

电磁感应透明条件下里德伯原子系统的亚稳动力学*

夏刚 张亚鹏 汤婧雯 李春燕 吴春旺 张杰 周艳丽†

(国防科技大学理学院, 长沙 410073)

(2024年2月2日收到; 2024年3月7日收到修改稿)

开放量子系统是新兴量子科技不可或缺的量子平台,也是量子物理中非常重要的研究领域,其中丰富的动力学现象引起了人们广泛的关注.例如,某些情况下系统在弛豫至稳态之前一般会经历漫长的动力学过程,即亚稳动力学过程.完整描述这种复杂而又缓慢的动力学过程往往非常困难.针对该问题,本文研究了如何在刘维尔的慢变本征模式子空间中,对亚稳动力学过程进行低维度的近似描述,从而简化计算难度.然后,针对电磁感应透明条件下的里德伯原子系统,研究了其亚稳动力学过程的有效描述,并讨论了该有效描述和真实动力学之间的误差.本文的研究为建立开放多体系统动力学过程的有效简化描述提供了一种可行的思路和方法.

关键词: 亚稳动力学, 弛豫, 电磁感应透明, 刘维尔超算子

PACS: 42.50.-p, 03.65.Yz, 42.50.Gy, 42.50.Nn

DOI: 10.7498/aps.73.20240233

1 引言

非平衡动力学过程是物理学中一个古老而又前沿的研究领域,从经典系统到量子系统均有涉及.其中,人们对量子多体问题的研究,大多数集中于平衡态或者稳态性质,且已发展出相当完善而又普适的理论方法,比如平均场近似等解析方法,蒙特卡罗、密度矩阵重整化群和张量网络等数值方法^[1].相比之下,关于量子多体系统的非平衡动力学过程的研究相对较少,还有很大的探索空间.这主要是由于量子多体系统一般存在相互作用,完整描述其动力学过程需要的希尔伯特空间将指数增长,计算难度也将急剧增大,所以其动力学过程的完整描述一直是个难题.

目前,随着量子技术的日新月异,人们对量子

多体系统在非平衡动力学过程中的新奇现象表现出了强烈兴趣.比如,多体系统在受到一定的扰动后通常会经历复杂而缓慢的弛豫过程,之后达到稳定状态.这种现象称为亚稳动力学过程^[2-7],即系统初始弛豫进入长寿命状态,随后在更长的时间内衰减到真正的稳态^[8].这种非常明显的时间分离现象在经典软物质中比较常见,玻璃就是典型的例子^[9].在多体量子系统,如里德伯原子气^[10-12]、自旋系统^[13,14]也有相关研究.显然,在这些亚稳动力学过程中,系统弛豫时间尺度的刻画是一个核心问题^[15-18].另外,从量子信息的实用化角度来看,由于实验是在有限的时间内完成的,系统如果能在实验时间尺度内处于无退相干子空间^[10,19]或无噪声子系统^[20],便足以提供量子信息处理的相关时间要求.

针对亚稳动力学过程,最近有研究提出了量子亚稳态的理论^[2],其物理思想是将系统的动力学过

* 湖南省自然科学基金(批准号: 2023JJ30626, 2022RC1194, 2023JJ10052)和国家自然科学基金(批准号: 12174448, 12004430)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ylzhou@nudt.edu.cn

程投影到由最慢衰减模式组成的亚稳态子空间. 本文将从从系统的刘维尔能谱^[7]角度出发, 通过微扰消除快衰减模式, 从而建立动力学的有效描述, 大大降低计算维度. 首先, 介绍如何刻画动力学过程的时间尺度, 然后讨论如何通过微扰法消除快衰减模式, 进而在慢变的亚稳态子空间建立等效描述. 作为例子, 本文针对电磁感应透明 (EIT) 条件下的里德伯原子系统, 进一步讨论了如何将完整动力学等效为亚稳动力学过程, 并讨论了有效描述的误差.

2 量子开放系统的动力学描述

2.1 刘维尔能谱、弛豫时间

一个开放量子系统, 如果其耗散过程是马尔科夫的, 那么该系统的动力学过程可以由刘维尔主方程来进行刻画:

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}\rho(t), \quad (1)$$

其中 \mathcal{L} 为刘维尔超算子, 其具体形式为^[21,22]

$$\mathcal{L}\rho = -i[H, \rho] + \sum_{\alpha} \left(J_{\alpha}\rho J_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{J_{\alpha}^{\dagger}J_{\alpha}, \rho\} \right), \quad (2)$$

式中, $\rho(t)$ 为系统在 t 时刻的密度算符, 描述了系统的量子状态, H 为系统的哈密顿量, J_{α} 为刻画系统与环境之间相互作用的量子跳跃算符. (1) 式是一个线性方程, 可以通过将刘维尔超算子对角化来获取系统的动力学信息. 方程的解可以写为

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho_{\text{in}} = \sum_{k=0} c_k e^{\lambda_k t} R_k, \quad (3)$$

其中, $c_k = \text{Tr}[L_k \rho_{\text{in}}]$ 为初始态 ρ_{in} 在相应本征模式上的投影, R_k 为刘维尔超算子的右本征矢, λ_k 为相应的本征值, 且满足 $\mathcal{L}R_k = \lambda_k R_k$. 相应地, $\mathcal{L}^{\dagger}L_k = \lambda_k^* L_k$, L_k 称为左矢^[17,23-25], 左右矢可以通过 $\text{Tr}[L_i R_j] = \delta_{ij}$ 来归一化. 在参数一定的条件下, 无论马尔科夫的开放量子系统初态是什么, 系统总是耗散到确定的稳态. 由 $\rho(t)$ 的表达式可知, 系统的稳态对应刘维尔本征值为零的本征态, $\mathcal{L}\rho_{\text{ss}} = 0$, 即 $\rho_{\text{ss}} = R_0$. 由密度算符 $\rho(t)$ 迹的守恒性可知, $\text{Tr}[\rho(t)] = \text{Tr}[\rho_{\text{ss}}] = 1 = \text{Tr}[L_0 R_0]$, 因此 L_0 为单位矩阵 ($L_0 = I$). 另外, 还可以得到 $\text{Tr}[R_{i \geq 1}] = 0$, 这表明除了 R_0 , 其他的右矢都并不是量子态.

