

二元双层耦合网络渗流行为分析*

高彦丽¹⁾ 徐维南¹⁾ 周杰²⁾ 陈世明^{1)†}

1) (华东交通大学电气与自动化工程学院, 南昌 330013)

2) (华东师范大学物理与电子科学学院, 上海 200241)

(2024 年 4 月 1 日收到; 2024 年 6 月 14 日收到修改稿)

本文建立了节点和连边耦合的二元相互依赖网络模型 (binary interdependent networks with node and edge coupling, BINNEC). 该模型中, 网络 A 节点随机依赖网络 B 多条边从而形成边依赖群, 当边依赖群的失效比例超过网络失效容忍度 μ 时, 导致网络 A 的节点失效. 基于自平衡概率法建立起理论分析框架, 通过对 3 种经典网络结构下的 BINNEC 网络进行计算机仿真验证, 并分析了该模型面对随机攻击下的相变行为和关键阈值. 研究结果表明 3 种网络结构下的 BINNEC 网络和一元耦合网络一样脆弱, 网络的相变行为都是一阶相变. 当网络节点的边依赖群规模 m 越大, 网络鲁棒性增强; 在网络的边依赖群规模一定时, 节点的失效容忍度 μ 越大网络鲁棒性越强. 本文进一步研究在 m 和 μ 相同条件下, 网络的度分布对 BINNEC 的影响. 研究可以为此类二元耦合网络鲁棒性提供一定的理论依据, 同时也为现实网络的安全设计提供指导意义.

关键词: 相依网络, 二元耦合, 失效容忍度, 鲁棒性**PACS:** 89.75.-k, 89.75.Fb**DOI:** 10.7498/aps.73.20240454

1 引言

20 世纪 80 年代以来, 随着人们对复杂网络的深入研究, 逐步认识到现实生活中的网络系统并非是孤立存在的单一网络系统^[1-3], 而是与其他网络之间存在或多或少的依赖关系, 从而形成更大规模的多网络依赖系统. 如电力网和通信网^[4]、交通运输网和供应链网^[5]、航空网和贸易网^[6] 等存在相互依赖关系的网络. 2003 年发生在意大利的大停电事故^[7], 其根源就是由于电力网和通信网之间的高度依赖关系. 为了研究网络之间相互作用对网络鲁棒性的影响, Buldyrev 等^[8] 通过研究电力网和通信网之间的相互依赖关系, 提出了完全一对一的节点相互依赖级联失效模型, 并且通过生成函数法^[9-11] 开发了该相依网络理论数学分析框架.

此后学者在经典完全相依网络模型基础上进一步提出了各种相依网络模型. 最早 Parshani 等^[12] 观察到现实网络并非一对一相互依赖关系, 建立了部分点相依网络模型, 发现耦合强度的变化可以使网络渗流行为表现一阶相变和二阶相变. 在上述部分相依模型基础上, 发现减弱耦合强度可以使网络从一阶相变转换为二阶相变^[13]. Gao 等^[14] 扩展了双层点相依网络模型为 n 个网络组成的 NON 网络, 研究发现对于 ER 组成的环状网络, 网络的最大联通片与 n 无关. Jiang 等^[15] 分析了多层网络中耦合强度对网络的跨层级联和层内级联的渗流行为, 即在初始节点故障时可以通过一阶或二阶渗流转变而崩溃. 考虑到耦合模式对相依网络的影响, Zhang 等^[16] 研究了多重依赖关系的网络, 即一层网络节点依赖另外一层网络多个节点, 另外一层节点只依赖该层一个节点, 具有多层依赖关系的层表

* 国家自然科学基金 (批准号: 62341306, 12075088, 62263011) 和江西省自然科学基金 (批准号: 20232BAB202033) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shmchen@ecjtu.jx.cn

现出一阶相变和混合相变, 但 Dong 等^[17]则研究两层网络都具有多重依赖关系 (即节点多对多对应关系), 发现通过加强耦合强度和连接密度, 系统抵抗级联失效能力更强. 韩伟涛和伊鹏^[18]在具有多重依赖关系的网络层中添加节点失效冗余度 r , 通过增大 r 明显提高了系统鲁棒性. Wang 等^[19]考虑到现实网络中多个节点相互协同集结成组 (超级节点), 同一组内一起失效或者生存, 结果显示这种群体渗流总是一阶相变, 且与超级节点大小分布无关.

不同于上述基于节点的网络模型, Gao 等^[20]提出了边完全相互依赖网络模型. 此后, 在此模型基础上研究了部分边相依情况, 即随着耦合比例 q 的变化网络出现一阶相变到二阶相变的转换, 进一步研究了有向依赖链接的边耦合相互依赖网络模型, 网络 A 中 β 比例链路依赖于网络 B, 随着依赖比例的变化, 两层网络都存在不同类型的相变过程^[21]. Zhao 等^[22]提出一个关于凝固网络视角的边相依网络模型, 通过开发基于凝固网络框架的理论来进一步揭示边相依网络相对于点相依网络更鲁棒的原因. Xie 等^[23]在边相依网络模型基础上, 提出了加权边耦合的相依网络模型.

上述已有研究中网络相互依赖关系都体现在单一的网络功能元素之间, 即节点和节点或者边和边的相依关系, 称为一元耦合关系. 本文考虑到现实网络中, 两层网络之间的作用关系并非完全是节点或者连边这种单纯的依赖关系, 存在一层网络节点和另外一层网络连边之间的依赖关系. 现实网络例子如供应链系统中的生产商和物流网络, 生产商的生产和供应能力依赖于物流网络的运输和分配能力, 生产商的节点 (如工厂) 依赖于物流网络中的边 (如运输网线路) 来保证产品的及时性运输和分发, 而物流网络边的存在和强度取决于生产商的需求和供应链设计. 两者共同构成了二元相互依赖网络, 即节点和边的相互依存关系. 由此本文提出了节点和连边相互依赖的二元耦合网络 (BINNEC).

基于渗流理论和自平衡方程, 建立详细的数学理论分析框架来对 BINNEC 渗流行为进行分析. 为考虑一般性, 文中分析了三种不同的网络结构, 验证了理论框架的数值解和计算机仿真结果一致, 研究了二元耦合网络渗流行为和鲁棒性.

2 二元耦合网络模型

传统的相依网络渗流模型如图 1(a), (b) 所示, 为一对一相互依赖关系, 如节点和节点相互依赖、边和边的相互依赖模型, 即都为单一元素之间的耦合关系. 这种同元一对一依赖可使得两层网络的级联失效满足无反馈条件, 元素之间级联失效效应往往是对等的. 本文中相依网络模型简化如图 1(c) 所示, 网络 A 中失效的节点导致网络 B 中的多条连边失效, 网络 B 中连边失效, 反过来导致网络 A 中节点失效, 节点失效和边失效导致各自层中的破坏程度不完全一样. 下面将具体研究这种不对等级联失效效应的点-边相互依赖模型.

