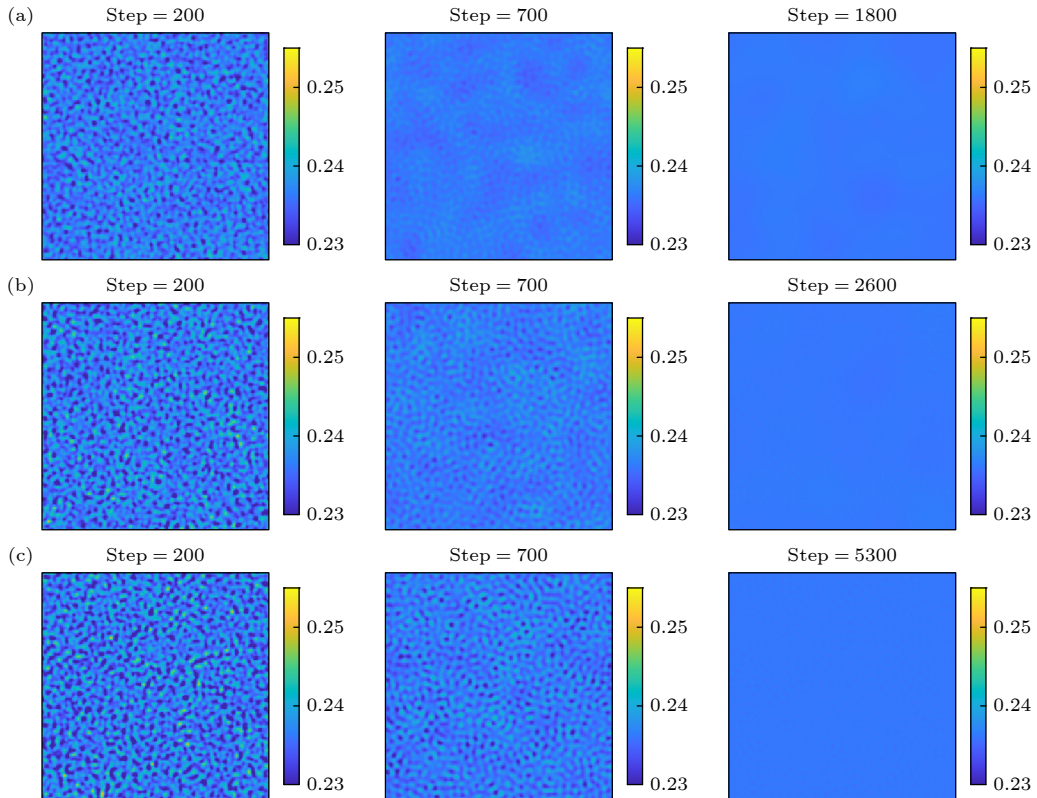


图 8 不同交叉扩散系数对应的系统演化图 (a)  $D_1 = 4$ ; (b)  $D_1 = 3.5$ ; (c)  $D_1 = 3.2$

Fig. 8. System evolution diagrams corresponding to different cross diffusion coefficients: (a)  $D_1 = 4$ ; (b)  $D_1 = 3.5$ ; (c)  $D_1 = 3.2$ .

下面考虑在  $D_S = 6, D_1 = 1$  的情况下, 当交叉扩散系数  $D_2 = 0$  时, 易感染者交叉扩散系数  $D_1$  对系统 (2) 到达稳定状态所需时间的影响机理.

由图 8 可知, 引入交叉扩散不仅改变系统 (2) 原本不稳定的状态, 而且对系统 (2) 到达稳定状态所需要的时间也具有影响. 当迭代到第 700 步时, 对于  $D_1 = 4$ , 斑点的轮廓已经较模糊, 而当  $D_1 = 3.5, 3.2$  时, 仍有较清晰的斑点轮廓存在, 且当  $D_1 = 3.2$  时斑点的轮廓更为清晰. 当  $D_1 = 4$  迭代到 1800 步时, 系统 (2) 的空间格局进入了均匀

的纯色分布状态, 而当  $D_1 = 3.5, 3.2$  时, 分别到 2600 步和 5300 步才能够进入均匀的纯色状态.