一般的耗散系统在动力学过程中往往具有复杂的时间尺度, 而时间尺度的有效刻画对更好地调控复杂动力学具有重要意义. 由 (3) 式可知, 刘维

尔能谱能够在一定程度上体现这些信息. 如果将本征值按照实部从大到小进行排序, $\text{Re}[\lambda_{i>0}] < 0$, 零本征值是刘维尔本征值的最大值. 本征值的实部代表着各个本征模式 (即衰减模式) 的衰减速率, 虚部则代表着在衰减过程中可能存在的振动的本征频率^[15,26]. 如果刘维尔本征值是复数, 那么它们总是以共轭对的形式出现, 即 λ_k 和 λ_k^* 均为刘维尔超算子的本征值. 一种特殊且有趣的情况是当 λ_k 为实数时, 相应的本征矢可以对角化^[17], 这样就可以将其写为这些本征函数的线性叠加, 即

$$R_k \propto R_k^+ - R_k^-, \quad (4)$$

其中,

$$R_k^+ = \sum_n^{p_n \geq 0} p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad R_k^- = \sum_n^{p_n < 0} p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (5)$$

这里 $|\psi_n\rangle$ 为本征模式 R_k 的本征函数, 相应本征值为 p_n . 在这种定义下, R_k^{\pm} 便具有了密度矩阵的性质. 而对于 λ_k 为复数的情况, 可以用 $R_k + R_k^{\dagger}$ 和 $i(R_k - R_k^{\dagger})$ 来代替原来的本征模式^[23,27].

在所有衰减模式中, 耗散最慢的模式 R_1 扮演了非常重要的角色, 因为当初始态在 R_1 上的投影 $c_1 \neq 0$ 时, R_1 的衰减速率 $-\text{Re}(\lambda_1)$ 将决定系统最终弛豫到稳态的时间尺度^[2,28]. 这里, 定义刘维尔能隙 $g = -\text{Re}(\lambda_1)$, 其倒数即为系统的弛豫时间 $\tau \approx 1/g$. 自然, 当系统演化时间足够长时 ($t \gg \tau$), 可以得到

$$\|\rho(t) - \rho_{\text{ss}}\| \propto e^{-gt}, \quad (6)$$

其中, $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}[AA^{\dagger}]}$ 为希尔伯特-施密特距离, 刻画了系统在 t 时刻时离最终稳态的距离.

2.2 亚稳动力学

值得注意的是, 当刘维尔能隙很小且本征谱出现多个慢衰减模式时, 系统在逼近稳态的过程中将持续非常久的时间, 即亚稳态动力学过程^[2]. 针对该动力学过程, Macieszczak 等^[2]提出了一种近似描述方法, 即将系统的动力学过程投影到亚稳态子空间 (即刘维尔超算子的接近零本征值所对应的那几个本征态所张成的空间). 相比刘维尔本征系统的高维度, 该方法能在更低维度空间研究系统的动力学过程, 计算难度大大降低. 下面讨论该描述方法.

假设接近零本征值的慢衰减模式有 m 个, 其他 $k \geq m+1$ 的模式 $\{R_{k \geq m+1}\}$ 均为快衰减模式,

即 $|\operatorname{Re}(\lambda_m)| \ll |\operatorname{Re}(\lambda_{m+1})|$. 这样, (3) 式中所有的衰减模式便可以分为两个子空间:

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho_{\text{in}} = \rho_{\text{ss}} + \sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} R_k + [e^{\mathcal{L}t}]_{\mathcal{I}-\mathcal{P}} \rho_{\text{in}}, \quad (7)$$

式中, \mathcal{P} 为投影算子, 计算公式为 $\mathcal{P}\rho = \rho_{\text{ss}} + \sum_{k=1}^m c_k R_k$, 其作用效果为将态空间投影到由 $\{R_1, \dots, R_m\}$ 所形成的慢弛豫子空间, 也就是亚稳态子空间. $\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$ 为其互补投影算子, 其中 \mathcal{I} 为单位投影算子; 相应的最后一项表示快衰减模式 $\{R_{i>m+1}\}$ 的动力学过程 $[e^{\mathcal{L}t}]_{\mathcal{I}-\mathcal{P}} = [e^{\mathcal{L}t}]_{\mathcal{Q}} = (\mathcal{Q})e^{\mathcal{L}t}(\mathcal{Q})$.

在亚稳态子空间中, 等效描述系统的动力学弛豫过程是有时间范围的. 要确定该时间范围, 显然只需明确 (7) 式最后两项何时作为小量而忽略. 直观地看, 当弛豫时间 $t \gg \tau'' \approx 1/|\operatorname{Re}(\lambda_m + 1)|$ 时, (7) 式中的最后一项 (所有快衰减模式 $\{R_{i>m+1}\}$) 便可忽略, 意味着系统开始进入亚稳态子空间. 而当 $t \gg \tau' \approx 1/|\operatorname{Re}(\lambda_m)|$, (7) 式中的倒数第二项也可忽略, 意味着系统即将结束亚稳态过程进入稳态. 自然地, τ' 和 τ'' 分别定义了亚稳态演化的时间区间范围: $\tau'' \ll t \ll \tau'$.

假设本征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 为实数, 将 (7) 式中第二项进行泰勒展开, 从而得到

$$\rho(t) \approx \rho_{\text{ss}} + \sum_{k=1}^m c_k R_k + \mathcal{O}(\|[\mathcal{L}t]_{\mathcal{P}}\|). \quad (8)$$

(8) 式表明, 在亚稳态子空间中 ($\tau'' \ll t \ll \tau'$), 系统随时间的变化不再是指数衰减, 而是以多项式形式弛豫至该亚稳态:

$$\rho_{\text{MS}} = \rho_{\text{ss}} + \sum_{k=1}^m c_k R_k. \quad (9)$$

更一般的情况是本征值为复数 (以共轭对出现) 的情况: $\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2}^*$. 这时, 系统在亚稳态子空间中的弛豫过程将不再是单调函数, 而是边衰减边振荡. 相应的亚稳态将不再是定值, 而是随时间周期性变化:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{MS}} &= \rho_{\text{ss}} + \sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k t} R_k + c_k^* e^{\lambda_k^* t} R_k^\dagger \\ &= \sum_{k=1}^m |c_k| e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} [e^{i(\omega_k t + \delta_k)} R_k + e^{-i(\omega_k t + \delta_k)} R_k^\dagger] \\ &= \sum_{k=1}^m e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} (c_{k,1}(t) R'_{k,1} + c_{k,2}(t) R'_{k,2}), \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\omega_k = \operatorname{Im}(\lambda_k)$, $\delta_k = \operatorname{Arg}(c_k)$, $c_{k,1}(t) = |c_k| \times \cos(\omega t + \delta_k)$, $c_{k,2}(t) = |c_k| \sin(\omega t + \delta_k)$, 厄米算符 $R'_{k,1} = (R_k + R_k^\dagger)$, $R'_{k,2} = i(R_k - R_k^\dagger)$. 这意味着系统在亚稳态子空间中所逼近的稳态是无损耗的相干状态, 从而形成了一种无消相干子空间.