首先建立 BINNEC 模型, 第 1 层网络 A 的节点大小为 N_A , 度分布为 $P_A(k)$; 第 2 层网络 B 的节点大小为 N_B , 度分布为 $P_B(k)$. 根据网络的性质和一般性, 网络中边的数量大小远远大于该网络中节点的数量, 同时也考虑到网络 A 的节点单纯与网络 B 的边相互依赖. 为保证网络 B 的边全部和网络 A 的节点都有相应的依赖关系, 那么必然网络 A 节点相互依赖于网络 B 的多条边, 即存在网络 A 节点 j 随机依赖于网络 B 中 m 条边, 定义节点依赖群规模为 m . 本文考虑单一依赖的情况, 网络平均度取偶数度值, 使得网络 A 节点 j 全部只依赖 B 网络 m 条边, 网络 B 的一条边随机依赖网络 A 的一节点. 考虑到节点 j 依赖多条边, 本文定义 μ ($0 \leq \mu < 1$) 为网络 A 节点 j 的边依赖群的失效容忍度, 即网络 A 某一节点 j 依赖的 m 条边失效比例超过 μ 时该节点失效, 否则该节点继续存活.

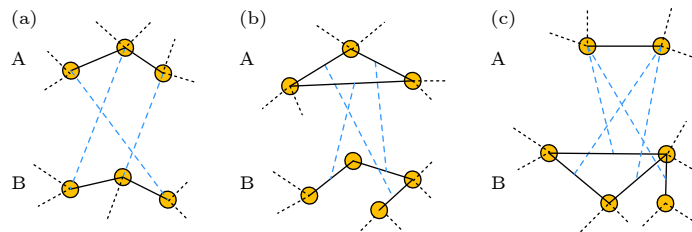


图 1 相依网络示意图

Fig. 1. Schematic diagram of the interdependence network.

为保证在不同失效容忍度 μ 下, 网络 A 节点的依赖群失效边数 s 为整数. 因此, 定义节点规模为 m 的依赖群的存活条件为至多可以容忍 n 条连边 ($n = \lfloor m\mu \rfloor$) 失效. 假设两层网络 A 和 B 的节点大小相同, 平均度 $\langle k_A \rangle$ 和 $\langle k_B \rangle$ 均为 4, 意味着它们两者的边数量相同. 在网络 A 中随机选取一节点与网络 B 中任意两条边尚未建立相互依赖关系的边建立依赖关系, 直到网络 B 中全部边都与相依网络 A 建立起依赖关系, 假设网络 A 节点失效容忍度 $\mu = 0$. 由于网络模型的功能分别被定义在网络 A 节点和网络 B 边上, 因此基于网络 A 的点渗流和网络 B 的边渗流进行分析. 假设随机攻击使 A 网络 $1 - p$ 比例的节点失效, 那么同一层网络中与之相连的边和相互依赖的另外一层网络中的边也失效, 同时两层网络中脱离各自网络最大联通片 (giant component, GC) 的节点也随着失效. 当网络 B 中脱离最大联通片的节点失效导致的同层边失效时, 与失效的边相互依赖的节点也会失效. 这种级联失效过程不断反复直至网络达到稳定状态, 即没有其他的节点或边失效.

图 2 给出了点-边二元相互依赖网络的级联失效过程, 网络 A 的全部节点依赖于网络 B 的所有边. 图中黑色实线表示连接各层中属于 GC 节点的边, 蓝色虚线表示连接两层的相互依赖边, 黑色虚线表示网络内失效的边. 假设网络 A 随机节点 a_5 和 a_6 遭到攻击而失效, 导致与其相连的连边失效. a_5 和 a_6 失效导致网络 A 中节点 a_7 因脱离 GC 而失效, 继而使得与网络 A 中失效节点有依赖关系的网络 B 中的相依边失效, 这导致网络 B 中脱离 GC 的边 $b_5 \leftrightarrow b_7$ 失效, 同时边 $b_5 \leftrightarrow b_7$ 失效导致

网络 A 相依节点 a_4 失效, a_4 失效使网络 B 的边 $b_3 \leftrightarrow b_6$ 失效, 进一步导致网络 B 的级联失效进程. 通过这个过程, 两个相互依赖网络中级联故障的交互传播, 使得故障从 A 网络传播到 B 网络, B 网络又进一步将故障传播到 A 网络, 不断重复两者级联失效过程, 网络中没有其他节点和边的失效, 剩余节点和边均位于网络的最大相互连接巨型组件 (mutual connected giant component, MCGC) 中.

3 理论分析框架

根据上述点-边二元相依耦合网络模型, 对于两层的二元耦合网络, 采用自平衡概率理论方法, 设置一个辅助变量参数 L , 定义为随机选择的一条连边连接到最大互连通片 (MCGC) 的概率. 由图 3 参数定义可知, 对于本文二元网络模型, 可以假设 L_A 为 A 网络中随机选择的一条连边连接到 MCGC 的概率, 那么 $1 - L_A$ 可表示为随机选择的连边没有连接到 MCGC 的概率. 同理, L_B 为 B 网络中随机选择的连边连接到 MCGC 的概率, $1 - L_B$ 表示为随机的连边没有连接到 MCGC 的概率.

对于 A 网络的随机选择的节点, 不同于节点耦合网络 (一层网络的节点与另外一层网络的节点相互关联), 同样也区别于边耦合的网络 (两层网络之间连边存在相互依赖关系), 节点和边相互耦合的二元耦合网络中网络 A 的节点与网络 B 中节点无直接相互作用, 但是与另外一层网络的边存在耦合关联. 对于本文相依网络模型, 网络 A 的节点存活概率即连接到该网络 GC 的概率, 不仅要求该节点在网络 A 中存活, 同时也要求该节点的边依赖群失效比例不超过失效容忍度 μ .

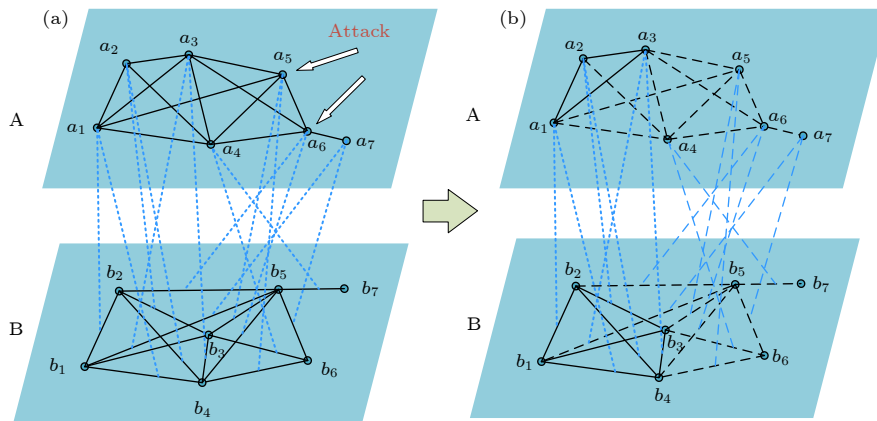


图 2 二元耦合网络模型及其级联失效示意图

Fig. 2. Schematic diagram of binary coupled network model and cascade failure.

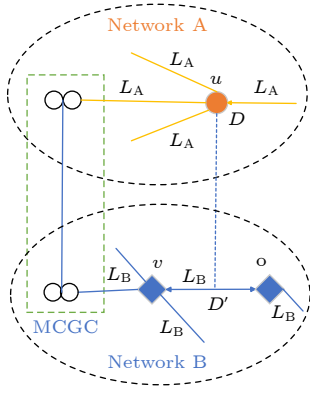

 图 3 BINNEC 中概率参数 L_A 和 L_B 的定义示意图

 Fig. 3. Schematic definition of probability parameters L_A and L_B in BINNEC.