当传播率  $\beta = 35$  时, 平衡点处的浓度  $I_1 = 0.2362$ , 考虑空间离散域中感染者  $I$  到达平衡点浓度的网格个数. 图 9 展示了在不同交叉扩散系数下, 不同迭代步数稳定到平衡点浓度的网格数. 在相同迭代步数下  $D_1$  的值越大, 稳定到平衡点的网格个数就越多, 即在自扩散驱动系统不稳定的情况下, 正交叉扩散系数  $D_1$  越大, 稳定速度越快, 系统 (2) 到达稳定状态的时间越少.

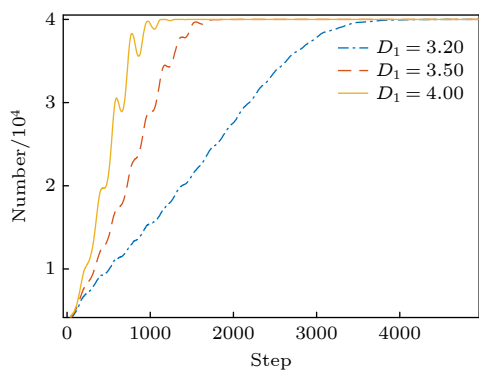


图 9 当  $D_1 = 4, 3.5, 3.2$  时, 不同迭代步数稳定到平衡点的网格个数

Fig. 9. The number of grids that stabilize to the equilibrium point with different iteration steps when  $D_1 = 4, 3.5, 3.2$ .

## 5 结 论

本文研究了交叉扩散对具有非线性发病率 SI 模型的空间格局影响机理等问题, 如斑图的形成与斑图结构改变、系统稳定速度等. 分析了无扩散系统平衡点的稳定性, 并且阐明了存在扩散项时发生 Turing 不稳定的条件. 通过数值仿真得到了一些结论: 在无自扩散驱动系统不稳定的情况下, 引入交叉扩散能够改变系统的局部稳定性, 诱导斑图的形成. 在自扩散驱动系统不稳定的情况下, 引入交叉扩散能够改变斑图的结构. 对于易感染者交叉扩散系数  $D_1$ , 当  $D_1$  的取值为负时, 斑图的结构从点-条状斑图转变为点状斑图, 而当  $D_1$  的取值为正时, 斑图结构从点-条状斑图转变为迷宫状斑图, 最后转变为分布均匀的纯色图. 对于感染者交叉扩散系数  $D_2$ , 当  $D_2$  取值为正时, 斑图的转变与易感者交叉扩散系数  $D_1$  取值为负时相同, 逐渐转变为点状斑图, 而当  $D_2$  取值为负时, 斑图的结构却出现孔洞状结构, 最后转变为分布均匀的纯色图. 对于系统稳定速度, 在无自扩散驱动系统不稳定的情况下, 交叉扩散会影响系统的稳定速度. 易感者交叉扩散系数  $D_1$  为负值且  $D_1$  越大, 系统稳定的速度越快. 当存在自扩散驱动系统不稳定时, 交叉扩散使系统从不稳定的状态转变为局部稳定状态且对其稳定速度也具有一定影响. 易感者交叉扩散系数  $D_1$  为正值且  $D_1$  越小, 系统 (2) 稳定的速度越慢.

基于本文的研究结果, 未来将考虑将二维的空间格局研究推广至三维的空间格局, 并且将整数阶模型推广至分数阶模型. 扩散项在非线性动力学系

统中有着重要的作用, 未来也将考虑将扩散项转换为复杂网络, 研究复杂网络所诱导的 Turing 斑图.

