

一维非厄米十字晶格中的退局域-局域转变*

刘辉¹⁾ 陆展鹏¹⁾ 徐志浩^{1)2)†}

1) (山西大学理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

2) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2024年4月12日收到; 2024年5月8日收到修改稿)

本文研究了在具有平带的一维非厄米十字晶格中引入准周期调制所诱导的退局域-局域的转变. 通过解析推导和数值分析分形维度和能谱的实复转变, 发现在非厄米单平带十字晶格中引入对称的准周期调制会引起扩展相到局域相的转变, 而反对称准周期调制能够诱导出精确的迁移率边. 在非厄米全平带十字晶格中, 对称的准周期调制情况下, 系统一直处于局域相, 当引入反对称的准周期调制时, 系统具有从多重分形相到局域相的转变. 该研究结果为非厄米平带的局域化性质研究提供了参考.

关键词: 平带系统, 非厄米系统, 无序, 局域化**PACS:** 72.80.Ng, 72.20.Ee, 72.15.Rn**DOI:** 10.7498/aps.73.20240510

1 引言

局域化现象的研究是凝聚态物理中最为重要且古老的问题之一. 早在 1958 年, Anderson^[1] 首次提出了安德森局域化现象, 即物质波在无序环境中出现的局域化行为. 这一现象随后在冷原子^[2]、声波^[3]、微波腔^[4] 等多个平台中被观测到. 根据标度理论, 在一维和二维系统中引入任意小的随机无序都将导致安德森局域化的发生, 而在三维随机无序系统中, 存在一个扩展态到局域态的能量转变 E_c , 被称为迁移率边^[5]. 迁移率边对理解系统许多行为起着至关重要的作用, 如导电性^[6] 和热电响应^[7] 等. 在高维系统中研究迁移率边有很大的困难, 人们把目光放到一维和二维系统中. 在低维系统中, 寻找具有精确解迁移率边的系统可以加深对系统局域化性质的理解. 不同于传统的引入随机无序的模型, 具有准周期调制的一维 Aubry-André (AA)

模型在有限的在位势振幅下表现出金属-绝缘体转变^[8], 其所有本征态从扩展态转变到局域态, 这是由其自对偶性质所引起的^[9]. 在此基础上, 通过引入能量相关的自对偶机制或者利用数学工具, 在低维系统中可以设计出具有精确迁移率边的各种广义 AA 模型. 例如, 具有精确迁移率边的二维 AA 模型^[10], 具有长程跃迁的一维 AA 模型^[11] 和一种具有独特在位非公度调制的一维 AA 模型^[12] 等. 另一个重要的例子为具有平带的体系, 其本征态由于宏观简并性导致存在紧凑局域态 (compact localized state, CLS)^[13-15], 表现为波函数的占据被限制在有限的格点^[16], 并且平带系统可以根据 CLS 占据晶胞的个数 U 来进行分类. Flach 组^[17-20] 与 Ahmed 组^[21] 通过在厄米的平带系统中引入准周期调制来打破其宏观简并性, 实现了迁移率边的精确设计.

近年来, 非厄米系统由于展现出与厄米系统巨大的差异, 从而在实验和理论领域都引起了极大关

* 国家自然科学基金 (批准号: 12375016)、山西省基础研究计划 (批准号: 20210302123442)、北京凝聚态物理国家实验室 (批准号: 2023BNLCMPKF001) 和山西省“1331 工程”重点学科建设计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

注^[22-25]. 例如, 非厄米趋肤效应^[26-28]、体边对应的破坏以及边界条件依赖的特性等. 非厄米性和无序效应之间的结合为局域化特征带来了全新的研究思路^[29-31]. 例如, 一维的具有随机无序的非互易 Hatano Helson 模型^[29-31], 展现了扩展相到局域相的转变, 而在广义非厄米 AA 模型^[23,24]中检测到实复转变、拓扑相变和局域化转变的一致性. 非厄米效应在无序系统中对局域化转变的影响, 引起了人们极大的兴趣, 促使我们思考: 在非厄米平带系统中, 通过引入准周期调制是否可以如厄米情况下一样诱导出精确的局域化转变? 本文将研究在非厄米平带系统中引入准周期调制, 讨论不同类型的调制对平带系统的局域化行为的影响.

