

# 基于有限差分的部分饱和双重孔隙介质 弹性波模拟与分析\*

石志奇<sup>1)2)3)</sup> 何晓<sup>1)2)3)†</sup> 刘琳<sup>1)3)</sup> 陈德华<sup>1)2)3)</sup>

1) (中国科学院声学研究所, 声场声信息国家重点实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院大学, 北京 100049)

3) (北京市海洋深部钻探测量工程技术研究中心, 北京 100190)

(2024年2月2日收到; 2024年3月26日收到修改稿)

双重孔隙介质模型考虑了岩石非均质性诱发的介观流对弹性波频散和衰减的影响, 在非均质储层地震资料定量解释中取得良好的应用效果. 基于双重孔隙介质理论模型, 利用数值算法开展弹性波模拟工作不仅可以直观显示波的传播特征, 同时也为后期地震反演成像工作奠定基础. 本文基于 Santos-Rayleigh 部分饱和和双重孔隙介质模型, 利用交错网格有限差分算法模拟并分析了双重孔隙介质中的波场快照和波形曲线. 采用 Zener 黏弹性模型近似表征介观流机制, 结果表明 Zener 模型能够较好地反映快纵波传播特征, 却无法表征慢纵波 P3 波在低频段的衰减特征. 利用时间分裂法解决波动方程的刚性问题, 提高计算效率. 利用解析解验证了有限差分算法正确性的基础上, 模拟了均匀介质和分层介质中的波场快照和波形曲线, 清晰直观地反映了快纵波在地震频段的强衰减特征, 与双重孔隙理论模型预测结果一致. 模拟结果有助于进一步理解非均匀部分饱和和孔隙介质中的弹性波传播特征.

**关键词:** 双重孔隙介质, 有限差分, 频散与衰减

**PACS:** 02.60.Cb, 91.60.Qr, 04.30.Nk

**DOI:** 10.7498/aps.73.20240227

## 1 引言

理解弹性波在多相孔隙介质中的传播规律对于地质储层的勘探和监测具有重要意义. Biot 模型<sup>[1]</sup>为我们理解弹性波在流固耦合的孔隙介质中的传播奠定了理论基础, 在过去 60 多年里得到了广泛发展和应用<sup>[2,3]</sup>. 然而此类模型的均匀化假设使其无法分析波在地震频段的频散和衰减, 无法有效指导地震勘探工作.

多孔岩石常常由于孔隙结构和流体分布的差异而表现出非均质性, 呈现出多种类型的孔隙结构. 当非均质体的尺度远大于颗粒尺度且小于波长

尺度时, 将其诱发的局域流动称为介观流. 介观流机制被认为是地震频段弹性波频散和衰减的主要原因, 多重孔隙介质模型随之得到了关注和发展. Berryman 和 Wang<sup>[4]</sup> 与 Huang 等<sup>[5]</sup> 分别将 Biot 模型扩展至双重/三重孔隙介质模型, 相应的会存在两种/三种慢纵波, 然而他们的模型依然没有考虑岩石非均质性诱发的介观流机制. Pride 等<sup>[6]</sup> 基于热力学和分支函数法描述了双重孔隙介质中的介观流机制, 并推导了双重孔隙介质波动方程. 2017 年, Zheng 等<sup>[7]</sup> 重新推导了该双重孔隙波动方程的位移形式, 新形式可以分析慢纵波的传播特征. Ba 等<sup>[8]</sup> 从哈密顿原理出发, 采用 Rayleigh 流体胀缩运动方程来表征介观流机制, 构建了 Biot-

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12174421, 42074174, 52227901) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hex@mail.ioa.ac.cn

Rayleigh 模型. 这种描述介观流的方法具有形式简洁、参数较少等优点, Biot-Rayleigh 模型得到了不断的完善和发展<sup>[9-12]</sup>.

应用数值方法求解双重孔隙波动方程进行波场模拟不仅有利于直观观察弹性波的传播转换和能量分布特征, 而且是后期反演成像的基础. 针对双重孔隙介质的波场模拟已经开展了相关工作. 基于 Pride 等<sup>[6]</sup>提出的双重孔隙模型, Ba 等<sup>[13]</sup>通过离散傅里叶变换求解介观流机制诱发的流体应变增量, 利用伪谱法和时间分裂法进行了波场模拟. Liu 等<sup>[14,15]</sup>利用黏弹性模型来表征地震波的宽频段频散和衰减特征, 但这种方法不能体现频散和衰减现象背后的波致流机制, 无法反映慢纵波的传播特征和影响. 基于 Ba 等<sup>[8]</sup>提出的 Biot-Rayleigh 模型, Wang 等<sup>[16]</sup>基于 Zener 模型<sup>[17]</sup>近似表征介观流机制, 利用伪谱法和时间分裂法进行模拟和分析了波场传播特征. Jiang 等<sup>[18]</sup>提出一种半解析法模拟了水平分层双重孔隙介质的地震波场.

与伪谱法和半解析法相比, 有限差分法在模拟具有明显阻抗差异界面的非均匀介质波场中有更广的适用性, 已广泛应用于弹性波场数值模拟<sup>[19-23]</sup>. 本文基于 Santos-Rayleigh 部分饱和和双重孔隙介质模型, 利用时域交错网格有限差分法模拟分析了弹性波的传播特征. 具体思路包括两部分, 一是采用 Zener 模型来表征介观流机制导致的频散和衰减, 二是利用时间分裂法解决波动方程的刚性问题, 以提高计算效率. 最后, 在利用解析解验证了有限差分算法正确性的基础上, 利用几个数值算例分析弹性波在部分饱和和双重孔隙介质中的传播和转换特征.

## 2 部分饱和和双重孔隙介质模型

### 2.1 Santos-Rayleigh 模型

在之前的工作中, 我们针对一种固体和两相流体组成的部分饱和孔隙介质, 利用 Rayleigh 气泡振荡模型表征介观流机制, 将其引入到 Santos 模型中, 推导了部分饱和和双重孔隙介质的波动方程. 波动方程的变量包括: 固体相的位移  $\mathbf{u}$ 、应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$  和应力  $\tau_{ij}$ , 两相流体的位移  $\mathbf{U}^{(k)}$ 、应变  $\boldsymbol{\eta}_k$  和应力  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2$ ), 以及表征介观流过程的流体应变增量  $\zeta$ . 各变量满足以下关系.