当系统进一步演化到时间区间 $t \gtrsim \tau'$ 时, 亚稳态子空间中的慢衰减模式也逐渐开始消失, 直到 $t \gg \tau$ 弛豫至最终的稳态 ρ_{ss} . 可见, 当系统在弛豫过程中存在明显的时间尺度区间时, 便可在一定的时间范围内用更低维度的子空间等效描述其动力学过程.

上述讨论从量子态的展开基矢角度出发, 直观地描述了亚稳动力学的物理意义. 但是, 这种方法仍然需要对全空间刘维尔超算子进行对角化, 比较适用于数值模拟. 类比于封闭系统中通过绝热消除快速振荡项而得到一个有效哈密顿量的方法, 下面讨论如何利用微扰法消除快衰减项, 从而获取低维度的有效动力学描述. 该方法在某些情况下甚至可以给出有效刘维尔超算子的解析表示形式.

考虑系统的刘维尔超算子 (不含时) 可以分为两项 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$. 假设快速衰减模式由 \mathcal{L}_0 给出, \mathcal{L}_1 为小量 (相对 \mathcal{L}_0). 本文的目的是给出系统在较长弛豫时间 (大于 \mathcal{L}_0 所给出的时间尺度) 之后的有效动力学描述, 为此引入投影算子 [29,30]:

$$\mathcal{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{\mathcal{L}_0 t} / T dt, \quad (11)$$

其作用效果是将系统演化的动力学空间投影到慢变子空间中 $\mu = \mathcal{P}\rho$, 即 $\mathcal{P}\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0\mathcal{P} = 0$, 相对应地, $\xi = \mathcal{Q}\rho$ 为其互补子空间. 将投影算子作用到 (1) 式上, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mu + \mathcal{P}\mathcal{L}_1\xi, \\ \dot{\xi} &= \mathcal{Q}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)\xi + \mathcal{Q}\mathcal{L}_1\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

直接求解上述微分方程有一定困难, 可利用拉普拉斯变换 $\mathbb{L}[\mu(t)] \equiv \hat{\mu}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mu(t) dt$ 得到如下代数方程:

$$\begin{aligned} s\hat{\mu}(s) - \mu(0) &= \mathcal{P}\mathcal{L}_1\hat{\mu}(s) + \mathcal{P}\mathcal{L}_1\hat{\xi}(s), \\ s\hat{\xi}(s) - \xi(0) &= \mathcal{Q}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)\hat{\xi}(s) + \mathcal{Q}\mathcal{L}_1\hat{\mu}(s). \end{aligned} \quad (13)$$

进一步假设系统的初始状态在 \mathcal{L}_0 所包含的内核空间中, 即 $\xi(0) = 0$, 可得

$$\hat{\xi}(s) = \frac{1}{s - \mathcal{Q}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)} \mathcal{Q}\mathcal{L}_1 \hat{\mu}(s), \quad (14)$$

以及

$$s\hat{\mu}(s) - \mu(0) = \mathcal{P}\mathcal{L}_1 \hat{\mu}(s) + \mathcal{P}\mathcal{L}_1 \frac{1}{s - \mathcal{Q}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)} \mathcal{Q}\mathcal{L}_1 \hat{\mu}(s). \quad (15)$$

对 (15) 式进行拉普拉斯逆变换, 并利用拉普拉斯变换的相关性质:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[\dot{\mu}] &= s\hat{\mu}(s) - \mu(t=0), \\ \mathbb{L}[f(t) * g(t)] &= \hat{f}(s)\hat{g}(s), \\ \mathbb{L}^{-1}[f(s)g(s)] &= f(t) * g(t), \end{aligned}$$

便可得到 $\mu(t)$ 的动力学微分方程:

$$\dot{\mu} = \mathcal{P}\mathcal{L}_1 \mu(t) + \mathcal{P}\mathcal{L}_1 \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - \mathcal{Q}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)} \right] * \mathcal{Q}\mathcal{L}_1 \mu(t). \quad (16)$$

假设 \mathcal{L}_1 所对应的能量远小于其他能量尺度 (即 \mathcal{L}_1 所对应的动力学过程为慢变过程), 对 (16) 式中的分数项做 \mathcal{L}_1 的级数展开:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s - \mathcal{Q}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)} \\ &= \frac{1}{s - \mathcal{Q}\mathcal{L}_0} \frac{1}{\mathbb{I} - (s - \mathcal{Q}\mathcal{L}_0)^{-1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_1} \\ &= \frac{1}{s - \mathcal{Q}\mathcal{L}_0} \sum_{j=0}^{\infty} [(s - \mathcal{Q}\mathcal{L}_0)^{-1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_1]^j \\ &= \frac{1}{s - \mathcal{L}_0} \sum_{j=0}^{\infty} [(s - \mathcal{L}_0)^{-1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_1]^j. \quad (17) \end{aligned}$$

上面推导过程利用了 $\mathcal{Q}\mathcal{L}_0 = (\mathbb{I} - \mathcal{P})\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0$. 如果只保留到二阶项, 可以得到如下有效动力学方程:

$$\dot{\mu} = \mathcal{L}_{\text{eff}} \mu = \mathcal{P}\mathcal{L}_1 \mu + \mathcal{P}\mathcal{L}_1 \int_0^t e^{\mathcal{L}_0 \tau} d\tau \mathcal{Q}\mathcal{L}_1 \mu(t). \quad (18)$$

下面将以里德伯原子系统为例, 利用刘维尔能谱和等效动力学理论研究该系统中动力学等效描述.