2 理论模型

本文研究了一个由 N 个晶胞 ($L = 2N$ 格点) 构成的一维非厄米十字晶格, 如图 1(a) 所示. 其中虚线框表示由 a 和 b 两种子格所构成的一个晶胞. J_L (J_R) 表示胞间向左 (向右) 跃迁强度, 其中 A 取“1”或者“-1”, t 表示胞内跃迁强度. 在紧束缚近似下, 系统的本征值方程为

$$E\psi_n = -\hat{V}\psi_n - \hat{T}_1\psi_{n-1} - \hat{T}_2\psi_{n+1} + \hat{\varepsilon}_n\psi_n, \quad (1)$$

其中,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} J_R & AJ_R \\ J_R & AJ_R \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} J_L & J_L \\ AJ_L & AJ_L \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$\psi_n = (a_n, b_n)^T$ 表示第 n 个晶胞的本征矢量. 非互易跃迁强度为 $J_L = Je^h$, $J_R = Je^{-h}$, 其中 J 为非厄米跃迁强度, 设为能量单位 $J = 1$, h 为虚规范势用来控制系统中非厄米效应的强弱. 哈密顿量 (1) 式中的 $\hat{\varepsilon}_n$ 为引入的准周期调制势, 选为对角矩阵 $\hat{\varepsilon}_n = \text{diag}(\varepsilon_n^a, \varepsilon_n^b)$. 本文考虑准周期调制势 ε_n^β ($\beta = \{a, b\}$) 对非厄米平带系统的影响, 定义为 $\varepsilon_n^\beta = \lambda_\beta \cos(2\pi\alpha n + \phi_\beta)$. 这里, λ_β 为准周期调制的强度, ϕ_β 是 β 依赖的相移, α 为无理数. 不失一般性, 设 $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\phi_a = 0$, 并且要求 $\lambda_a = \lambda_b = \lambda \geq 0$.

在没有无序的情况下, 非厄米十字晶格在周期边界条件下具有两条能带. 当 $A = 1$ 时, 系统的色散关系为 $E_0 = -t$, $E_1 = 4 \cos(k - ih) + t$, 其中 E_0

不依赖于波矢 k 的取值为一条平带, 而当 $A = -1$ 时, 此时系统中存在两条平带: $E_- = -\sqrt{t^2 + 4}$, $E_+ = \sqrt{t^2 + 4}$. 当 $A = 1$ 时, 系统具有一条平带和一条色散带, 并且平带 E_0 中所对应的 CLS 占据一个晶胞的两个格点^[16], 如图 1(b) 所示, 属于 $U = 1$ 类平带模型. 当 $A = -1$ 时, 系统具有两条平带, 并且两条平带所对应的 CLS 都占据两个晶胞的四个格点, 如图 1(c) 所示, 属于 $U = 2$ 类平带模型. 这里 U 表示一个 CLS 占据晶胞的个数, 可以用来对平带系统进行分类^[32]. 由于非互易跃迁的存在, 色散带中的态在开边界条件下表现出非厄米趋肤效应. 图 1(d) 展示了在开边界条件下, 色散带中全部本征值所对应波函数的密度分布 $\rho_n^{(l)} = \sum_{\beta \in \{a, b\}} |\psi_{n,\beta}^{(l)}|^2$, $\psi_{n,\beta}^{(l)}$ 表示第 l 个本征态的第 n 个晶胞中 β 格点的归一化概率振幅. 如图 1(d) 所示, 色散带中的不同态具有非厄米趋肤效应.