应变-位移关系:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_{ii} = \partial_i u_i, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \\ \boldsymbol{\eta}_k &= \partial_i U_i^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (1)$$

本构方程:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + [A\varepsilon + Q_1(\eta_1 + \phi_2\zeta) \\ &\quad + Q_2(\eta_2 - \phi_1\zeta)]\delta_{ij}, \\ \sigma_1 &= Q_1\varepsilon + R_1(\eta_1 + \phi_2\zeta) + R_3(\eta_2 - \phi_1\zeta), \\ \sigma_2 &= Q_2\varepsilon + R_2(\eta_2 - \phi_1\zeta) + R_3(\eta_1 + \phi_2\zeta).\end{aligned}\quad (2)$$

运动方程:

$$\begin{aligned}\rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i^{(1)} + \rho_{13}\ddot{U}_i^{(2)} + (m_1 - m_{12}) [\dot{u}_i - \dot{U}_i^{(1)}] \\ + (m_2 - m_{12}) [\dot{u}_i - \dot{U}_i^{(2)}] &= \partial_j \tau_{ij}, \\ \rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i^{(1)} + \rho_{23}\ddot{U}_i^{(2)} - m_1 [\dot{u}_i - \dot{U}_i^{(1)}] \\ + m_{12} [\dot{u}_i - \dot{U}_i^{(2)}] &= \partial_i \sigma_1, \\ \rho_{13}\ddot{u}_i + \rho_{23}\ddot{U}_i^{(1)} + \rho_{33}\ddot{U}_i^{(2)} + m_{12} [\dot{u}_i - \dot{U}_i^{(1)}] \\ - m_2 [\dot{u}_i - \dot{U}_i^{(2)}] &= \partial_i \sigma_2.\end{aligned}\quad (3)$$

介观流方程:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}R_0^2\phi_1^2\phi_2\phi_{20} \left( \frac{\rho_f^{(1)}}{\phi_{10}}\ddot{\zeta} - \frac{\eta_f^{(1)}}{\kappa_1}\dot{\zeta} \right) \\ = (\phi_2Q_1 - \phi_1Q_2)\varepsilon + [(\phi_2R_1 - \phi_1R_3)\eta_1 + (\phi_2R_3 \\ - \phi_1R_2)\eta_2] + (\phi_2^2R_1 + \phi_1^2R_2 - 2\phi_1\phi_2R_3)\zeta,\end{aligned}\quad (4)$$

式中,  $\mu$  为骨架剪切模量,  $R_0$  为嵌入体半径,  $\phi_1, \phi_2$  为两类孔隙的绝对孔隙度,  $\phi_{10}, \phi_{20}$  为两类孔隙区域内部的局部孔隙度,  $\kappa_1$  为背景相渗透率,  $\rho_f^{(1)}$ ,  $\eta_f^{(1)}$  为背景相流体的密度和黏度,  $A, Q_1, Q_2, R_1, R_2, R_3$  为弹性系数,  $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{22}, \rho_{23}, \rho_{33}$  为密度系数,  $m_1, m_2, m_{12}$  为耗散系数, 参数的含义及表达式见文献<sup>[11]</sup>.

### 2.2 速度-应力方程

假设波在  $x$ - $z$  二维平面上传播, 应变变化率和速度的关系为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{zz} = \partial_x v_x + \partial_z v_z, \\ 2\dot{\varepsilon}_{xz} &= \partial_x v_z + \partial_z v_x, \\ \dot{\eta}_1 &= \partial_x V_x^{(1)} + \partial_z V_z^{(1)}, \\ \dot{\eta}_2 &= \partial_x V_x^{(2)} + \partial_z V_z^{(2)}.\end{aligned}\quad (5)$$

应力变化率与应变变化率的关系:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau}_{xx} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{xx} + A\dot{\varepsilon} + Q_1(\dot{\eta}_1 + \phi_2\dot{\zeta}) \\
 &\quad + Q_2(\dot{\eta}_2 - \phi_1\dot{\zeta}), \\
 \dot{\tau}_{zz} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{zz} + A\dot{\varepsilon} + Q_1(\dot{\eta}_1 + \phi_2\dot{\zeta}) \\
 &\quad + Q_2(\dot{\eta}_2 - \phi_1\dot{\zeta}), \\
 \dot{\sigma}_1 &= Q_1\dot{\varepsilon} + R_1(\dot{\eta}_1 + \phi_2\dot{\zeta}) + R_3(\dot{\eta}_2 - \phi_1\dot{\zeta}), \\
 \dot{\sigma}_2 &= Q_2\dot{\varepsilon} + R_2(\dot{\eta}_2 - \phi_1\dot{\zeta}) + R_3(\dot{\eta}_1 + \phi_2\dot{\zeta}), \\
 \dot{\tau}_{xz} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{xz}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

运动方程可改写为以下形式:

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{V}_i^{(1)} \\ \dot{V}_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \tau_{ix} + \partial_z \tau_{iz} \\ \partial_i \sigma_1 \\ \partial_i \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m_{12} - m_1 - m_2 & m_{12} - m_1 & m_{12} - m_2 \\ m_{12} - m_1 & -m_1 & m_{12} \\ m_{12} - m_2 & m_{12} & -m_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_i \\ V_i^{(1)} \\ V_i^{(2)} \end{pmatrix}^T. \tag{7}$$

### 3 介观流机制的黏弹性表征

#### 3.1 Zener 模型表征介观流机制

双重孔隙模型的速度应力方程涉及参数  $\zeta$  的一阶时间导数, 通过介观流方程 (4) 可以看出, 该参数与组分的体应变相关, 若将其表示为体应变的时间导数需要写出其三阶差分形式, 增加了方程的复杂性. 因此本文采用形式简单且便于理解的 Zener 模型来表征介观流, 具体步骤如下.

首先, 不考虑介观流机制时, Santos-Rayleigh 模型退化为 Santos 模型. 此时 (6) 式可写为

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau}_{xx} &= P\dot{\varepsilon} - 2\mu\dot{\varepsilon}_{zz} + Q_1\dot{\eta}_1 + Q_2\dot{\eta}_2, \\
 \dot{\tau}_{zz} &= P\dot{\varepsilon} - 2\mu\dot{\varepsilon}_{xx} + Q_1\dot{\eta}_1 + Q_2\dot{\eta}_2, \\
 \dot{\sigma}_1 &= Q_1\dot{\varepsilon} + R_1\dot{\eta}_1 + R_3\dot{\eta}_2, \\
 \dot{\sigma}_2 &= Q_2\dot{\varepsilon} + R_2\dot{\eta}_2 + R_3\dot{\eta}_1, \\
 \dot{\tau}_{xz} &= 2\mu\dot{\varepsilon}_{xz}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

式中, 纵波模量  $P = A + 2\mu$ .

其次, 由于双重孔隙模型仅考虑了介观流对纵

波频散和衰减特征的影响, 因此利用 Zener 模型将 (8) 式中的纵波模量  $P$  扩展至黏弹性形式, 即可表征介观流导致的频散和衰减特征, 即

$$P \rightarrow P_\infty \frac{\tau_\varepsilon^{-1} + i\omega}{\tau_\sigma^{-1} + i\omega}, \tag{9}$$

式中,  $P_\infty$  表示非松弛纵波模量,  $\omega$  表示角频率,  $i$  表示虚数单位,  $\tau_\sigma$  和  $\tau_\varepsilon$  表示松弛时间, 表达式为

$$\begin{aligned}
 \tau_\sigma &= \frac{\tau_0}{Q_0} \left( \sqrt{1 + Q_0^2} - 1 \right), \\
 \tau_\varepsilon &= \tau_\sigma + 2\tau_0/Q_0, \tag{10}
 \end{aligned}$$

其中,  $\tau_0 = 1/(2\pi f_0)$ ,  $f_0$  为介观流机制的峰值频率,  $Q_0$  为  $f_0$  处对应的品质因子最小值. 在低频极限处, 有  $P \rightarrow P_0 = P_\infty \tau_\sigma / \tau_\varepsilon$ .