因此, 重点在于找出 A 网络与 B 网络边依赖群之间的联系. 首先求出在网络 A 中随机选择一个节点 u , 该节点在 A 网络 GC 中的概率为

$$D_A = \sum_k P_A(k)[1 - (1 - L_A)^k], \quad (1)$$

其中 $P_A(k)$ 是随机选择的节点 u 度为 k 的概率, $(1 - L_A)^k$ 表示该节点 k 条向外延伸的边都没有连接到 GC 的概率, 那么 $1 - (1 - L_A)^k$ 则表示该节点 k 条向外延伸的边中至少有一条连接到 GC 的概率.

对于求出网络 B 中随机选择的连边存在于该网络 GC 的概率, 即存活概率 (需要区分的是这里与随机选择一条边连接到 GC 的概率不同). 本文中求出随机的连边不在巨型组件的概率, 表示该边完全失效, 即该连边的两头连接的节点均不在巨型组件当中. 如图 3 参数定义示意图, 当顺着该连边 D' 找到一个端点, 该端点具有度值为 k 的概率 $f_B(k) = P_B(k)k/\langle k \rangle$, $P_B(k)$ 表示网络 B 中随机选择的节点其度值为 k 的概率, 那么网络 B 内巨型组件不存在该节点的概率为

$$\tilde{D}_B^1 = \sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1}, \quad (2)$$

其中, $(1 - L_B)^{k'-1}$ 表示该节点除了该边以外其他 $k' - 1$ 条向外延伸的边都没有连接到 GC 的概率.

若该条边的两端点都连接一个节点, 沿着这条边的两端点都没有连接到巨型组件的概率, 即该边失效的概率:

$$\tilde{D}_B^2 = (\tilde{D}_B^1)^2 = \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2. \quad (3)$$

反之, 该条边在巨型组件内而没有失效的概率为

$$D_B^2 = 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2. \quad (4)$$

对于 BINNEC, 使用类似于序参数 S 来表示 MCGC 的大小. 将 S_A (S_B) 定义为网络 A(B) 中随机选择的节点属于 MCGC 的概率, 也是网络中最大联通片的相对大小. 网络 A 任一节点依赖于网络 B 的 m 条边, 要保证 BINNEC 中网络 A 节点存活, 首先需要考虑网络 A 随机选择的节点在该层网络巨型组件内, 概率为 $\sum_k P_A(k)[1 - (1 - L_A)^k]$. 同时, 由于网络 A 节点与另外一层网络连边存在直接联系, 因此需要考虑两层网络之间的约束条件, 该节点在网络 A 中存活的同时其对应相依关系的 m 条边也应满足存活的条件, 即网络 A 中节点对应于网络 B 中的边依赖群应满足失效比例不超过 μ , 该概率为

$$\begin{aligned} M &= \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \left[(\tilde{D}_B^2)^s \cdot (D_B^2)^{m-s} \right] \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-s}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s}$ 表示网络 B 中随机选择失效 s 条边的概率; $\left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-s}$ 为网络 B 中除去失效边 s 后依赖群存活的概率; s 表示网络 A 中节点 j 依赖群的失效边数; $\lfloor m\mu \rfloor$ 表示小于等于 $m\mu$ 的最大整数.

因此, 网络 A 随机选择的节点在 MCGC 存活的概率为

$$\begin{aligned} S_A &= D_A \cdot M = \sum_k P_A(k)[1 - (1 - L_A)^k] \\ &\quad \times \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-s}. \end{aligned} \quad (6)$$

对于网络 B, 随机选择的节点属于 MCGC 的概率与网络 A 不同, 由于网络 B 节点与网络 A 节点或边无直接相互作用关系. 因此该概率为

$$S_B = \sum_k P_B(k) \left[1 - (1 - L_B)^k \right]. \quad (7)$$

如随机攻击网络 A 中 $1 - p$ 比例的节点使其失

效, 那么网络中只剩下 p 比例的节点保留在网络中. 因此随机选择的节点存活的概率变为原来的 p 倍, 则有:

$$S_A = p \cdot D_A \cdot M = p \cdot \sum_k P_A(k) [1 - (1 - L_A)^k] \times \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-s}. \quad (8)$$

随机攻击网络 A 中 $1 - p$ 比例的节点使其失效, 由于网络 B 节点与网络 A 节点或者边无直接相互作用关系. 因此该概率不受影响:

$$S_B = \sum_k P_B(k') [1 - (1 - L_B)^{k'}]. \quad (9)$$

接下来, 推导关于 L_A 和 L_B 的自平衡方程. 图 3 中网络 A 随机选择的一条边 L_A , 其中一头端点 u 需连接到 A 网络巨型组件中, 概率为 $\sum_k f_A(k) [1 - (1 - L_A)^{k-1}]$. 既保证了该边在层内存活, 同时也需要保证该边的端点依赖 B 网络的边依赖群在失效容忍度 μ 内存活. 这要求随机选择的边既需要满足 A 网络的层内条件, 同时也应该满足两层网络的层间条件. 因此, L_A 自平衡方程为

$$L_A = \sum_k f_A(k) [1 - (1 - L_A)^{k-1}] \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \times \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-s}, \quad (10)$$

式中, $f_A(k)$ 和 $f_B(k')$ 表示网络 A 和网络 B 随机选择的边找到 GC 的节点, 其度值分布为 k 和 k' 的概率.

如果通过在网络 A 中随机移除 $1 - p$ 比例的节点, 使该网络中随机保留 p 比例的节点, 那么随机选择的一条边连接 MCGC 的概率变为

$$L_A = p \cdot \sum_k f_A(k) [1 - (1 - L_A)^{k-1}] \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \times \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-s}. \quad (11)$$

网络 B 中 L_B 的自平衡方程与网络 A 中 L_A 的

自平衡方程类似, 同样需要满足层内条件和层间条件. 首先, 从网络 B 中随机选择一条边连接到 GC 的概率为

$$D_B^1 = 1 - \tilde{D}_B^1 = \sum_k f_B(k') [1 - (1 - L_B)^{k'-1}]. \quad (12)$$

考虑到网络 B 中这条随机选择的边与网络 A 节点存在直接依赖关系, 为保证该边不失效, 那么其依赖的网络 A 节点应该同时存活. 从网络 A 中随机选择一个节点在巨型组件中的概率为 $\sum_k P_A(k) [1 - (1 - L_A)^k]$, 该网络 A 节点同时依赖于网络 B 中除了该条依赖边的其他 $m - 1$ 条随机依赖的边, 要求网络 B 这 $m - 1$ 条依赖边在失效容忍度 μ 内存活, 网络 A 中该节点才能存活. 网络 B 中一条随机选择的边存活的概率为 D_B^2 . 由此, 可以写出 L_B 的自平衡方程为

$$L_B = \sum_k f_B(k') [1 - (1 - L_B)^{k'-1}] \times \sum_k P_A(k) [1 - (1 - L_A)^k] \times \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m-1}{s} \cdot \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-1-s}. \quad (13)$$

如果随机攻击网络 A 中 $1 - p$ 比例的节点使之失效, 那么网络 A 中仅剩余 p 比例的节点, 此时:

$$L_B = \sum_k f_B(k') [1 - (1 - L_B)^{k'-1}] \cdot p \times \sum_k P_A(k) [1 - (1 - L_A)^k] \times \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m-1}{s} \cdot \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^{2s} \times \left\{ 1 - \left[\sum_{k'} f_B(k') (1 - L_B)^{k'-1} \right]^2 \right\}^{m-1-s}. \quad (14)$$

在改变两层网络的平均度使 m 取得不同的值, 即网络 A 节点全部依赖于 B 网络 m 条边, 同时给定保留比例参数 p 和失效容忍度 μ , 可以联立 (11) 式和 (14) 式求解方程, 得到相应 L_A 和 L_B 的值, 代入 (8) 式和 (9) 式分别求出网络中 S_A 和 S_B 的值.