3 具体应用——里德伯原子系统

3.1 理论模型

考虑具有相互作用的全同里德伯原子系统. 每个里德伯原子均为四能级结构, 其能级结构和激光激发构型如图 1(a) 所示: |1> 为基态能级, |2> 为低激发态, |3> 和 |4> 分别为两个里德伯激发态. 一束

弱的信号光场近共振耦合 |1> \leftrightarrow |2> 跃迁, 耦合强度 (拉比频率) 为 Ω_p , 一束强的控制光场近共振耦合 |2> \leftrightarrow |3>, 耦合强度 (拉比频率) 为 Ω_c . 信号光场和控制光场以及它们耦合的能级构成了一个标准的 Ξ 型 EIT 结构. 在偶极近似和旋波近似下, 相应的单原子哈密顿量为

$$H_j = \delta_2 \sigma_{22}^j + \delta_3 \sigma_{33}^j + \left(\frac{\Omega_c}{2} \sigma_{32}^j + \frac{\Omega_p}{2} \sigma_{21}^j + \text{H.c.} \right), \quad (19)$$

其中 $\sigma_{ab}^j = |a_j\rangle\langle b_j|$, δ_n ($n = 2, 3$) 为相应光场的失谐量.

如果考虑系统初始时只有一个原子处于里德伯态 |4>, 即 $|\psi(t=0)\rangle = \sum_{j=1}^N |1\rangle \cdots |4\rangle_j \cdots |1\rangle / \sqrt{N}$ [31], 当探测光弱到不足以同时激发两个原子时, 系统将只有一个原子可以被激发到里德伯态, 即一个原子处于态 |4>, 另一个原子处于态 |3> [31,32]. 这种情况下, 两个原子相互作用的哈密顿量为 [10,31,32]

$$H_{\text{int}}^{ij} = \frac{V}{2} \left(\sigma_{34}^i \sigma_{43}^j + \sigma_{33}^i \sigma_{44}^j + \text{H.c.} \right), \quad (20)$$

其中 V 为作用强度, 本文关心的是系统的动力学, 特别是相互作用对系统弛豫到稳态的速率的影响. 与里德伯能级之间的相互作用强度相比, 原子低激发态之间所产生的相互作用可以忽略不计. 另外, 假设低激发态 |2> 的自发辐射率为 γ (一般在 MHz 量级), 考虑到里德伯态寿命较低激发态寿命长很多, 故忽略其自发辐射 (一般在 kHz 量级). 在考虑低激发态自发辐射所引起的耗散之后, 原子系统的动力学可以由主方程来描述 [21,22]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \mathcal{L}\rho = -i[H, \rho] \\ &+ \gamma \sum_j \left(\sigma_{12}^j \rho \sigma_{21}^j - \frac{1}{2} \{ \sigma_{21}^j \sigma_{12}^j, \rho \} \right), \quad (21) \end{aligned}$$

其中 H 为系统总的哈密顿量, 表示为

$$H = \sum_j H_j + \sum_{i \neq j} H_{\text{int}}^{ij}. \quad (22)$$

图 1(b) 给出了系统的动力学数值模拟结果, 横轴表示时间, 纵轴表示原子对信号光场的吸收, 其中红色曲线对应无相互作用 $V = 0$ 时的结果, 蓝色曲线表示存在相互作用时的结果. 结果表明, 当不存在相互作用时, 系统在非常短的时间内就达到了稳态; 当考虑原子间的相互作用时, 系统在达到最后的稳态之前将经历漫长的亚稳动力学过程. 下面讨论首先从能谱角度给出定性解释, 然后利用亚稳态理论, 给出系统动力学过程的等效描述.

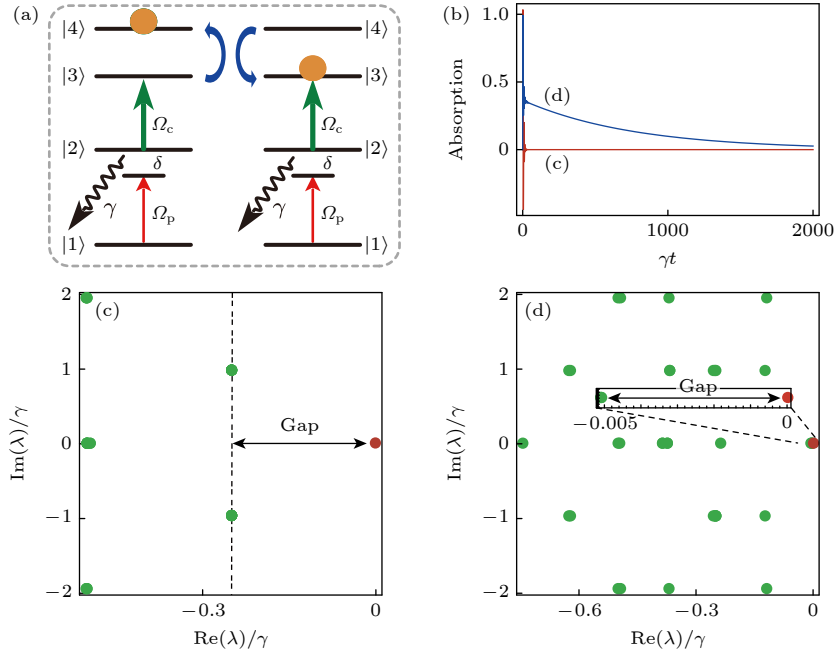


图 1 双原子系统的亚稳态动力学过程示意图 (a) 四能级原子的能级结构与光场激发构型图; (b) 系统的动力学过程, 其中红色曲线对应图 (c) 中的参数条件, 蓝色曲线对应图 (d) 中的参数条件; (c), (d) 刘维尔超算子的能谱, 红色点表示稳态所对应的本征值 ($\lambda_0 = 0$), 绿色点表示衰减模式所对应的本征值 ($\lambda_i > 0$), 其中图 (c) 中无相互作用 $V/\gamma = 0$, 图 (d) 中相互作用 $V/\gamma = 0.6$, 其他参数均为 $\Omega_c/\gamma = 2.0$, $\Omega_p/\gamma = 0.1$, $\delta/\gamma = 0$

Fig. 1. Metastable dynamics of two-atom system: (a) Energy levels and transitions of four-levels atom; (b) the dynamic process of the system, where the red and blue curves correspond to the parameters in panels (c) and (d) respectively; (c), (d) the spectrum of the Liouvillian superoperator, the red points indicate the eigenvalue $\lambda_0 = 0$ corresponding to the steady state, and the green points are the eigenvalues ($\lambda_i > 0$) corresponding to the decaying mode, note that there is no interaction in panel (c) and $V/\gamma = 0$, while the interaction in panel (d) with parameter $V/\gamma = 0.6$, other parameters are $\Omega_c/\gamma = 2.0$, $\Omega_p/\gamma = 0.1$, $\delta/\gamma = 0$.