在时间域, (8) 式的前两个方程可写为

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau}_{xx} &= \dot{P} * \dot{\varepsilon} - 2\mu\dot{\varepsilon}_{zz} + Q_1\dot{\eta}_1 + Q_2\dot{\eta}_2, \\
 \dot{\tau}_{zz} &= \dot{P} * \dot{\varepsilon} - 2\mu\dot{\varepsilon}_{xx} + Q_1\dot{\eta}_1 + Q_2\dot{\eta}_2, \tag{11}
 \end{aligned}$$

式中,  $*$  表示卷积,  $P$  为弛豫函数:

$$P(t) = P_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} \right) \exp(-t/\tau_\sigma) \right] H(t), \tag{12}$$

式中,  $H(t)$  为 Heaviside 阶跃函数.

引入记忆变量  $e$  以便于卷积运算的数值实现, 则有  $\dot{P} * \dot{\varepsilon} = P_\infty \dot{\varepsilon} + e$ , 最终, (8) 式前两个方程表示为

$$\begin{aligned}
 \dot{\tau}_{xx} &= P_\infty \dot{\varepsilon} + e - 2\mu\dot{\varepsilon}_{zz} + Q_1\dot{\eta}_1 + Q_2\dot{\eta}_2, \\
 \dot{\tau}_{zz} &= P_\infty \dot{\varepsilon} + e - 2\mu\dot{\varepsilon}_{xx} + Q_1\dot{\eta}_1 + Q_2\dot{\eta}_2, \\
 \dot{e} &= P_\infty \left( \frac{1}{\tau_\varepsilon} - \frac{1}{\tau_\sigma} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_\sigma} e. \tag{13}
 \end{aligned}$$

#### 3.2 合理性和局限性分析

本节将部分饱和和双重孔隙模型的理论结果和黏弹性表征结果进行对比, 来分析黏弹性模型以表征介观流机制的合理性和局限性, 计算采用表 1<sup>[24]</sup> 的层 1 参数.

部分饱和和双重孔隙模型和黏弹性 Santos 模型所预测的快纵波频散和衰减结果如图 1 所示, 嵌入体半径取值为  $R_0 = 0.3$  m, Zener 模型采用的参数为  $Q_m = 58.3$ ,  $f_m = 5.59$  Hz. 从图 1 可以看出, 黏弹性 Santos 模型和双重孔隙模型吻合较好, 表明通过合理选取峰值频率和品质因子两个参数时, 采用 Zener 模型可用于近似表征介观流机制对快纵波频散和衰减的影响.

表 1 部分饱和和双重孔隙介质物性参数表  
Table 1. Physical parameters of partially saturated double-porosity media.

符号	参数	层1	层2
$K_s$	基质体积模量/GPa	36	40
$\rho_s$	基质密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	2650	2800
$K_m$	骨架体积模量/GPa	6.21	9.5
$\mu_m$	骨架剪切模量/GPa	4.55	6.2
$\phi$	孔隙度	0.33	0.2
$\kappa$	渗透率/ $\text{m}^2$	$4.93 \times 10^{-12}$	$2.96 \times 10^{-12}$
$K_f^{(1)}$	润湿相流体体积模量/GPa		2.223
$\rho_f^{(1)}$	润湿相流体密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )		1000
$\eta_f^{(1)}$	润湿相流体黏度/(Pa·s)		0.001
$K_f^{(2)}$	非润湿相流体体积模量/GPa		0.022
$\rho_f^{(2)}$	非润湿相流体密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )		100
$\eta_f^{(2)}$	非润湿相流体黏度/(Pa·s)		$1.5 \times 10^{-5}$

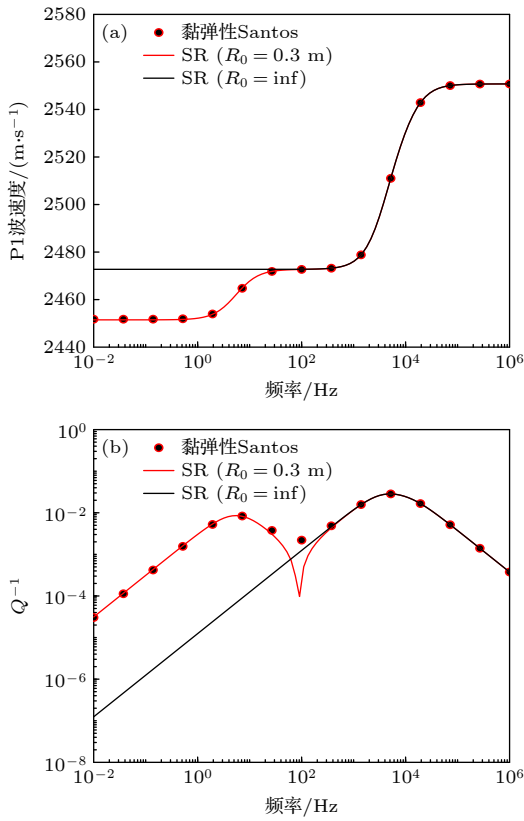


图 1 Santos-Rayleigh 模型和黏弹性 Santos 模型预测的快纵波频散 (a) 和衰减 (b)

Fig. 1. Comparison of P1 wave velocities (a) and attenuations (b) as the function of frequencies predicted by Santos-Rayleigh and viscoelastic Santos models.

图 2 显示了部分饱和和双重孔隙模型和黏弹性 Santos 模型所预测的两种慢纵波频散和衰减结果. 两种模型预测的 P2 波频散和衰减、P3 波的速度频散特征吻合较好, 但无法合理表征 P3 波在地震

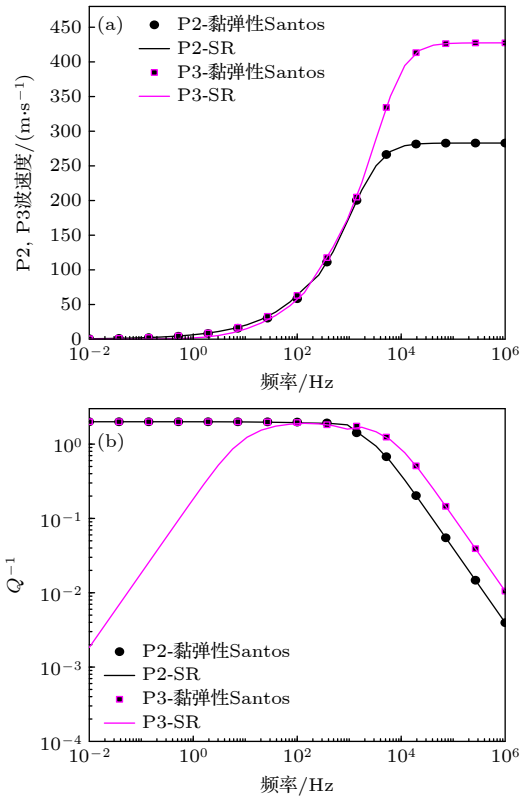


图 2 Santos-Rayleigh 模型和黏弹性 Santos 模型预测的慢纵波频散 (a) 和衰减 (b)

Fig. 2. Comparison of P2 and P3 wave velocities (a) and attenuations (b) as the function of frequencies predicted by Santos-Rayleigh and viscoelastic Santos models.