通过分析 S_A 和 S_B 与 p 的关系, 得到 BINNEC 网络的渗流行为, 即其相变类型和相变阈值 p_c . 为了具体得到网络发生渗流行为时的关键阈值 p_c , 将方程转换为

$$\begin{cases} L_A = F_1(p, L_B, m), \\ L_B = F_2(p, L_A, m). \end{cases} \quad (15)$$

如果系统发生不连续相变, 即为一阶相变阈值点 p_c^1 , 则在 $p_c = p_c^1$ 处, $L_A = F_1(p, L_B, m)$ 和 $L_B = F_2(p, L_A, m)$ 所表示的曲线正好相切, 即:

$$\frac{\partial F_1(p_c^1, L_B, m)}{\partial L_B} \cdot \frac{\partial F_2(p_c^1, L_A, m)}{\partial L_A} = 1. \quad (16)$$

通过 (16) 式可以得到系统非连续相变关键阈值 p_c^1 .

如果系统发生的是连续相变, 即为二阶相变阈值点 p_c^2 . 为求得网络的相变阈值点, 将 $L_A \rightarrow 0$ 代入 (11) 式求得 L_B^0 , 继续将求得的 L_B^0 和 $L_A \rightarrow 0$ 代入 (14) 式即可得到关键阈值 p_c^2 的解.

4 理论和仿真分析

第 3 节推导出了二元耦合网络的理论公式, 下面假设二元耦合网络中子网络 A 和子网络 B 的节点数目均为 $N = 10^5$, 平均度相同. 将该理论分析框架应用于 3 种经典的网络结构, 即随机规则网络 (RR)、随机网络 (ER) 和无标度网络 (SF), 验证上述理论的正确性并且进一步分析系统的相变行为及其鲁棒性.

4.1 RR BINNEC 结果分析

假设网络 A 和网络 B 平均度相同, 即 $\langle k_A \rangle = \langle k_B \rangle = \langle k \rangle$. 由网络性质可知 $P_A(k) = 1$, $P_B(k) = 1$, 将这些公式分别代入 (11) 式和 (14) 式, 可得到辅助参量 L_A 和 L_B 的自平衡方程式:

$$\begin{aligned} L_A &= p \cdot \left[1 - (1 - L_A)^{\langle k \rangle - 1} \right] \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \\ &\quad \times \left[(1 - L_B)^{2(\langle k \rangle - 1)} \right]^s \\ &\quad \times \left[1 - (1 - L_B)^{2(\langle k \rangle - 1)} \right]^{m-s}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} L_B &= \left[1 - (1 - L_B)^{\langle k \rangle - 1} \right] \cdot p \cdot \left[1 - (1 - L_A)^{\langle k \rangle} \right] \\ &\quad \times \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m-1}{s} \cdot \left[(1 - L_B)^{2(\langle k \rangle - 1)} \right]^s \\ &\quad \times \left[1 - (1 - L_B)^{2(\langle k \rangle - 1)} \right]^{m-1-s}. \end{aligned} \quad (18)$$

根据 (8) 式和 (9) 式, 可以得到网络 A 和 B 的最大巨型组件 S_A 和 S_B 的方程式:

$$\begin{aligned} S_A &= p \cdot \left[1 - (1 - L_A)^k \right] \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \\ &\quad \times \left[(1 - L_B)^{2(\langle k \rangle - 1)} \right]^s \\ &\quad \times \left[1 - (1 - L_B)^{2(\langle k \rangle - 1)} \right]^{m-s}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$S_B = \left[1 - (1 - L_B)^{\langle k \rangle - 1} \right]. \quad (20)$$

在随机攻击 A 网络 $1 - p$ 比例的节点下, 给定参数 p , m 和不同的失效容忍度 μ 代入 (17) 式和 (18) 式, 得到辅助参量 L_A 和 L_B 的值, 接着代入 (19) 式和 (20) 式得到网络 A 和 B 存活的最大巨型组件 S_A 和 S_B 与 p 的关系如图 4 所示. 图中不同颜色实线代表不同边依赖群 m 下的理论计算结果, 不同颜色符号代表不同 m 值下计算机仿真结果. 图中可以很明显看出理论与仿真完全吻合, 说明了理论分析的正确性.

图 4(a), (b) 为 RR BINNEC 在 $\mu \in [0, 1/m)$ (表示网络 A 节点的边依赖群只要失效一条边, 则该节点对应失效的情况) 范围内 S_A 和 S_B 的大小图. 通过比较, 在相同的失效容忍度 μ 前提下, 网络 A 和网络 B 的渗流阈值与依赖群规模 m 成反比, 即网络 A 节点依赖群规模 m 越大, 网络鲁棒性越强.

通过纵向比较图 4(a), (c) 或图 4(b), (d), 面对失效容忍度 μ 在两种极端的情况下 (即网络 A 节点的边依赖群只要失效一边, 则对应依赖的节点失效; 网络 A 节点的边依赖群全部失效, 则对应依赖节点才失效), 失效容忍度 μ 越大, 其对应的渗流阈值越小, 即网络鲁棒性越强.

图 5(a) 中图例 $m2-0$ 表示依赖群规模 $m = 2$ 时, 网络 A 节点的失效容忍能力不足以容忍任意一条边失效, 即边依赖群中任何一条边失效时, 则该节点失效; 同样类似的 $m2-1$ 表示依赖群规模 $m = 2$ 时, 网络 A 节点的失效容忍能力可以至多容忍 1 条边失效, 即边依赖群中任意 2 条及以上边失效时, 则该节点失效. 类似的图 5(b) 中图例定义也是如此.

由图 5 清晰可知, 对于边依赖群规模 $m = 2$ 或者 $m = 3$ 的网络, 改变依赖群的失效容忍度 μ , 两个子网络的一阶相变点始终一样, 表明网络 A 和网络 B 渗流阈值一致性不受失效容忍度 μ 的影响. 不同的是随着初始攻击比例增大, 网络 A 的最大联通片几乎随着攻击节点比例 $1 - p$ 成线性相关减