3.2 刘维尔能谱

为了简化模型, 考虑两个原子所组成的系统, 其初态为 $|\psi(t=0)\rangle = (|14\rangle + |41\rangle)/\sqrt{2}$. 根据系统总的哈密顿量 (22) 式可知, 系统可在基矢 $|14\rangle$, $|24\rangle$, $|34\rangle$, $|43\rangle$, $|42\rangle$, $|41\rangle$ 所张开的希尔伯特空间演化. 系统的动力学信息, 特别是弛豫时间可以直观地从刘维尔能谱获取. 图 1(c) 和图 1(d) 分别给出了无相互作用 (图 1(c)) 和存在相互作用 (图 1(d)) 时的刘维尔能谱, 其中横轴表示实部, 纵轴表示虚部, 且刘维尔能谱关于横轴对称分布. 比较两图可知, 无相互作用时的能隙远远大于存在相互作用时的能隙. 这表明, 当里德伯原子之间不考虑相互作用时, 系统的动力学表现为单体行为, 系统很快达到了稳态 (图 1(b) 红线); 而考虑相互作用时, 所对应的刘维尔能隙非常的小 ($g \ll 1$), 弛豫时间大大增大, 系统需要经过漫长的亚稳动力学过程之后才最终弛豫至稳态 (图 1(b) 蓝线). 其物理根源就是, 当存在相互作用时, 系统的动力学不再是单体行为, 而是会有相互制约、相互扰动, 因此无法同步

调快速地达到稳态.

为了更清晰地展示能隙对相互作用的依赖情况, 图 2 给出了刘维尔能谱随相互作用 V 的变化情况. 红色曲线表示 $\lambda_0 = 0$, 对应系统的稳态 ρ_{ss} , 绿色曲线表示 $-\text{Re}(\lambda_1)$, 即刘维尔能隙的大小,

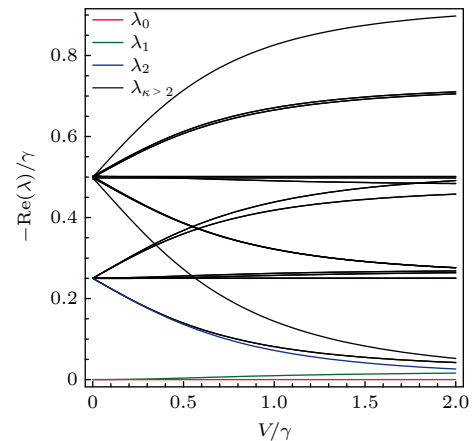


图 2 刘维尔能谱随相互作用 V/γ 的变化. 参数 $\Omega_c/\gamma = 2.0$, $\Omega_p/\gamma = 0.1$, $\delta/\gamma = 0$

Fig. 2. Spectrum of the Liouvillian as a function of V/γ . Parameters are $\Omega_c/\gamma = 2.0$, $\Omega_p/\gamma = 0.1$, $\delta/\gamma = 0$.

蓝色曲线表示 $-\text{Re}(\lambda_2)$, 黑色曲线表示 $k > 2$ 的其他本征值. 如图 2 和图 1(c) 所示, 当 $V = 0$ 时, $-\lambda_1 = 0$, 意味着刘维尔能隙不再由 $-\text{Re}(\lambda_1)$ 来定义, 而是 $g = -\text{Re}(\lambda_2)$, 因此系统的弛豫过程将如图 1(b) 中红色曲线所示很快达到稳态; 而当 $V \neq 0$ 且 $V \ll \gamma$ 时, 如图 2 和图 1(d) 所示, $-\lambda_1 \ll -\lambda_2$, 因此系统在达到稳态之前会经历漫长的亚稳态动力学过程.

3.3 有效动力学描述

下面利用有效动力学理论对上述系统的动力学过程进行等效描述. 主方程 $\dot{\rho} = \mathcal{L}_0\rho + \mathcal{L}_1\rho$, 其中 \mathcal{L}_0 包含相互作用哈密顿量和耗散作用, \mathcal{L}_1 为驱动项, 视之为微扰. 超算子 \mathcal{L}_0 具体定义为

$$\mathcal{L}_0\rho = -i[H_0, \rho] + \gamma \sum_j \left(\sigma_{12}^j \rho \sigma_{21}^j - \frac{1}{2} \{ \sigma_{21}^j \sigma_{12}^j, \rho \} \right), \quad (23)$$

其中,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \Omega_p^2 \begin{pmatrix} -\frac{64V^2\gamma}{64V^2\gamma^2+1} & \frac{8iV}{64V^2\gamma^2+1} & -\frac{8iV}{64V^2\gamma^2+1} & \frac{64V^2\gamma}{64V^2\gamma^2+1} \\ -\frac{8V}{i+8V\gamma} & -\frac{128V^2\gamma}{64V^2\gamma^2+1} & 0 & \frac{8V}{i-8V\gamma} \\ \frac{8V}{i-8V\gamma} & 0 & -\frac{128V^2\gamma}{64V^2\gamma^2+1} & -\frac{8V}{i+8V\gamma} \\ \frac{64V^2\gamma}{64V^2\gamma^2+1} & -\frac{8iV}{64V^2\gamma^2+1} & \frac{8iV}{64V^2\gamma^2+1} & -\frac{64V^2\gamma}{64V^2\gamma^2+1} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其对应的本征值和本征矢为

$$\lambda_0^{\text{eff}} = 0, R_0 = \rho_{\text{ss}}^{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\lambda_1^{\text{eff}} = -\frac{128\gamma V^2 \Omega_p^2}{64\gamma^2 V^2 + 1}, R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\lambda_2^{\text{eff}} = \frac{16V \Omega_p^2}{-8\gamma V + i}, R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\lambda_3^{\text{eff}} = -\frac{16V \Omega_p^2}{8\gamma V + i}, R_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