频段的衰减特征. 双重孔隙模型预测介观流的存在会使得 P3 波在地震频段会出现低衰减现象, 而 Zener 模型却无法对该现象进行表征, 这说明 P3 波的物理传播机制和黏弹性模型不同 [25].

## 4 时间分裂的交错网格有限差分法

### 4.1 时间分裂法解决刚性问题

(7) 式中耗散项的存在表明孔隙弹性波动方程存在刚性问题, 而通过减小时间步长解决刚性问题会严重降低计算效率, 因此本文将通过时间分裂法来解决这一问题<sup>[26]</sup>. 令  $\mathbf{V} = [v_i, V_i^{(1)}, V_i^{(2)}]^T$ , (7) 式的刚性部分可以表示为矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{S}\mathbf{V}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2m_{12} - m_1 - m_2 & m_{12} - m_1 & m_{12} - m_2 \\ m_{12} - m_1 & -m_1 & m_{12} \\ m_{12} - m_2 & m_{12} & -m_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m_{12} - m_1 - m_2 & m_{12} - m_1 & m_{12} - m_2 \\ m_{12} - m_1 & -m_1 & m_{12} \\ m_{12} - m_2 & m_{12} & -m_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

在二维  $x$ - $z$  平面内, 刚性方程的解析解为

$$\mathbf{V}(\Delta t) = \exp(\mathbf{S}\Delta t) \mathbf{V}(t-1), \quad (16)$$

$$\exp(\mathbf{S}\Delta t) = \mathbf{I}_3 - \frac{1 - e^{\lambda_1 \Delta t}}{\lambda_1} \mathbf{S} + \frac{(1 - e^{\lambda_2 \Delta t}) \lambda_1 - (1 - e^{\lambda_1 \Delta t}) \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S} - \lambda_1 \mathbf{I}_3),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{S}) - \sqrt{[\text{tr}(\mathbf{S})]^2 - 4E}], \quad \lambda_2 = \text{tr}(\mathbf{S}) - \lambda_1,$$

$$E = \mathbf{S}_{13} \mathbf{S}_{21} - \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{23} - \mathbf{S}_{13} \mathbf{S}_{31} + \mathbf{S}_{23} \mathbf{S}_{31} + \mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{33} - \mathbf{S}_{21} \mathbf{S}_{33}. \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{I}_3$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2$  为矩阵  $\mathbf{S}$  的特征值,  $\text{tr}(\mathbf{S})$  表示矩阵的迹. 将刚性方程的解  $\mathbf{V}' = (v'_x, v'_z, V_x^{(1)'}, V_z^{(1)'}, V_x^{(2)'}, V_z^{(2)'})$  作为速度初始量输入到方程的非刚性部分, 可有效解决方程的刚性问题.

### 4.2 交错网格有限差分格式

二维情况下非刚性部分的交错网格有限差分形式为 (以固体骨架的水平质点振动速度和正应力为例):

$$v_{x(i,j+1/2)}^{(n+1)} = v'_{x(i,j+1/2)} + \Delta t \gamma_{11} \left( D_x \tau_{xx}^{(n+1/2)} + D_z \tau_{xz}^{(n+1/2)} \right) + \Delta t \left( \gamma_{12} D_x \sigma_1^{(n+1/2)} + \gamma_{13} D_x \sigma_2^{(n+1/2)} \right),$$

$$\tau_{xx}^{(n+1/2)}(i+1/2, j+1/2) = \tau_{xx}^{(n-1/2)}(i+1/2, j+1/2) + \Delta t \left[ P_\infty \left( D_x v_x^{(n)}(i+1/2, j+1/2) + D_z v_z^{(n)}(i+1/2, j+1/2) \right) - 2\mu D_z v_z^{(n)}(i+1/2, j+1/2) \right]$$

$$+ \Delta t \sum_{i=1}^2 Q_i \left( D_x V_x^{(k)(n)}(i+1/2, j+1/2) + D_z V_z^{(k)(n)}(i+1/2, j+1/2) \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( r_{xx}^{(n+1)}(i+1/2, j+1/2) + r_{xx}^{(n)}(i+1/2, j+1/2) \right),$$

$$\begin{aligned} r_{xx}^{(n+1/2)}(i+1/2, j+1/2) &= \left( 1 + \frac{\Delta t}{2\tau_\sigma} \right)^{-1} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta t}{2\tau_\sigma} \right) r_{xx}^{(n-1/2)}(i+1/2, j+1/2) + \Delta t P_\infty \left( \frac{1}{\tau_\varepsilon} - \frac{1}{\tau_\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( D_x v_x^{(n)}(i+1/2, j+1/2) + D_z v_z^{(n)}(i+1/2, j+1/2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

式中, 上下角标分别表示时间指数和空间位置指数,  $D_x$  和  $D_z$  分别表示  $x$  方向和  $z$  方向上的空间差分算子,  $\Delta t$  为时间步长. 各场量在交错网格有限差分算法中的位置分布如图 3 所示, 图中  $i$  和  $j$  分别表示  $x$  方向和  $z$  方向的空间网格点指数,  $dx$  和  $dz$  分别表示  $x$  方向和  $z$  方向的空间步长.

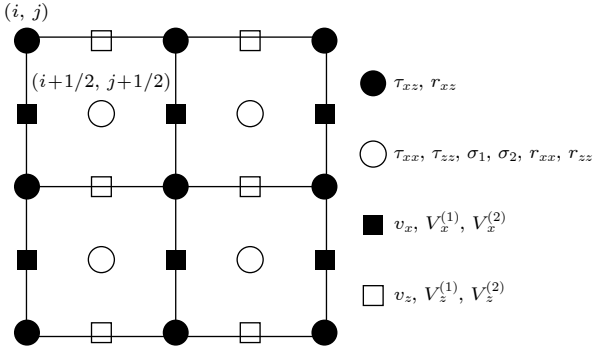


图3 各场分量在交错网格的相对位置

Fig. 3. Relative position of field components on the staggered grids.