## 参考文献

- [1] Turing A M 1952 *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B* **2** 37
- [2] Capone F, Carfora M F, De Luca R, Torricollo I 2019 *Math. Comput. Simul.* **165** 172
- [3] Ali I, Saleem M T 2023 *Mathematics* **11** 1459
- [4] Hu J, Zhu L, Peng M 2022 *Inf. Sci.* **596** 501
- [5] Ruiz-Baier R, Tian C 2013 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **14** 601
- [6] Sun G Q, Jin Z, Liu Q X, Li L 2007 *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2007** P11011
- [7] Liu R Q, Jia M M, Fan W L, He Y F, Liu F C 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 248201 (in Chinese) [刘若琪, 贾萌萌, 范伟丽, 贺亚峰, 刘富成 2022 物理学报 **71** 248201]
- [8] Zhang R P, Wang Z, Wang Y, Han Z J 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 050503 (in Chinese) [张荣培, 王震, 王语, 韩子健 2018 物理学报 **67** 050503]
- [9] Giri A, Pramod Jain S, Kar S 2020 *Chemphyschem* **21** 1608
- [10] Wang N, Xiao M, Jiang H J, Huang X 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 180201 (in Chinese) [王楠, 肖敏, 蒋海军, 黄霞 2022 物理学报 **71** 180201]
- [11] Wang L Z, Zhou X C, Chen M 2019 *Inf. Control.* **48** 559 (in Chinese) [王凌志, 周先春, 陈铭 2019 信息与控制 **48** 559]
- [12] Pastor-Satorras R, Castellano C, Van Mieghem P, Vespignani A 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 925
- [13] Wang W, Cai Y, Wu M 2012 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **13** 2240
- [14] Ruan Z Y 2020 *Sci. Sin-Phys. Mech. Astron.* **50** 010507 (in Chinese) [阮中远 2020 中国科学: 物理学 力学 天文学 **50** 010507]
- [15] Wang L, Li X 2014 *Chin. Sci. Bull.* **59** 3511
- [16] Sun G Q, Jusup M, Jin Z, Wang Y, Wang Z 2016 *Phys. Life Rev.* **19** 43
- [17] Guin L N, Acharya S 2017 *Nonlinear Dyn.* **88** 1501
- [18] Zhao L, Wang Z C, Ruan S 2020 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **51** 102966
- [19] Zheng Q, Pandey V, Shen J, Xu Y, Guan L 2022 *EPL* **137** 42002
- [20] Kuniya T, Wang J 2018 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **43** 262
- [21] Ahmed N, Fatima M, Baleanu D, Nisar K S, Khan I, Rafiq M, Rehman M A U, Ahmad M O 2020 *Front. Phys.* **7** 220
- [22] Wang W, Gao X, Cai Y, Shi H, Fu S 2018 *J. Franklin Inst.* **355** 7226
- [23] Sun G Q 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1097
- [24] Kerner E H 1957 *Bull. Math. Biol.* **19** 121
- [25] Fan Y 2014 *Appl. Math. Comput.* **228** 311
- [26] Ghorai S, Poria S 2016 *Chaos Solitons Fractals* **91** 421
- [27] Aly S, Khenous H B, Hussien F 2015 *Int. J. Biomath.* **8** 1550006
- [28] Triska A, Gunawan A Y, Nuraini N 2022 *J. Math. Computer Sci.* **27** 1
- [29] Brauer F, Driessche P V D 2001 *Math. Biosci.* **171** 143
- [30] Chinviriyasit S, Chinviriyasit W 2010 *Appl. Math. Comput.* **216** 395
- [31] Simon C P, Jacquez J A 1992 *SIAM J. Appl. Math.* **52** 541
- [32] Hethcote H W, van den Driessche P 1991 *J. Math. Biol.* **29** 271

# Spatial pattern of a class of SI models driven by cross diffusion\*

Lu Yuan-Shan<sup>1)</sup> Xiao Min<sup>1)†</sup> Wan You-Hong<sup>1)</sup> Ding Jie<sup>1)</sup> Jiang Hai-Jun<sup>2)</sup>

1) (*College of Automation, College of Artificial Intelligence, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China*)

2) (*College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumchi 830047, China*)

( Received 29 November 2023; revised manuscript received 17 January 2024 )