观察 $\rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}$ 的表达式可知, 在 $\delta = 0$ 时, \mathcal{L}_{eff} 系统的稳态为最大纠缠态 $1/\sqrt{2}(|14\rangle - |41\rangle)$. 这表明在该参数条件下, 系统无论初态如何, 最后均会弛豫到该最大纠缠态, 这对利用耗散过程制备纠缠等量

$$H_0 = \sum_j \left[\delta_2 \sigma_{22}^j + \delta_3 \sigma_{33}^j + \left(\frac{\Omega_c}{2} \sigma_{32}^j + \text{H.c.} \right) \right] + \sum_{i \neq j} H_{\text{int}}^{ij}. \quad (24)$$

可见 \mathcal{L}_0 包含了哈密顿量中的一部分以及耗散项. 此外, 当 $\Omega_p \ll \Omega_c$ 和 γ 时, 驱动项视为微扰 \mathcal{L}_1 :

$$\mathcal{L}_1\rho = -i \left[\sum_j \frac{\Omega_p}{2} (\sigma_{12}^j + \sigma_{21}^j), \rho \right]. \quad (25)$$

利用 (18) 式可以获得有效刘维尔超算子 \mathcal{L}_{eff} 的解析形式. 对于任意初始态 ρ_{in} 均可得到其时间演化的动力学形式:

$$\rho^{\text{eff}} = e^{\mathcal{L}_{\text{eff}} t} \rho_{\text{in}}. \quad (26)$$

在一般参数情况下, 给出 \mathcal{L}_{eff} 的解析形式是十分复杂的. 当参数 $\delta = 0$ 时, 可以获得形式上较为简单的解析形式 (在基矢 $|14\rangle\langle 14|, |14\rangle\langle 41|, |41\rangle\langle 14|, |41\rangle\langle 41|$ 所张开的子空间):

子相关技术非常具有启发意义.

为了检验该描述的有效性, 需要对有效动力学的密度矩阵和系统实际动力学的密度矩阵 (由 (21) 式求得) 进行对比, 从而定义保真度 $F(t) = \text{Tr}[\sqrt{\rho(t)\rho_{\text{eff}}(t)}]$ 以及稳态误差 $\|\delta\rho_{\text{ss}}\| = \|\rho_{\text{ss}} - \rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}\|$. 数值模拟结果分别如图 3 和图 4 所示. 图 3 为有效动力学描述的保真度, 不同曲线对应随机设置的 50 种不同初态的有效演化. 在动力学的初始阶段, 保真度存在一定的振荡 (这是由相干驱动和耗散之间的竞争关系导致的, 在刘维尔能谱中的体现就是本征值为复数), 且对初始态有一定的依赖关系, 即系统存在一定的记忆功能; 但是当动力学弛豫时间足够长时, 保真度趋于一个稳定的值, 该值对应了 $F(t \rightarrow \infty) = \text{Tr}[\sqrt{\rho_{\text{ss}}\rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}}]$, 只由系统的参数决定, 与初始态无关, 即此后系统对初始态的记忆消失.

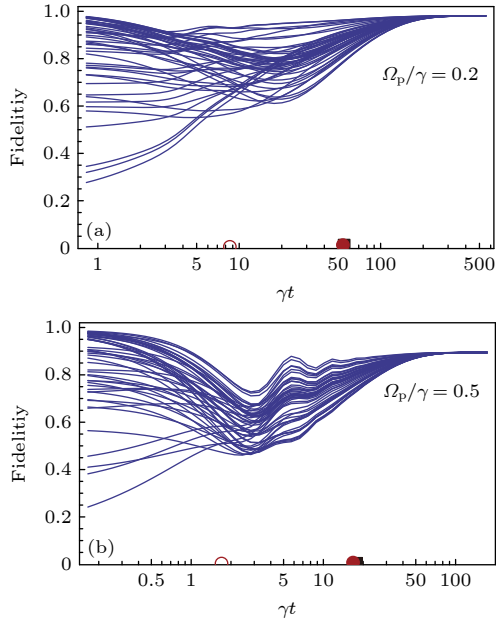


图 3 50 种随机初始态情况下保真度 $F(t) = \text{Tr}[\sqrt{\rho(t)\rho_{\text{eff}}(t)}]$ 随时间的变化. 横轴上的红色空心圆、红色实心圆和黑色方块所标注的时间分别对应于文中所定义的时间尺度 τ'' , τ' , τ (a) $\Omega_p/\gamma = 0.2$; (b) $\Omega_p/\gamma = 0.5$. 其他参数为 $\Omega_c/\gamma = 2.0$, $\delta/\gamma = 0$, $V/\gamma = 0.6$

Fig. 3. Fidelity $F(t) = \text{Tr}[\sqrt{\rho(t)\rho_{\text{eff}}(t)}]$ in 50 random initial states. Red open circles, red filled circles and black squares on the x axis correspond the time scales τ'' , τ' , τ respectively: (a) $\Omega_p/\gamma = 0.2$; (b) $\Omega_p/\gamma = 0.5$. Other parameters are $\Omega_c/\gamma = 2.0$, $\delta/\gamma = 0$, $V/\gamma = 0.6$.

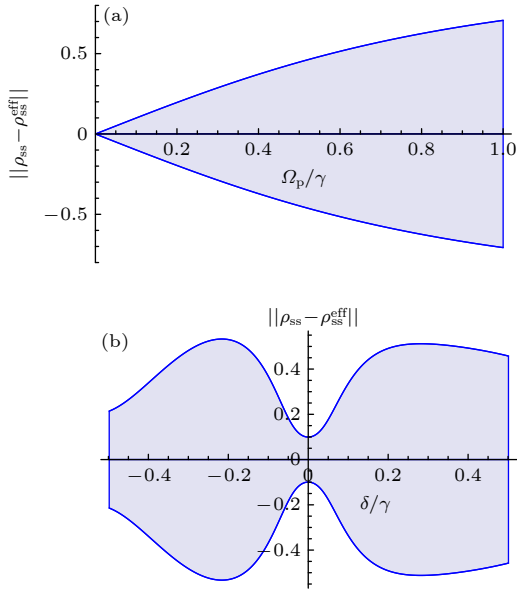


图 4 有效动力学的稳态与真实稳态的差异, $\|\delta\rho_{\text{ss}}\| = \|\rho_{\text{ss}} - \rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}\|$ 随 Ω_p/γ 和 δ/γ 的变化, 其他参数同图 3

Fig. 4. Difference between the steady state of the effective dynamics and the real steady state, $\|\delta\rho_{\text{ss}}\| = \|\rho_{\text{ss}} - \rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}\|$ as a function of parameters Ω_p/γ and δ/γ , other parameters are the same as Fig.3.