### 4.3 边界处理

利用有限差分模拟弹性波场时, 需要对人工和自然边界加以处理, 其中人工边界会导致虚假反射并对波场特征的干扰, 通过设置完全匹配层可以有效解决这一问题. 本文采用非分裂卷积完全匹配层<sup>[27]</sup>, 只需要将每个空间微分替换为

$$\partial \tilde{x}_i = \frac{1}{\kappa_{x_i}} \partial x + \psi_{x_i}, \quad (19)$$

$$\psi_{x_i}^n = b_{x_i} \psi_{x_i}^{n-1} + a_{x_i} (\partial x)^{n+1/2},$$

$$b_{x_i} = \exp \left[ - \left( \frac{d_{x_i}}{\kappa_{x_i}} + \alpha_{x_i} \right) \Delta t \right],$$

$$a_{x_i} = \frac{d_{x_i}}{\kappa_{x_i} (d_{x_i} + \kappa_{x_i} \alpha_{x_i})} (b_{x_i} - 1). \quad (20)$$

PML 区域方程可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \gamma_{11} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \psi_{\tau_{xx},x} + \psi_{\tau_{xz},z} \right) \\ &+ \gamma_{12} \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \psi_{\sigma_1,x} \right) + \gamma_{13} \left( \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \psi_{\sigma_2,x} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= P_\infty \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \psi_{v_x,x} + \psi_{v_z,z} \right) \\ &+ e - 2\mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \psi_{v_z,z} \right) \\ &+ Q_1 \left( \frac{\partial V_x^{(1)}}{\partial x} + \psi_{V_x^{(1)},x} + \frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial z} + \psi_{V_z^{(1)},z} \right) \\ &+ Q_2 \left( \frac{\partial V_x^{(2)}}{\partial x} + \psi_{V_x^{(2)},x} + \frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial z} + \psi_{V_z^{(2)},z} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

非均匀介质中层间的自然边界处应满足连续性条件. Guan 等<sup>[21]</sup>证明通过取剪切模量的调和平均值和密度参数的算数平均值, 可以将分层界面上

的离散方程表示为均匀介质中的离散方程, 即

$$\begin{aligned} \mu_{(i,j)} &= 4 / (\mu_{(i-1/2,j-1/2)}^{-1} + \mu_{(i+1/2,j-1/2)}^{-1} \\ &+ \mu_{(i-1/2,j+1/2)}^{-1} + \mu_{(i+1/2,j+1/2)}^{-1}), \\ f_{(i,j)} &= \frac{1}{2} (f_{(i,j)} + f_{(i+1,j)}), \quad f = \rho_{ij}. \quad (22) \end{aligned}$$

## 5 数值算例与分析

### 5.1 算法验证

本文通过扩展 Santos 模型的纵波模量来模拟双重孔隙介质的弹性波场, 因此可以利用 Santos 模型解析解来验证有限差分算法的正确性. 本文推导了 Santos 三相介质模型中胀缩点源/线源激发声场的解析解 (见补充材料). 模型参数设置如下, 网格数  $X_{\text{num}} = Z_{\text{num}} = 600$ , 空间步长  $\Delta x = \Delta z = 1.5 \text{ m}$ , 时间步长  $\Delta t = 0.2 \text{ ms}$ . 震源为主频 20 Hz 的雷克子波, 震源能量按照各组份体积含量分配加载在正应力上, 声源位于 (450, 450) m 处. 介质物性参数在表 1 列出, 其中两相流体黏度  $\eta_f^{(1)} = \eta_f^{(2)} = 0$ . 虽然这一理想条件不真实存在, 但可用于测试代码的正确性.

图 4 显示了  $S_2 = 0.9$  时采用两种方法计算的 (405, 405) m 处接收波形, 数值解与解析解吻合较好, 平均误差为 0.33%, 证明了算法的正确性. 从图 4 可以看出, P1 波主要集中在固体相中传播, 在流体相中幅度较小; 对于 P2 波而言, 固相与两种流体相的质点运动反向, 两种流体的质点运动同相, 与传统 Biot 慢纵波类似; 对于 P3 波而言, 两种流体质点运动反相, 是部分饱和孔隙介质中特有的一种波. 此外, 由于声源为胀缩源, 在这种情况下没有横波存在.

### 5.2 均匀介质中弹性波传播特征分析

为直观观察和分析介观流机制作用的频带范围及其对弹性波传播特征的影响, 此处设计一个均匀介质, 利用上述算法模拟地震和超声频率两种情况下有无介观流机制的波场快照和波形曲线. 此处同样以雷克子波作为震源, 震源能量按照各组份的体积含量分配加载在垂向速度上.

首先分析地震频率下介观流机制对波场快照和波形曲线的影响, 模型参数与 5.1 节中参数相同. 图 5(a), (b) 分别为两种情况下固体相垂直速度分

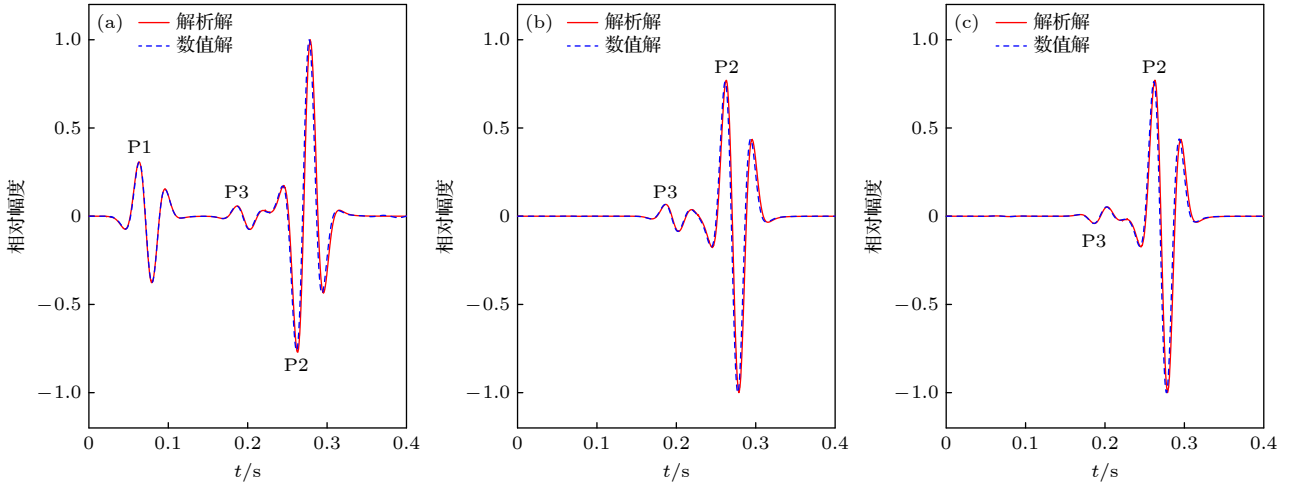


图 4  $S_2 = 0.9, \eta_f^{(1)} = \eta_f^{(2)} = 0$  时数值解与解析解比较 (a) 固相; (b) 非润湿相; (c) 润湿相

Fig. 4. Comparison of analytical and numerical solutions when  $S_2 = 0.9, \eta_f^{(1)} = \eta_f^{(2)} = 0$ : (a) Solid phase; (b) non-wetting phase; (c) wetting-phase.