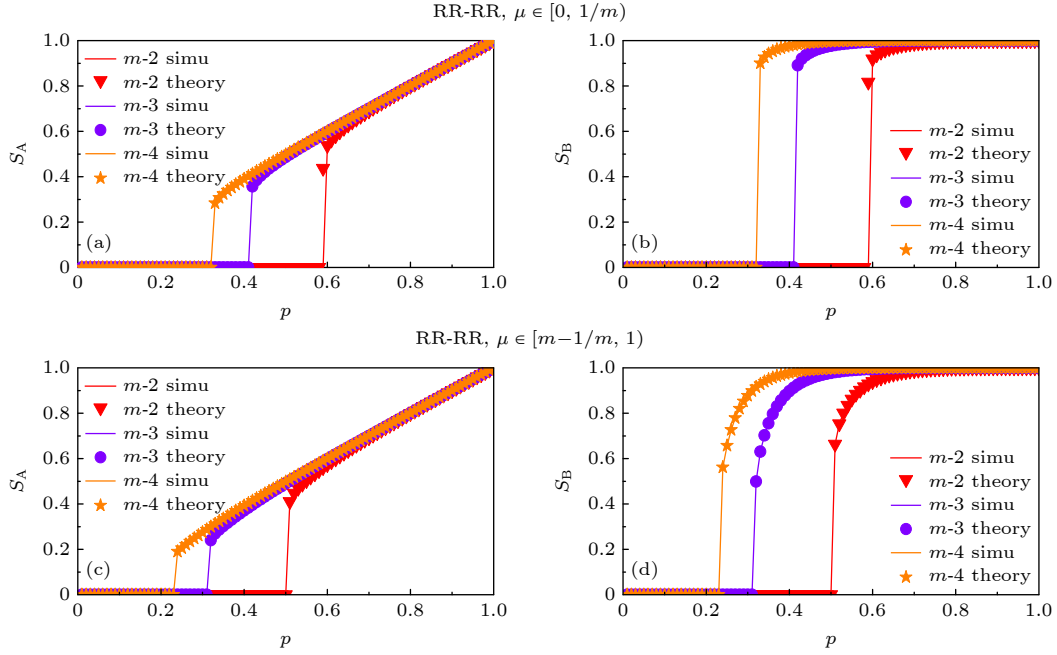

 图 4 RR BINNEC 在极端 μ 值和不同 m 时, S_A 和 S_B 与 p 的关系图

 Fig. 4. Plots of S_A and S_B versus p for the RR BINNEC at extreme μ values and at different m .

小; 而网络 B 最大联通片在一个比较大的值减小, p 接近一阶相变点 p_c^1 时才突变为零。

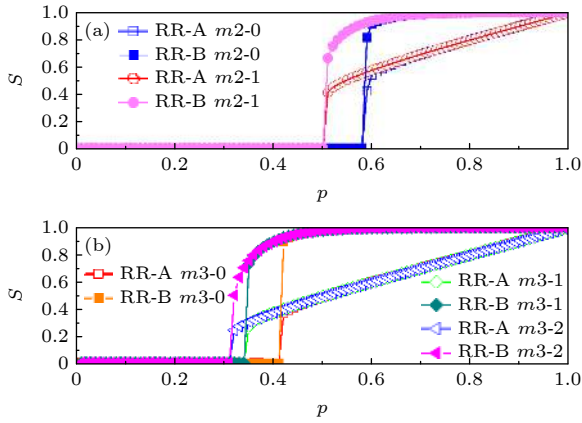

 图 5 RR BINNEC 在不同 m 和 μ 时 S_A 和 S_B 与 p 的关系对比图

 Fig. 5. Comparison chart of S_A and S_B versus p for the RR BINNEC at different μ and m .

4.2 ER BINNEC 结果分析

假设网络 A 和网络 B 的平均度分别为 $\langle k_A \rangle$ 和 $\langle k_B \rangle$, 则 ER 网络的度分布分别为

$$\begin{cases} P_A(k) = \frac{\langle k_A \rangle^k}{k!} e^{-\langle k_A \rangle}, \\ P_B(k) = \frac{\langle k_B \rangle^k}{k!} e^{-\langle k_B \rangle}. \end{cases} \quad (21)$$

将上述代入 (11) 式和 (14) 式, 可得到辅助参量 L_A 和 L_B 的自平衡方程式:

$$L_A = p \cdot \left(1 - e^{-\langle k_A \rangle L_A}\right) \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \times \left(e^{-2\langle k_B \rangle L_B}\right)^s \left(1 - e^{-2\langle k_A \rangle L_B}\right)^{m-s}, \quad (22)$$

$$L_B = \left(1 - e^{-\langle k_B \rangle L_B}\right) \cdot p \cdot \left(1 - e^{-\langle k_A \rangle L_A}\right) \times \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m-1}{s} \cdot \left(e^{-2\langle k_B \rangle L_B}\right)^s \times \left(1 - e^{-2\langle k_B \rangle L_B}\right)^{m-1-s}. \quad (23)$$

根据 (8) 式和 (9) 式, 可以得到网络 A 和 B 的最大巨型组件 S_A 和 S_B 的方程式:

$$S_A = p \cdot \left(1 - e^{-\langle k_A \rangle L_A}\right) \cdot \sum_{s=0}^{\lfloor m\mu \rfloor} \binom{m}{s} \times \left(e^{-2\langle k_B \rangle L_B}\right)^s \left(1 - e^{-2\langle k_B \rangle L_B}\right)^{m-s}, \quad (24)$$

$$S_B = \left(1 - e^{-\langle k_B \rangle L_B}\right). \quad (25)$$

为了具体得到网络发生渗流行为时的关键阈值 p_c , (22) 式和 (23) 式可以表示为

$$\begin{cases} L_A = F_1(p, L_B, m, \mu), \\ L_B = F_2(p, L_A, m, \mu). \end{cases} \quad (26)$$

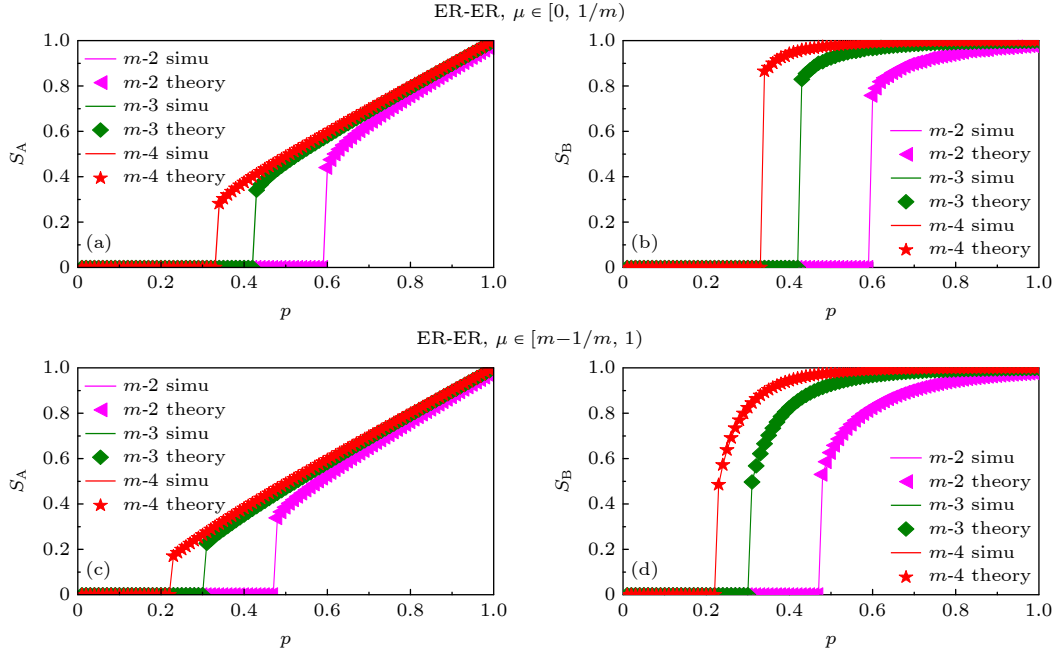

 图 6 ER BINNEC 在极端 μ 值和不同 m 时, S_A 和 S_B 与 p 的关系图

 Fig. 6. Plots of S_A and S_B versus p for the ER BINNEC at extreme μ values and at different m .