对比图 3(a), (b) 可知, 当探测光较弱时, 稳态保真度比较高, 但在探测光强度增大时稳态保真度会下降. 为了展示保真度对探测光拉比频率的依赖关系, 以及更直观地说明等效动力学描述的有效条件, 图 4(a), (b) 给出了有效动力学稳态与真实演化的稳态之间的差异 $\|\delta\rho_{\text{ss}}\| = \|\rho_{\text{ss}} - \rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}\|$ 随参数 Ω_p/γ (图 4(a)) 和 δ/γ (图 4(b)) 的变化. 结果表明该误差和 Ω_p 成平方关系, 这主要是因为在有效动力学描述中只保留到了微扰项 \mathcal{L}_1 (其能量尺度为 Ω_p) 的二阶项. 图 4(b) 结果表明失谐量对稳态保真度的影响非常明显, 即只有在单光子共振情况下系统最终的稳态才可以近似为纠缠态 $\rho_{\text{ss}}^{\text{eff}}$.

图 5 进一步展示了在不同 Ω_p 的情况下系统从

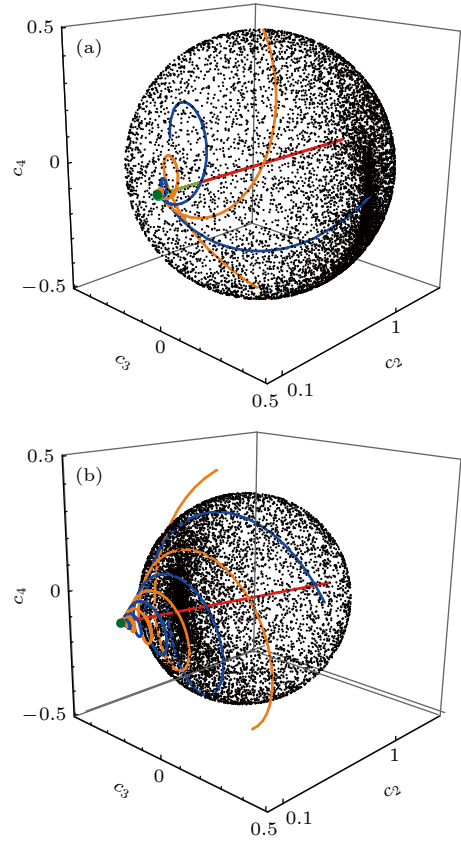


图 5 不同初始态在慢变子空间的动力学演化 (a) $\Omega_p/\gamma = 0.1$; (b) $\Omega_p/\gamma = 0.6$. 其他参数同图 3. 图中黑色的小点表示子空间中的任意纯态, 绿色圆点表示系统最终的稳态, 红色、蓝色、橙色和绿色曲线表示从几种不同的初始态开始的动力学过程

Fig. 5. Dynamical evolution of different initial states in the metastable subspace: (a) $\Omega_p/\gamma = 0.1$; (b) $\Omega_p/\gamma = 0.6$. Other parameters are the same as Fig.3. Black dots indicate arbitrary pure states in the subspace, the green dot indicates the steady state of the system, and the red, blue, orange and green curves indicate the dynamical processes starting from several different initial states.

不同初始态弛豫至稳态的动力学过程, 其中图 5(a) 中 $\Omega_p = 0.1\gamma$, 图 5(b) 中 $\Omega_p = 0.6\gamma$. 图中黑色的小点表示子空间中的任意纯态, 红色、蓝色、橙色和绿色曲线表示从几种不同的初始态开始的动力学过程. 在经过足够长时间的弛豫后不同初始态均汇聚在同一点, 即系统的稳态. 对比图 5(a) 和图 5(b) 可见, 在 Ω_p 较小时, 系统的稳态基本被慢变子空间所囊括, 但是 Ω_p 增大后, 慢变子空间已经无法囊括系统稳态, 这表明此时有效动力学过程失效.

4 总 结

本文研究了开放量子多体系统的亚稳动力学过程及其在低维度空间中的有效描述. 首先, 从刘维尔能谱角度出发讨论了动力学过程的几个时间尺度, 结果表明, 当能谱中靠近零本征值的几个慢变模式与其他模式之间存在很大能隙时, 系统在衰减至最终的稳态之前会以多项式在亚稳态子空间中缓慢弛豫. 然后, 介绍了通过微扰消除快衰减模式的方法, 将系统动力学在慢变的亚稳态子空间中进行等效描述, 从而降低计算维度. 最后, 作为例子, 针对 EIT 条件下的里德伯原子系统, 讨论了如何将完整动力学等效为亚稳态动力学过程, 并讨论了系统参数对有效描述的影响以及相应的误差. 本文的研究为建立开放多体系统动力学过程的有效简化描述提供了一种可行的思路和方法.