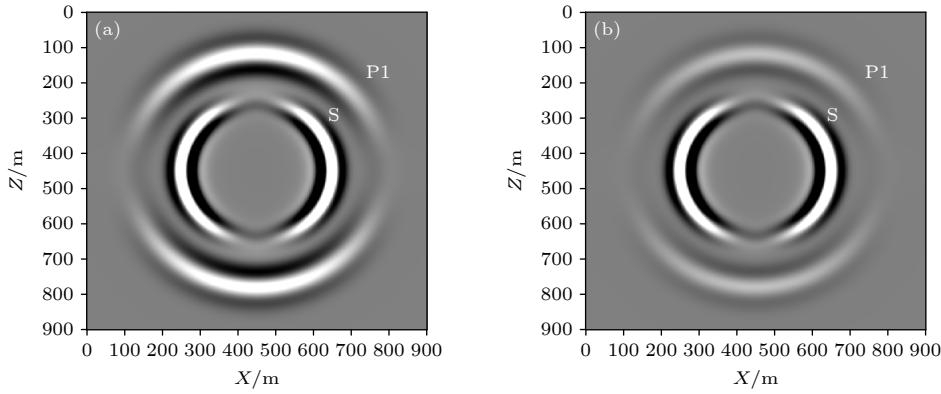


图 5  $f_p = 20$  Hz, 0.18 s 固相垂直速度分量的波场快照 (a) 无介观流影响; (b) 有介观流影响

Fig. 5. Snapshots of the vertical components of solid particle velocities at 0.18 s with  $f_p = 20$  Hz: (a) Without mesoscopic attenuation; (b) with mesoscopic attenuation.

量的波场快照. 从图中可以清晰观察到快纵波 (P1) 和横波 (S), 而无法观察到两种慢纵波, 这是由于在地震频段黏性效应占据主导作用, 慢纵波为扩散模式波. 对比波场快照发现, 考虑了介观流机制的快纵波明显衰减, 而横波没有变化. 这一特征在图 6 的波形曲线中则更为直观, 介观流存在时快纵波得振幅显著降低, 而到时却无明显延迟, 这与图 1 中介观流对快纵波的影响效果是一致的. 随着接收器和声源之间的距离逐渐增加, 快纵波延时现象将更加明显.

接下来考虑超声频率下的弹性波传播特征. 声源频率为 30 kHz, 网格数  $X_{\text{num}} = Z_{\text{num}} = 700$ , 空间步长  $\Delta x = \Delta z = 1$  mm, 时间步长  $\Delta t = 0.2 \mu\text{s}$ . 图 7 和图 8 分别表示固相垂直速度分量的波场快照和波形曲线, 可以看出, 考虑介观流机制与否对

波场快照和波形曲线没有明显影响, 说明在超声频率下介观流机制不发挥作用. 与此同时, 在超声频

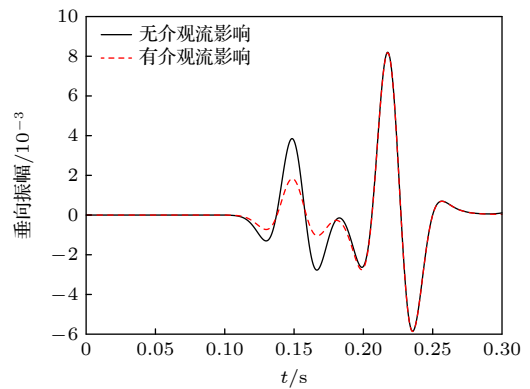


图 6  $f_p = 20$  Hz, (270, 270) m 处有无介观流两种情况下固相接收的波形对比

Fig. 6. Comparison of seismograms of the solid phase at (270, 270) m with  $f_p = 20$  Hz.

率下惯性效应占据了主导作用, 慢纵波转变为传播模式, 但能量主要分布在流体相中, 因此在图 7 中 P2 波显示较弱, 甚至观察不到 P3 波. 图 9 显示了非润湿流体相垂直速度分量波场快照, 可以观察到两种慢纵波 (P2 和 P3), 与理论预测结果相一致.

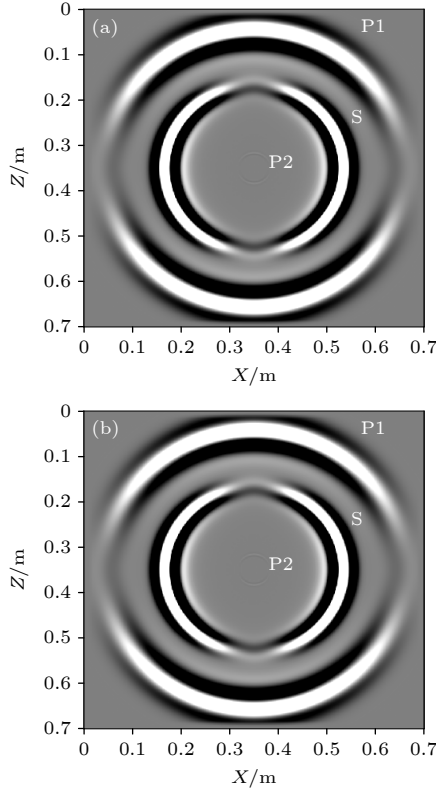


图 7  $f_p = 30$  kHz, 0.15 ms 时刻固相垂直速度分量的波场快照 (a) 无介观流影响; (b) 有介观流影响

Fig. 7. Snapshots of the vertical components of solid particle velocities at 0.15 ms with  $f_p = 30$  kHz: (a) Without mesoscopic attenuation; (b) with mesoscopic attenuation.

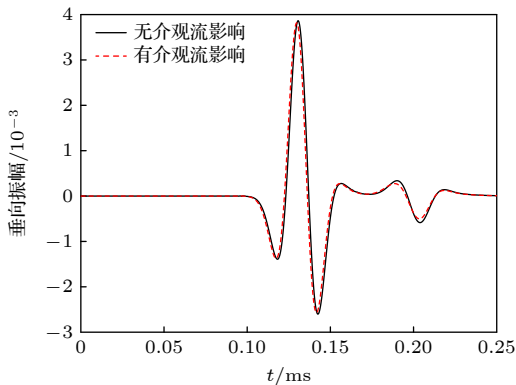


图 8  $f_p = 30$  kHz, (0.1, 0.3) m 处有无介观流两种情况下  $V_z^{(1)}$  的波形对比

Fig. 8. Comparison of seismograms of the  $V_z^{(1)}$  at (0.1, 0.3) m with  $f_p = 30$  kHz.