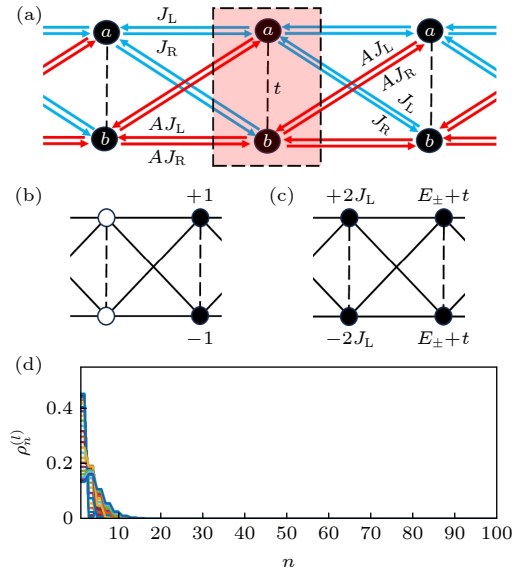


图 1 干净晶格情况 (a) 一维非厄米十字晶格示意图; (b) $U = 1$ 类非厄米十字晶格的 CLS 占据; (c) $U = 2$ 类非厄米十字晶格的 CLS 占据; (d) 开边界条件下, $U = 1$ 类十字晶格色散带中所有本征态的密度分布 $\rho_n^{(l)}$. 这里的参数选取 $h = 0.6$, $t = 2$, $L = 100$

Fig. 1. Crystalline case: (a) Schematic diagram of the one-dimensional non-Hermitian cross-stitch lattice; (b) CLS occupations of the $U = 1$ class non-Hermitian cross-stitch lattice with $A = 1$; (c) CLS occupations of the $U = 2$ class non-Hermitian cross-stitch lattice with $A = -1$; (d) density distributions $\rho_n^{(l)}$ for all the eigenstates in dispersive bands of the cross-stitch lattice under open boundary conditions. Here, $h = 0.6$, $t = 2$, $L = 100$.

对晶胞进行局域坐标变换, 将晶格旋转为 Fano 缺陷形式^[32,33], 其旋转矩阵为 \hat{U} , 定义为

$$\begin{pmatrix} p_n \\ f_n \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$\varphi_n = (p_n, f_n)^T$ 为旋转后第 n 个晶胞的本征矢量. 这一局域变换将原来的在位势 ε_n^β 变为 $\varepsilon_n^\pm = (\varepsilon_n^a \pm \varepsilon_n^b)/2$. 可以看出, 通过旋转, a 和 b 格间的调制具有显著的相关性, 本文选取两种不同情况进行讨论, 即:

$$\text{Symmetric: } \phi_b = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_n^- = 0,$$

$$\text{Antisymmetric: } \phi_b = \pi \Leftrightarrow \varepsilon_n^+ = 0. \quad (4)$$

为了表征波函数的局域化性质, 可以计算第 l 个波函数的分形维度 $D_2^{(l)} = -\frac{\ln I_2^{(l)}}{\ln L}$ [34-36], 其中 $I_2^{(l)} = \sum_{n=1}^N \sum_{\beta \in \{a,b\}} |\psi_{n,\beta}^{(l)}|^{2q}$ 为第 l 本征态的逆参与率. 对于局域态, 分形维度 $D_2^{(l)} \rightarrow 0$, 逆参与率 $I_2^{(l)}$ 为一个不依赖尺寸的有限值. 对于扩展态, 分形维度值 $D_2^{(l)} \rightarrow 1$, 逆参与率 $I_2^{(l)}$ 在热力学极限下趋近于零. 而对于中间情况, 在 $L \rightarrow \infty$ 的极限下 $D_2^{(l)} \in (0, 1)$, 此时对应于扩展但非遍历的多重分形态, 其逆参与率 $I_2^{(l)}$ 在热力学极限下趋于零. 为了进一步验证系统中多重分形的区域的存在, 定义平均逆参与率 $\text{MIPR} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_2^{(l)}$ [37]. 通过标度分析, 可以使用函数 $f(1/L) = \tilde{a} \times (1/L)^{\tilde{b}} + \tilde{c}$ 进行拟合, 得到相应的拟合参数 \tilde{a} , \tilde{b} 和 \tilde{c} . 对于完全局域化区域, $\tilde{b} \rightarrow 0$, \tilde{c} 为有限值. 对于完全扩展区域, $\tilde{b} \rightarrow 1$ 且 $\tilde{c} \rightarrow 0$. 系统处于多重分形区域时, $\tilde{b} \in (0, 1)$ 并且 $\tilde{c} \rightarrow 0$. 另外, 最近很多非厄米推广的 AA 模型被广泛研究, 人们发现波函数的局域化转变与能谱的实复转变具有一一对应的关系. 因此通过观测能谱中的实复变化也可以用来表征退局域-局域的转变 [38].