参考文献

- [1] Zhai H 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 230701 (in Chinese) [翟荟 2023 物理学报 **72** 230701]
- [2] Macieszczak K, Guță M, Lesanovsky I, Garrahan J P 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 240404
- [3] Defenu N 2021 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **118** e2101785118
- [4] Macieszczak K, Rose D C, Lesanovsky I, Garrahan J P 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 033047
- [5] Mori T 2021 *Phys. Rev. Res.* **3** 043137
- [6] Li J L, Rose D C, Garrahan J P, Luitz D J 2022 *Phys. Rev. B* **105** L180201
- [7] Jäger S B, Schmit T, Morigi G, Holland M J, Betzholz R 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 063601
- [8] Gangat A A, Te I, Kao Y J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 010501
- [9] Berthier L, Ediger M D 2016 *Phys. Today* **69** 40
- [10] Macieszczak K, Zhou Y L, Hofferberth S, Garrahan J P, Li W B, Lesanovsky I 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043860
- [11] Brown C A, Macieszczak K, Jack R L 2024 *Phys. Rev. A* **109** 022244
- [12] Letscher F, Thomas O, Niederprüm T, Fleischhauer M, Ott H 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021020
- [13] Cabot A, Carollo F, Lesanovsky I 2022 *Phys. Rev. B* **106** 134311
- [14] Landa H, Schiró M, Misguich G 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 043601
- [15] Znidarič M 2015 *Phys. Rev. E* **92** 042143
- [16] Sciolla B, Poletti D, Kollath C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 170401
- [17] Minganti F, Biella A, Bartolo N, Ciuti C 2018 *Phys. Rev. A* **98** 042118
- [18] Zhou Y L, Yu X D, Wu C W, Li X Q, Zhang J, Li W, Chen P X 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 043036
- [19] Kielpinski D, Meyer V, Rowe M A, Sackett C A, Itano W M, Monroe C, Wineland D J 2001 *Science* **291** 1013
- [20] Viola L, Fortunato E M, Pravia M A, Knill E, Laflamme R, Cory D G 2001 *Science* **293** 2059
- [21] Lindblad G 1976 *Commun. Math. Phys.* **48** 119
- [22] Gorini V, Kossakowski A, Sudarshan E C G 1976 *J. Math. Phys.* **17** 821
- [23] Minganti F, Miranowicz A, Chhajlany R W, Nori F 2019 *Phys. Rev. A* **100** 062131
- [24] Carollo F, Lasanta A, Lesanovsky I 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 060401
- [25] Huybrechts D, Minganti F, Nori F, Wouters M, Shammah N 2020 *Phys. Rev. B* **101** 214302
- [26] Albert V V, Jiang L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022118
- [27] Zhang J, Xia G, Wu C W, Chen T, Zhang Q, Xie Y, Su W B, Wu W, Qiu C W, Chen P X, Li W B, Jing H, Zhou Y L 2024 arxiv: 2401.15951 [quant-ph]
- [28] Zanardi P, Venuti L C 2015 *Phys. Rev. A* **91** 052324
- [29] Marcuzzi M, Schick J, Olmos B, Lesanovsky I 2014 *J. Phys. A* **47** 482001
- [30] Gutiérrez R, Garrahan J P, Lesanovsky I 2016 *New J. Phys.* **18** 093054
- [31] Li W, Viscor D, Hofferberth S, Lesanovsky I 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 243601
- [32] Zhou Y L 2021 *Opt. Express* **29** 15300

Metastable dynamics of Rydberg atomic system under electromagnetically induced transparency*

Xia Gang Zhang Ya-Peng Tang Jing-Wen Li Chun-Yan
Wu Chun-Wang Zhang Jie Zhou Yan-Li[†]

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 2 February 2024; revised manuscript received 7 March 2024)

Abstract

Open quantum system, coupled with an external bath is a key research field of quantum physics. Steady state is the state in which any initial state converges after a long time and is usually of the most interest. However, relatively speaking, the nonequilibrium dynamical processes of quantum many-body systems have been rarely studied. This is mainly due to the fact that quantum many-body systems generally have interactions, and the Hilbert space required for a complete description of their dynamical processes will grow exponentially with the number of particles increasing, and the computational difficulty will increase dramatically as well. Hence, it is a difficult problem to completely describe their dynamical processes completely. With the development of quantum technologies, the interest in the nonequilibrium dynamics of open quantum many-body systems is aroused. A common phenomenon is the metastable state, where the system initially relaxes into a long-lived state and then converges to the final stationary state for a longer time. In this paper, we establish a low-dimensional approximation to describe the metastability dynamics in Markovian open quantum system, based on the spectra of the Liouvillian super-operator. The separation of time scales implies a splitting in the spectrum, and this spectral division allows us to eliminate the fast decay modes by using the perturbation method, and then we establish the effective description in the low-lying eigenmodes subspace. Furthermore, we study the dynamics process of the Rydberg atomic system under electromagnetically induced transparency (EIT) conditions and find that the system can handle metastable dynamics if the atomic interactions are considered. We compare the effective dynamics in the subspace with the actual dynamics in the full space, and the results show that the effective dynamics works well on condition that the perturbation approximation holds. Our work provides a feasible idea and method for establishing an effective and simplified description of the dynamical process of open quantum many-body systems.

Keywords: metastable dynamics, relaxation, electromagnetically induced transparency, Liouvillian superoperator

PACS: 42.50.-p, 03.65.Yz, 42.50.Gy, 42.50.Nn

DOI: [10.7498/aps.73.20240233](https://doi.org/10.7498/aps.73.20240233)

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant Nos. 2023JJ30626, 2022RC1194, 2023JJ10052) and the National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 12174448, 12004430).

[†] Corresponding author. E-mail: ylzhou@nudt.edu.cn



电磁感应透明条件下里德伯原子系统的亚稳动力学

夏刚 张亚鹏 汤婧雯 李春燕 吴春旺 张杰 周艳丽

Metastable dynamics of Rydberg atomic system under electromagnetically induced transparency

Xia Gang Zhang Ya-Peng Tang Jing-Wen Li Chun-Yan Wu Chun-Wang Zhang Jie Zhou Yan-Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 104203 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240233

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240233>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

里德伯电磁感应透明中的相位

Phase in Rydberg electromagnetically induced transparency

物理学报. 2019, 68(8): 084203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181938>

基于调控原子相干的 Λ -型电磁感应透明与吸收

Λ -type electromagnetically induced transparency and absorption by controlling atomic coherence

物理学报. 2022, 71(22): 224201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220950>

Rydberg原子的微波电磁感应透明-Autler-Townes光谱

Microwave electromagnetically induced transparency and Autler-Townes spectrum of cesium Rydberg atom

物理学报. 2018, 67(9): 093201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172645>

基于里德伯原子电磁诱导透明效应的光脉冲减速

Deceleration of optical pulses based on electromagnetically induced transparency of Rydberg atoms

物理学报. 2021, 70(10): 103201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210102>

Rydberg原子的电磁诱导透明光谱的噪声转移特性

Noise transfer characteristics of Rydberg electromagnetically induced transparency

物理学报. 2018, 67(21): 213201 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181168>

点间隧穿调控五能级M型三量子点电磁感应透明介质中的孤子碰撞性质

Controlling collision properties of solitons in five-level M-type triple quantum dot electromagnetically induced transparency medium by inter-dot tunneling coupling

物理学报. 2020, 69(17): 174203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200141>