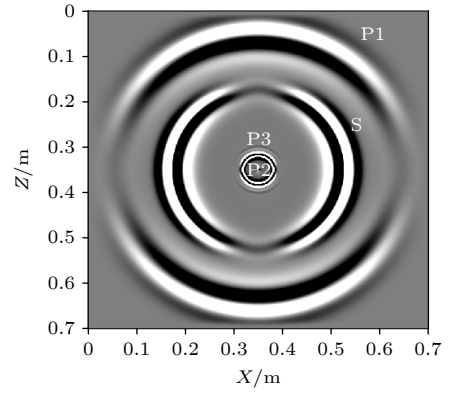


图 9  $f_p = 30$  kHz, 0.15 ms 非润湿相流体的垂向速度分量波场快照

Fig. 9. Snapshots of the vertical components of non-wetting particle velocities at 0.15 ms with  $f_p = 30$  kHz.

### 5.3 双层介质中弹性波传播特征分析

最后设计一个由流体-三相孔隙介质组成的双层介质模型, 上半空间为水层, 下半空间为含有水和气的三相孔隙介质 (参数见表 1 的层 2), 品质因子和特征频率分别为  $Q_m = 64$  和  $f_m = 5.59$  Hz. 图 10 为地震频段固相垂向速度分量的波场快照,

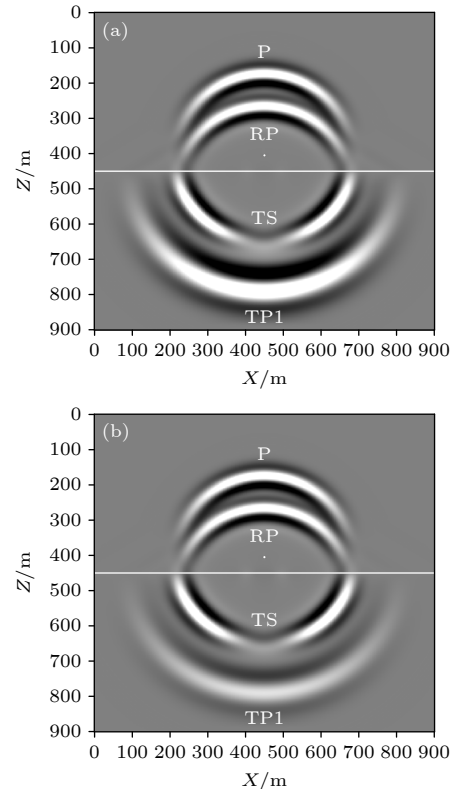


图 10  $f_p = 20$  Hz, 0.2 s 固相垂向速度分量波场快照 (a) 无介观流影响; (b) 有介观流影响

Fig. 10. Snapshots of the vertical components of solid velocities at 0.2 s with  $f_p = 20$  Hz: (a) Without mesoscopic attenuation; (b) with mesoscopic attenuation.

水层中含有直达纵波 (P) 和反射纵波 (RP), 双重孔隙介质中有透射快纵波 (TP1)、P 波转换的透射横波 (TS), 对比图 10(a) 和图 10(b) 发现, 介观流衰减机制存在时, 孔隙介质中的快纵波明显衰减, 而横波没有变化. 此外, 由于低频时黏性效应占主导, 所以并未在界面处观测到 P 波转换而来的慢纵波.

为了更清晰显示界面处慢纵波的转换特征, 将频率设为 30 kHz. 图 11 展示了固相、非润湿相和润湿相流体在 0.15 ms 的波场快照. 与图 10 相比,

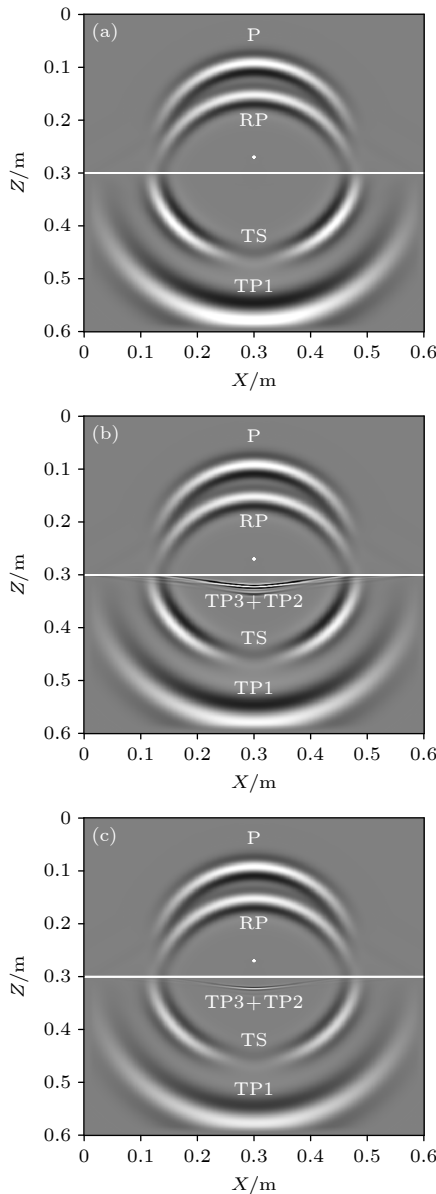


图 11  $f_p = 30$  kHz, 0.15 ms 时, 流体垂向速度分量波场快照 (a) 固相; (b) 非润湿相; (c) 润湿相

Fig. 11. Snapshots of the vertical components of velocities with  $f_p = 30$  kHz, 0.15 ms: (a) Solid phase; (b) non-wetting phase; (c) wetting-phase.

此时还包含转换的透射慢纵波 (TP2 和 TP3), 同时 P2 波和 P3 波的出现会影响各种模式波的能量分配.

## 6 结 论

基于 Santos-Rayleigh 模型, 利用交错网格有限差分算法模拟并分析了部分饱和双重孔隙介质中的弹性波传播特征. 利用 Zener 模型扩展弹性模量的方式来近似表征介观流机制对弹性波传播特征的影响, 结果表明 Zener 模型可以表征介观流对快纵波的影响, 但无法表征慢纵波 P3 在地震频段的低衰减特征, 这是由于慢纵波独特的物理产生机制导致的. 其次, 利用时间分裂法解决了波动方程的刚性问题, 避免选取过小的时间步长, 计算效率得到提高. 本文利用解析解验证了有限差分算法的正确性, 并模拟了均匀介质和分层中弹性波传播的波场快照和波形曲线, 模拟结果直观反映了波的转换特征以及介观流机制对地震频段快纵波的衰减作用, 表明了本文算法的合理性.