对于给定的依赖群规模 m 和失效容忍度 μ , 根据 m 和 $\langle k \rangle$ 之间的关系. 如果系统发生不连续相变, 即为一阶相变阈值点 p_c^1 , 则在 $p_c = p_c^1$ 处, $L_A = F_1(p, L_B)$ 和 $L_B = F_2(p, L_A)$ 所表示的曲线正好相切, 即:

$$1 = \frac{\partial F_1(p, L_B)}{\partial L_B} \cdot \frac{\partial F_2(p, L_A)}{\partial L_A} \Big|_{p=p_c^1}. \quad (27)$$

通过 (27) 式可以求得一组解 p_c^1 , 即对应网络一阶相变的情况.

图 6 为 ER BINNEC 在极端值 μ 和不同 m 时, S_A 和 S_B 与 p 的关系图, 其中网络节点规模 $N = 10^5$, 结果为重复 30 次的平均值, 符号代表仿真分析结果, 实线表示理论分析结果, 可以看出理论分析结果与仿真分析结果完全吻合, 再次验证了本文理论分析框架的正确性. 此外, ER BINNEC 在 $\mu \in [0, 1/m)$ 和 $\mu \in [m-1/m, 1)$ 两种极端情况下, 即网络 A 节点对应边依赖群失效一边, 则对应依赖的节点失效; 网络 A 节点对应边依赖群全部失效, 则对应依赖节点才失效. 通过对比分析, 无论失效容忍度 μ 在哪种情况下, 网络节点对应的依赖群规模越大, 两个子网网络 A 和 B 的渗流阈值越小, 即网络鲁棒性越强.

图 7 给出了依赖群规模 $m = 2$ 和 $m = 3$ 时, 失效容忍度在 $\mu \in [0, 1)$ 范围内, 网络 A 和网络 B 的

渗流阈值对比. 由图 7(a), (b) 可知依赖群规模 $m = 2, 3$ 时, 节点的边依赖群能够容忍不同的边失效, 随着可容忍失效边增加, 网络渗流阈值均逐渐减小, 意味着网络抵抗级联失效的能力增强, 这点结论可以很好的从现实角度被理解.

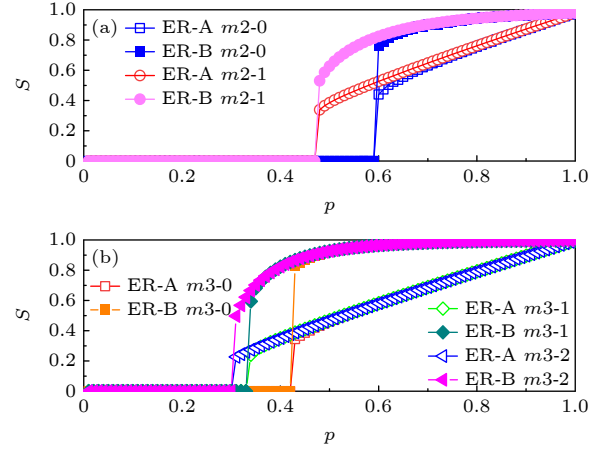

 图 7 ER BINNEC 在不同 m 和 μ 时 S_A 和 S_B 与 p 的关系对比图

 Fig. 7. Comparison chart of S_A and S_B versus p for the ER BINNEC at different μ and m .

4.3 SF BINNEC 结果分析

根据文献 [20] 无标度网络的度分布可以被描述为

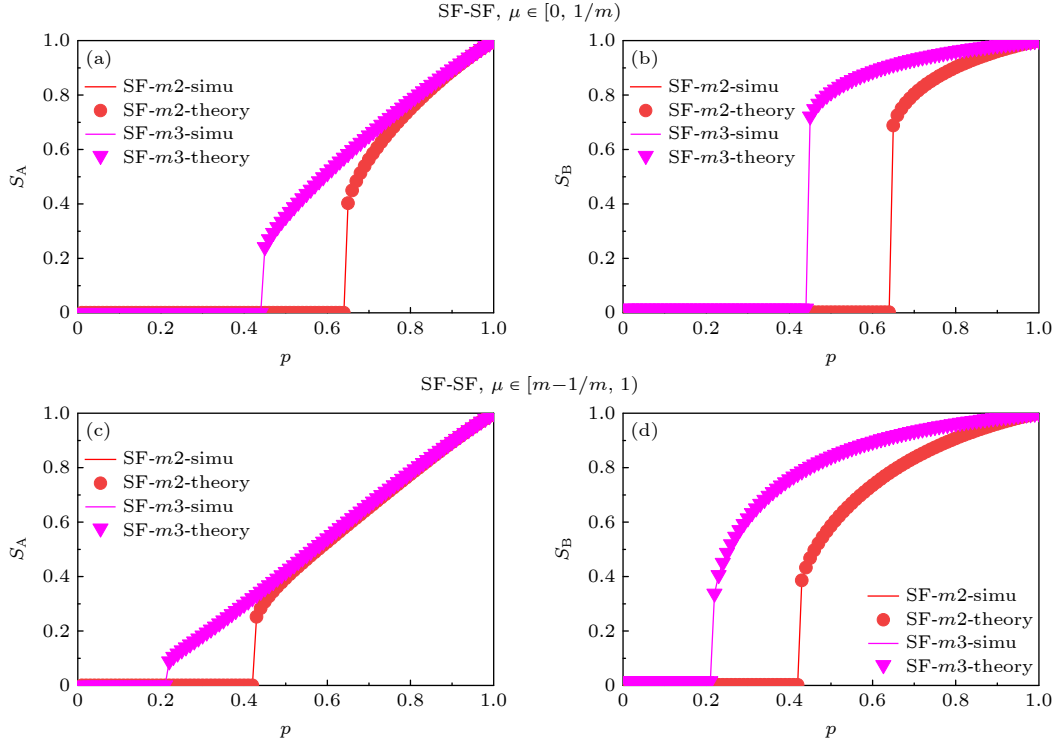

 图 8 SF BINNEC 在极端 μ 值和不同 m 时, S_A 和 S_B 与 p 的关系图

Fig. 8. Plots of S_A and S_B versus p for the SF BINNEC at extreme μ values and at different m .

$$P_A(k) = P_B(k) = \frac{\sum_{k_{\min}}^{k_{\max}} (k+1)^{1-\lambda} - k^{1-\lambda}}{(k_{\max}+1)^{1-\lambda} - (k_{\min}+1)^{1-\lambda}}. \quad (28)$$

假设式中 $k_{\min} = 2$, $k_{\max} = 70$, $\lambda = 2.7$ 或 $\lambda = 2.1$, 将这些参数代入 (8) 式—(14) 式和 (28) 式, 采用图解法或数值分析法求得无标度网络一阶相变的关键阈值 p_c^1 .

由图 8 可以看出, 在 SF BINNEC 对于不同的依赖群规模 $m = 2$ 和 $m = 3$, 随着依赖群规模由 2 到 3, 网络 A 和 B 的渗流阈值均变小, 即网络的鲁棒性增强.

图 9(a) 表示在 $\lambda = 2.716$ 、平均度 $\langle k \rangle = 4$ 、依赖群规模 $m = 2$, 对应不同 μ 值下, 两个子网络的最大巨型组件 S 与 p 的关系图; 图 9(b) 表示在 $\lambda = 2.1521$ 、平均度 $\langle k \rangle = 6$ 、依赖群规模 $m = 3$, 对应不同 μ 值, 两个子网络的最大巨型组件 S 与 p 的关系图. 由图 9 可知 $m = 2, 3$ 时, 随着可容忍失效边增加, 网络渗流阈值明显减小, 网络鲁棒性显著增强, 这点结论同 ER BINNEC 一样.