作为一个具体的例子, 本文选取周期边界条件下, $h = 0.6$ 和 $t = 2$ 进行讨论.

3 局域化性质

3.1 $U = 1$ 类十字晶格

首先考虑 $U = 1$ 类非厄米十字晶格, 即对于哈密顿量 (1) 选取 $A = 1$, 那么相应本征方程为

$$\begin{aligned} (E+t)p_n &= \varepsilon_n^+ p_n + \varepsilon_n^- f_n - 2(e^{-h} p_{n-1} + e^h p_{n+1}), \\ (E-t)f_n &= \varepsilon_n^+ f_n + \varepsilon_n^- p_n. \end{aligned} \quad (5)$$

对于准周期调制为对称的情况, 即 $\phi_b = 0$, 方程 (5) 变成:

$$\begin{aligned} (E+t)p_n &= \varepsilon_n^+ p_n - 2(e^{-h} p_{n-1} + e^h p_{n+1}), \\ (E-t)f_n &= \varepsilon_n^+ f_n. \end{aligned} \quad (6)$$

很容易看出, f_n 与 p_n 是解耦的, 此时产生了两个独立的谱: σ_p 和 σ_f . 能谱属于 σ_f 时, $E = \varepsilon_n^+ + t$, 相应的波函数都是局域的. 而能谱 σ_p 所对应的本征方程变为

$$(E+t)p_n = \lambda \cos(2\pi n \alpha) p_n - 2(e^{-h} p_{n-1} + e^h p_{n+1}). \quad (7)$$

这是一个非互易的 AA 模型 [26], 其局域化转变点为 $\lambda_{c1} = 4M$, 其中 $M = \max\{e^h, e^{-h}\}$. 可以看出, σ_p 谱具有退局域-局域转变, 但是系统中不存在迁移率边, 这一点也可以从图 2 观察到. 图 2(a) 和图 2(b) 分别展示了当 $A = 1$ 时准周期调制为对称情况下的 σ_p 中分形维度 $D_2^{(l)}$ 和能量虚部 $\ln |\text{Im}(E)|$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化情况. 由于谱 σ_f 和 σ_p 是相互独立的, 且谱 σ_f 是局域的, 图 2 省略了谱 σ_f 的部分, 仅在图中用虚线标出谱 σ_f 的边界 $[-\lambda + t, \lambda - t]$. 图 2(a) 和图 2(b) 中黑色实线对应于解析推导的退局域-局域的转变点, 它和数值结果符合得很好. 图 2(c)-(d) 分别展示了当 $\lambda = 5$ 和 $\lambda = 10$ 时, σ_p 所对应的能谱的情况. 可以看到在扩展相, 系统的能谱展现了圈状结构, 通过选取合适的能量参考点, 其相应的缠绕数为非零整数, 对应于具有非平庸的拓扑. 而系统处于局域相时, 其本征值都为实数, 相应的缠绕数为零, 对应于具有平庸的拓扑. 由此可见, 系统的局域化性质与能谱的拓扑性质有极大的关系 [39]. 这一现象在后面的例子中同样出现.