## Abstract

Currently, most of researches on the spatial patterns of the SI model focus on the influences of self-diffusion and system parameters on pattern formation, but only a few studies involve how cross-diffusion influences the evolution of spatial patterns. In this paper, we establish a spatial epidemic model that considers both self-diffusion and cross-diffusion and investigate the effects of cross-diffusion on the stability, the rate of stability, and the pattern structure of the SI model with or without self-diffusion-driven system instability. The stability of the non-diffusive system is analyzed, and the conditions for Turing instability in the presence of diffusion terms are elucidated. It is found that when the system is stable under self-diffusion-driven conditions, the introduction of cross-diffusion can change the system's local stability, and produce Turing patterns as well. Furthermore, different cross-diffusion coefficients can generate patterns with different structures. When the system is unstable under self-diffusion-driven conditions, the introduction of cross-diffusion can change the pattern structure. Specifically, when the cross-diffusion coefficient  $D_1$  for the susceptible individuals is negative, the pattern structure is transformed from spot-stripe patterns into spot patterns, and when it is positive, the pattern structure returns from spot-stripe patterns into labyrinthine patterns, and eventually into a uniform solid color distribution. When the cross-diffusion coefficient  $D_2$  for the infected individuals is positive, the pattern transformation is similar to when the cross-diffusion coefficient  $D_1$  for susceptible individuals is negative, the pattern gradually changes into spot patterns. When  $D_2$  is negative, the pattern structure exhibits a porous structure, eventually it is transformed into a uniform solid color distribution. Regarding the rate of stability of the SI model, in the case of a stable self-diffusion system, the introduction of cross-diffusion may change the rate of system stability, and the larger the cross-diffusion coefficient  $D_1$  for the susceptible individuals, the faster the system stabilizes. When the self-diffusion-driven system is unstable, the cross-diffusion causes the system to change from an unstable state into a locally stable state, and the smaller the susceptible individuals' cross-diffusion coefficient, the slower the rate of system stabilization is. Therefore, cross-diffusion has a significant influence on the stability, the rate of stability, and the pattern structure of the SI model.

**Keywords:** Turing instability, nonlinear incidence rate, cross diffusion, Turing pattern

**PACS:** 02.30.Oz, 05.45.-a, 87.10.Ed, 87.15.A-

**DOI:** [10.7498/aps.73.20231877](https://doi.org/10.7498/aps.73.20231877)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62073172, U1703262), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20221329), and the Graduate Research and Practice Innovation Program of Jiangsu Province, China (Grant No. KYCX\_220968).

† Corresponding author. E-mail: [candymanxm2003@aliyun.com](mailto:candymanxm2003@aliyun.com)



## 交叉扩散驱动的SI模型空间斑图

陆源杉 肖敏 万佑红 丁洁 蒋海军

### Spatial pattern of a class of SI models driven by cross diffusion

Lu Yuan-Shan Xiao Min Wan You-Hong Ding Jie Jiang Hai-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 080201 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20231877

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231877>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

反应扩散模型在图灵斑图中的应用及数值模拟

Application of reaction diffusion model in Turing pattern and numerical simulation

物理学报. 2018, 67(5): 050503 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171791>

空间周期性驱动对双层耦合反应扩散系统中图灵斑图的影响

Effects of spatial periodic forcing on Turing patterns in two-layer coupled reaction diffusion system

物理学报. 2022, 71(9): 098201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212148>

异质环境下各向异性扩散对图灵斑图的影响

Effects of anisotropic diffusion on Turing patterns in heterogeneous environment

物理学报. 2022, 71(24): 248201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221294>

双层耦合非对称反应扩散系统中的振荡图灵斑图

Oscillatory Turing patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems

物理学报. 2021, 70(15): 158201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201710>

双层耦合非对称反应扩散系统中的超点阵斑图

Super-lattice patterns in two-layered coupled non-symmetric reaction diffusion systems

物理学报. 2020, 69(2): 028201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191353>

双层耦合介质中四边形图灵斑图的数值研究

Numerical investigation on square Turing patterns in medium with two coupled layers

物理学报. 2019, 68(6): 068201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182167>