通过上述 RR, ER, SF 网络的分析. 为了进一步直观分析依赖群规模 m 和失效容忍度对网络鲁

棒性的影响. 从 RR, ER, SF 三种网络中取出 ER-ER 网络进行分析, 图 10 为网络依赖群规模 m 分别取 2, 3, 4 和 5 时网络 A 的一阶相变阈值 p_c^1 与 μ 的关系图. 图中不同颜色的实线分别代表不同的依赖群规模 m . 考虑到网络 B 中失效的连边必须为整数, 因此对 $m\mu$ 进行向下取整操作, 从而网络的一阶相变阈值在 $m\mu$ 非整数范围内为直线, $m\mu$ 整数时呈现阶梯式下降现象.

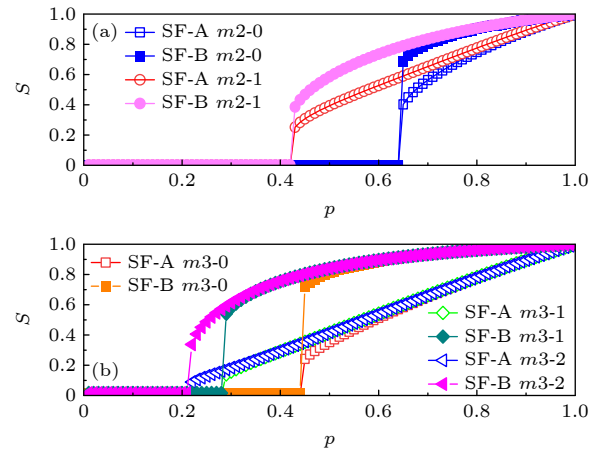

 图 9 SF BINNEC 不同 m 和其对对应不同 μ 时, S_A 和 S_B 与 p 的对比图

Fig. 9. Comparison chart of S_A and S_B versus p for the SF BINNEC at different μ and m .

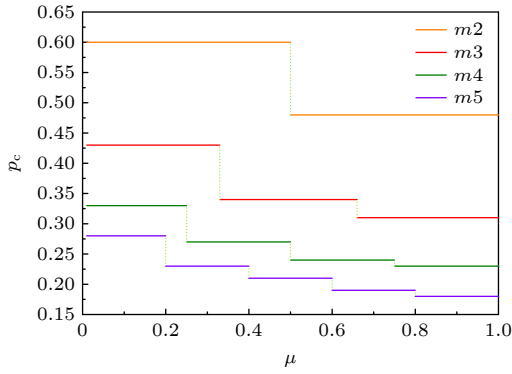


图 10 依赖群规模 m 取不同值时, p_c 与 μ 的关系图
Fig. 10. Plot of p_c versus μ for different dependency group sizes m .

图 10 中网络在不同的依赖群下, 均发生一阶相变. 当依赖群规模 m 一定时, 随着参数 μ 的逐渐增大, 网络 A 和网络 B 的一阶相变阈值呈现出阶梯状的降低趋势, 即系统的鲁棒性随着参数 μ 的增大而增大. 这一结论可以很好的理解, 当网络 A 节点的边依赖群规模一定时, 网络 A 节点的失效容忍度 μ 越大意味着网络该节点越不容易失效, 系统鲁棒性也就越强.

由图 10 明显可以看出 m_2 , m_3 , m_4 和 m_5 面对不同的参数 μ 时, 它们之间的渗流阈值始终是逐级降低, 所以当失效容忍度 μ 一定时, 网络 A 和 B 的一阶相变阈值随着依赖群 m 增大而逐渐降低, 即系统鲁棒性随着依赖规模的增大而增强. 这一结论可以理解为, 网络 A 的节点失效容忍度 μ 一定时, 该节点的边依赖群规模 m 越大, 一方面导致 $m\mu$ 变大即容忍该节点失效的能力变强, 另外一方面该节点的边依赖群规模的增大, 可以使失效组合增多, 同样可以降低该节点相依失效的概率.

5 度分布的影响

网络的度分布在一定程度上反映了其自身拓扑结构, 度分布越宽意味着节点的度数多样性, 即大多数节点的度数较低但同时存在少数度数非常高的节点. 三种经典网络结构 (RR 网络、ER 网络和无标度网络) 因存在不同的大度节点, 从而使得度分布逐渐变宽. 为进一步分析两层网络的度分布对 BINNEC 网络的鲁棒性影响, 假设不同 BINNEC 网络的平均度都为 6, 即 RR 网络、ER 网络、 $\lambda = 2.15$ 的 SF 网络的平均度均相同, 网络的依赖群规模都为 $m = 3$, 通过理论分析和仿真可以得到图 11.

由图 11 可知, 在失效容忍度 $\mu \in [0, 1/3)$ 时, 即网络 A 节点不允许边依赖群有边失效, $p_{c-RR} = 0.42 < p_{c-ER} = 0.43 < p_{c-SF} = 0.45$, 一阶相变阈值随着度分布越宽变得越大, 意味着鲁棒性变弱. 相反, 对于失效容忍度在 $\mu \in [1/3, 1)$ 时, 即网络 A 节点存活条件为至多可以容忍 $n_1 = 1$ 和 $n_2 = 2$ 条连边失效下, 网络的一阶相变阈值都为 $p_{c-RR} > p_{c-ER} > p_{c-SF}$, 意味着随着度分布变宽网络的鲁棒性反而变强.

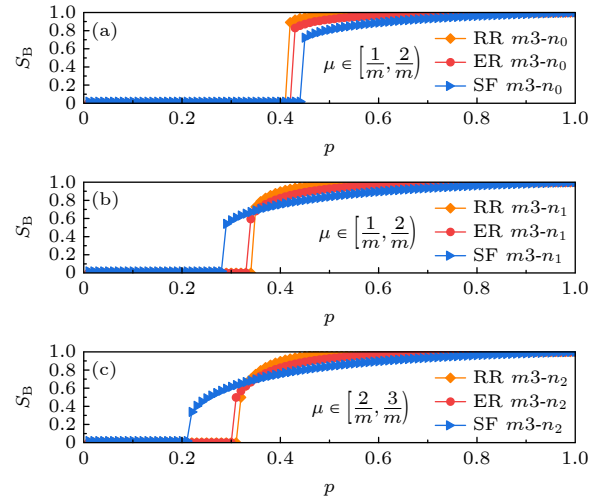


图 11 不同失效边 n_i 下 S_B 与 p 的关系
Fig. 11. Plot of S_B versus p at different failure edges n_i .

该结论可以这样理解, 当网络 A 节点的失效容忍度不足以容忍边依赖群一条边失效时, 意味着边依赖群有一条边失效, 则该节点便失效. 因此网络度分布越宽, 那么网络 A 存在更多度大的节点依赖网络 B 连边, 边依赖群中一条边失效便可导致节点失效, 网络越来越脆弱. 而在网络 A 中节点的失效容忍度可以容忍边依赖群至少失效一条边时, 随着度分布变宽, 网络存在越来越多度大的节点不容易失效, 网络 B 存活的边也越多, 意味着依赖群数量也越多, 网络节点越不容易失效, 网络的鲁棒性变强.