## 参考文献

- [1] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 179
- [2] Santos J E, Corberó J M, Douglas J 1990 *J. Acoust. Soc. Am.* **87** 1428
- [3] Liu L, Zhang X, Wang X 2022 *J. Theor. Comp. Acoust.* **30** 2150002
- [4] Berryman J G, Wang H F 2000 *Int. J. Rock Mech. Min.* **37** 63
- [5] Huang J D, Yang D H, He X J, Chang Y F 2023 *Geophysics* **88** T121
- [6] Pride S R, Berryman J G, Harris J M 2004 *J. Geophys. Res.* **109** B01201
- [7] Zheng P, Ding B Y, Sun X T 2017 *Int. J. Rock Mech. Min.* **91** 104
- [8] Ba J, Carcione J M, Nie J X 2011 *J. Geophys. Res.* **116** B06202
- [9] Sun W T, Ba J, Carcione J M 2016 *Geophys. J. Int.* **205** 22
- [10] Ba J, Xu W H, Fu L Y, Carcione J M, Zhang L 2017 *J. Geophys. Res. Solid Earth* **122** 1949
- [11] Shi Z Q, He X, Liu L, Chen D H, Wang X M 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 069101 (in Chinese) [石志奇, 何晓, 刘琳, 陈德华, 王秀明 2023 *物理学报* **72** 069101]
- [12] Shi Z Q, He X, Chen D H, Wang X M 2024 *Geophys. J. Int.* **236** 1172
- [13] Ba J, Nie J X, Cao H, Yang H Z 2008 *Geophys. Res. Lett.* **35** L04303
- [14] Liu X, Greenhalgh S, Zhou B 2009 *Geophys. J. Int.* **178** 375
- [15] Liu X, Greenhalgh S 2019 *Geophysics* **84** WA59
- [16] Wang E, Carcione J M, Ba J 2019 *Geophysics* **84** WA11
- [17] Carcione J M 2015 *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and*

- Electromagnetic Media* (Amsterdam Boston: Elsevier)
- [18] Jiang Y C, Gao Y X, Cheng Q L, Song Y J 2023 *Geophys. J. Int.* **235** 970
- [19] Virieux J 1986 *Geophysics*. **51** 889
- [20] Wenzlau F, Müller T M 2009 *Geophysics* **74** T55
- [21] Guan W, Hu H 2011 *Commun. Comput. Phys.* **10** 695
- [22] Kong L Y, Wang Y B, Yang H Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 139101 (in Chinese) [孔丽云, 王一博, 杨慧珠 2013 物理学报 **62** 139101]
- [23] Liu C, Luo Y Q 2023 *Chin. J. Geophys.* **66** 3840 (in Chinese) [刘财, 罗玉钦 2023 地球物理学报 **66** 3840]
- [24] Zhao H, Wang X 2008 *Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron.* **51** 723
- [25] Deng W B, Fu L Y, Wang Z W, Hou W T, Han T C 2023 *Geophys. J. Int.* **235** 1218
- [26] Carcione J M, Quiroga-Goode G 1995 *J. Comput. Acoust.* **3** 261
- [27] Komatitsch D, Martin R 2007 *Geophysics* **72** SM155

## Simulation and analysis of elastic waves in partially saturated double-porosity media based on finite difference method\*

Shi Zhi-Qi<sup>1)2)3)</sup> He Xiao<sup>1)2)3)†</sup> Liu Lin<sup>1)3)</sup> Chen De-Hua<sup>1)2)3)</sup>

1) (State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

2) (University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

3) (Beijing Engineering Research Center for Offshore Drilling Exploration and Measurement, Beijing 100190, China)

( Received 2 February 2024; revised manuscript received 26 March 2024 )

### Abstract

Double-porosity poroelastic model takes into account the effect of mesoscopic flow induced by rock heterogeneity on dispersion and attenuation of elastic waves, and has obtained good application results in the quantitative explanation of seismic data in heterogeneous reservoirs. Wavefield simulation based on double-porosity model not only helps visualize the propagation characteristics of the elastic waves but also lays the foundation for seismic imaging. In this work, we perform wavefield simulation and analysis based on the Santos-Rayleigh model which incorporates mesoscopic and global flow in a partially-saturated double-porosity medium. Specifically, the mesoscopic flow mechanism is represented with a Zener viscoelastic model. The comparison shows that the Zener model can accurately capture the propagation characteristics of fast P-wave, but fails to describe the attenuation characteristics of slow P3 wave in the low-frequency band. It implies that Zener viscoelastic model and slow wave modes follow different mechanisms. Then the staggered grid finite-difference method is used to simulate wave propagation in a double-porosity medium, and the stiff problem is solved with a time-splitting algorithm, which can significantly improve computational efficiency. Based on the above methods, the correctness of our algorithm is verified with derived analytical solution for a P-wave source in a uniform partially saturated poroelastic medium. Analytical and numerical solutions are in good agreement and mean error is 0.33%. We provide some examples of wavefield snapshots and seismograms in homogeneous and layered heterogeneous media at seismic and ultrasonic frequencies. The simulation results demonstrate the strong attenuation of fast P-wave and no change of S-wave in the seismic band due to mesoscopic flow mechanism, which is consistent with the theoretical prediction of double-porosity model. Moreover, the energy of fast P-wave is concentrated in solid phase while slow waves are stronger in fluid phase. This work contributes to the understanding of broadband elastic wave propagation in a heterogeneous partially saturated porous medium and can be applied to the reservoir imaging with broadband geophysical data.

**Keywords:** double-porosity media, finite difference, dispersion and attenuation

**PACS:** 02.60.Cb, 91.60.Qr, 04.30.Nk

**DOI:** 10.7498/aps.73.20240227

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12174421, 42074174, 52227901).

† Corresponding author. E-mail: [hex@mail.ioa.ac.cn](mailto:hex@mail.ioa.ac.cn)

## 基于有限差分的部分饱和双重孔隙介质弹性波模拟与分析

石志奇 何晓 刘琳 陈德华

### Simulation and analysis of elastic waves in partially saturated double-porosity media based on finite difference method

Shi Zhi-Qi He Xiao Liu Lin Chen De-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 100201 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240227

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240227>

当期内容 View table of contents: <https://wulixb.iphy.ac.cn>

#### 您可能感兴趣的其他文章

##### Articles you may be interested in

非水平海底情况下海底地震波时域有限差分数值模拟

Seabed seismic wave simulation by finite difference time domain scheme in marine environment with complex seafloor topography  
物理学报. 2021, 70(22): 224303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210634>

一种新的基于频域有限差分方法的小周期有机太阳能电池的光电特性

Optical and electrical properties of short-pitch solar cells with finite-difference frequency-domain method  
物理学报. 2018, 67(17): 178102 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180821>

基于时域有限差分法的核壳双金属纳米颗粒光吸收率反转行为

Reversal behavior of optical absorption rate of bimetallic core-shell nanoparticles based on finite-difference time-domain method  
物理学报. 2021, 70(20): 207801 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210602>

含少量气泡流体饱和孔隙介质中的弹性波

Propagation of elastic waves in saturated porous medium containing a small amount of bubbly fluid  
物理学报. 2018, 67(11): 114301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180209>

非规则形状介质内辐射-导热耦合传热的间断有限元求解

Discontinuous finite element solutions for coupled radiation-conduction heat transfer in irregular media  
物理学报. 2020, 69(3): 034401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191185>

孔隙内填充单一固体的固-固孔隙介质中的声波传播

Wave propagation characteristics in porous medium containing a solid in pores  
物理学报. 2022, 71(9): 099101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212012>