6 结 论

由于现实世界中网络之间的相互依赖关系比较复杂, 不只是节点和节点之间、边和边之间单一的相互依赖关系, 也存在节点和边之间相互依赖的情况. 本文提出节点和边耦合的二元相互依赖网络 (BINNEC), 研究考虑节点依赖于数条边的情况. 通过数值仿真研究和理论分析发现, RR 网络、ER 网络和无标度网络构成的 BINNEC 在面对随

机失效下, 均表现出一阶相变行为; 随着网络依赖群规模 m 增大, 网络的一阶相变阈值减小, 即网络鲁棒性变强; 在网络边依赖群规模 m 一定时, 失效容忍度 μ 增大意味着容忍边失效的能力增强, 抵抗级联失效的能力也就越强; 在网络 $\langle k \rangle$, m 和 μ 确定的条件下, 网络 A 节点的失效容忍度不足以容忍边依赖群一条边失效时, 随着网络度分布变宽, 网络的鲁棒性变弱; 当网络 A 节点的失效容忍度可以容忍边依赖群至少一条边失效时, 随着网络度分布变宽, 网络的鲁棒性反而增强.

参考文献

- [1] Crucitti P, Latora V, Marchiori M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 045104
- [2] Mirzazoleiman B, Babaei M, Jalili M, Safari M 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046114
- [3] Wang J W, Rong L L, Zhang L, Zhang Z Z 2008 *Physica A* **387** 6671
- [4] Panzieri S, Setola R 2008 *Int. J. Model. Identif Control* **3** 69
- [5] Adenso-Díaz B, Mar-Ortiz J, Lozano S 2018 *Int. J. Prod. Res.* **56** 5104
- [6] Yao H G, Xiao H H, Wei W 2022 *Discret. Dyn. Nat. Soc.* **23** 49523
- [7] Rosato V, Issacharoff L, Tiriticco F, Meloni S, Porcellinins S D, Setola R 2008 *Int. J. Crit. Infrastruct.* **4** 63
- [8] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S 2010 *Nature* **464** 1025
- [9] Hu B, Li F, Zhou H S 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 128901
- [10] Mizutaka S, Yakubo K 2015 *Phys. Rev. E* **92** 012814
- [11] Li J, Wu J, Li Y, Deng H Z, Tan Y J 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 058904
- [12] Parshani R, Buldyrev S V, Havlin S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 048701
- [13] Dong G G, Gao J X, Tian L X, Du R J, He Y H 2012 *Phys. Rev. E* **85** 016112
- [14] Gao J X, Buldyrev S V, Havlin S, Stanley E 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195701
- [15] Jiang W, Liu R, Jia C 2020 *Complexity* **2020** 3578736
- [16] Zhang H, Zhou J, Zou Y, Tan M, Xiao G X, Stanley H Z 2020 *Phys. Rev. E* **101** 022314
- [17] Dong G, Chen Y, Wang F, Du R J, Tian L X, Stanley H E 2019 *Chaos* **29** 073107
- [18] Han W T, Yi P 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 078902 (in Chinese) [韩伟涛, 伊鹏 2019 物理学报 **68** 078902]
- [19] Wang Z X, Zhou D, Hu Y Q 2018 *Phys. Rev. E* **97** 032306
- [20] Gao Y L, Chen S M, Zhou J, Stanley H E, Gao J 2021 *Physica A* **580** 126136
- [21] Gao Y L, Yu H B, Zhou J, Zhou Y Z, Chen S M 2023 *Chin. Phys. B* **32** 098902
- [22] Zhao Y Y, Zhou J, Zou Y, Guan S G, Gao Y L 2022 *Chaos Solitons Fractals* **156** 111819
- [23] Xie Y F, Sun S W, Wang L, Xia C Y 2023 *Phys. Lett. A* **483** 129063

Analysis of seepage behaviour in binary two-layer coupled networks^{*}

Gao Yan-Li¹⁾ Xu Wei-Nan¹⁾ Zhou Jie²⁾ Chen Shi-Ming^{1)†}

1) (School of Electrical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

2) (School of Physics and Electronic Science, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

(Received 1 April 2024; revised manuscript received 14 June 2024)

Abstract

Existing research on interdependent networks defines network functionality as being entirely on nodes or on edges, which means interdependence between nodes and nodes, or interdependence between edges and edges. However, the reality is not characterized solely by interdependence between functionalities of individual elements, which means that it is not entirely a single-element coupled network. In some cases, nodes and edges are interdependent. Considering this reality, a binary interdependent network model with node and edge coupling (BINNEC), where both nodes and edges are interdependent, is proposed in this work. In this model, nodes in network A randomly depend on multiple edges in network B, forming edge-dependent clusters. Additionally, a failure tolerance parameter, denoted as μ , is set for these edge-dependent clusters. When the failure rate of an edge-dependent cluster exceeds μ , the failure of the nodes in network A that depends on it, will happen. Based on the self-balancing probability method, a theoretical analysis framework is established. Through computer simulation verification of BINNEC under three classical network structures, the model's phase transition behavior and critical thresholds in the face of random attacks are analyzed. The results reveal that BINNEC under three network structures is as fragile as a single-element coupled network, exhibiting a first-order phase transition behavior. As the size of edge-dependent cluster m increases, network robustness is enhanced. Moreover, with a constant size of edge-dependent cluster, a larger tolerance for node failure μ leads to stronger network robustness. Finally, this research reveals that under the same conditions of m and μ , when the tolerance for node failure μ is insufficient to withstand the failure of a single edge, the degree distribution widens, and network robustness weakens. However, when the tolerance for node failure is sufficient to withstand the failure of at least one edge, the network robustness actually strengthens as the degree distribution increases. These findings provide a theoretical basis for studying such binary coupled models and also for guiding the secure design of real-world networks.

Keywords: interdependent networks, binary coupling, failure tolerance, robustness

PACS: 89.75.-k, 89.75.Fb

DOI: 10.7498/aps.73.20240454

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 62341306, 12075088, 62263011) and the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No. 20232BAB202033).

[†] Corresponding author. E-mail: shmchen@ecjtu.jx.cn



二元双层耦合网络渗流行为分析

高彦丽 徐维南 周杰 陈世明

Analysis of seepage behaviour in binary two-layer coupled networks

Gao Yan-Li Xu Wei-Nan Zhou Jie Chen Shi-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 168901 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240454

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240454>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

具有弱依赖组的复杂网络上的级联失效

Cascading failures on complex networks with weak interdependency groups

物理学报. 2022, 71(11): 110505 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210850>

高压IGBT雪崩鲁棒性的研究

Study on avalanche ruggedness of high voltage IGBTs

物理学报. 2023, 72(7): 078501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222248>

基于时间序列的网络失效模型

Network failure model based on time series

物理学报. 2022, 71(8): 088901 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212106>

连续变量Einstein-Podolsky-Rosen纠缠态光场在光纤信道中分发时纠缠的鲁棒性

Entanglement robustness of continuous variable Einstein-Podolsky-Rosen-entangled state distributed over optical fiber channel

物理学报. 2022, 71(9): 094202 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212380>

三量子比特Dicke模型中的两体和三体纠缠动力学

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model

物理学报. 2021, 70(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602>

制备-测量量子比特系统的自测试标准

Self-testing criteria for preparing-measuring qubit system

物理学报. 2023, 72(10): 100303 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222431>