对于准周期调制为反对称情况时, 即 $\phi_b = \pi$, 方程 (5) 变成:

$$\begin{aligned} (E+t)p_n &= \varepsilon_n^- f_n - 2(e^{-h} p_{n-1} + e^h p_{n+1}), \\ (E-t)f_n &= \varepsilon_n^- p_n. \end{aligned} \quad (8)$$

因为 $\varepsilon_n^- \neq 0$, 在平带能量 $E = t$ 处有 $p_n = f_n = 0$, 即在 $E = t$ 时, 仅只有平庸态 $(p_n, f_n) = (0, 0)$ 满足方程 (8). 图 3(a) 和图 3(b) 分别展示了当 $A = 1$ 时, 准周期调制为反对称情况下的分形维度 $D_2^{(l)}$ 和能量虚部 $\ln |\text{Im}(E)|$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化情况. 图中可以清晰地观察到迁移率边的存在. 为了解析得到迁移率边, 将 p_n 用 f_n 替换,

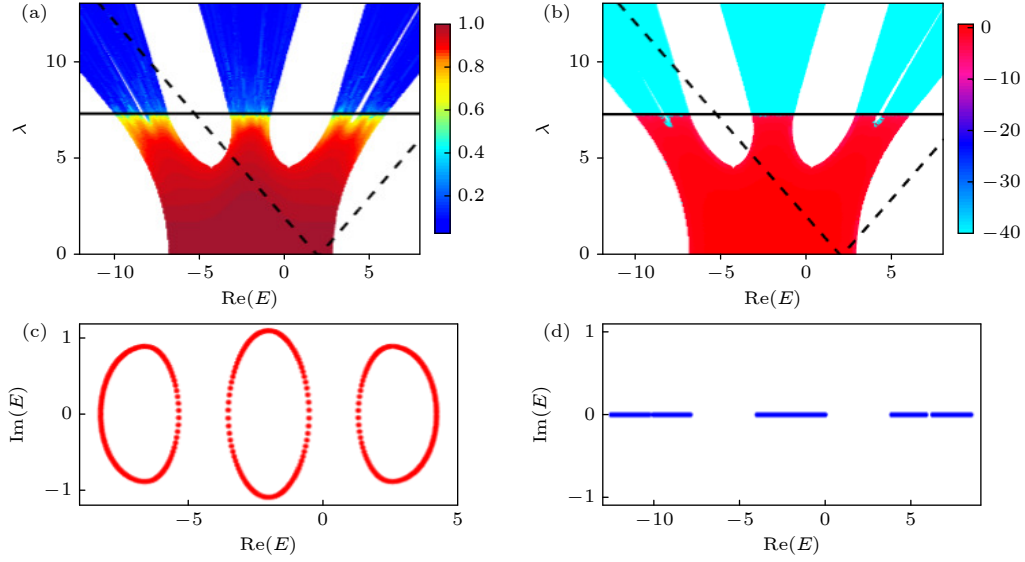


图 2 对称情况时, $U = 1$ 类非厄米十字晶格的局域化性质 (a) σ_p 谱的分形维度 $D_2^{(l)}$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化, 颜色表示分形维度 $D_2^{(l)}$ 的大小. (b) σ_p 谱的能量虚部 $\ln|\text{Im}(E)|$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化, 颜色表示 $\ln|\text{Im}(E)|$ 的大小, 实线表示扩展-局域转变, σ_f 被省略, 边界用虚线表示. (c) $\lambda = 5$ 时, σ_p 所对应的能谱. (d) $\lambda = 10$ 时, σ_p 所对应的能谱. 这里 $L = 1000$

Fig. 2. Symmetric case of the $U = 1$ class non-Hermitian cross-stitch lattice: (a) Real part of the spectrum σ_p as a function of λ , where the color denotes the value of the fractal dimension $D_2^{(l)}$. (b) $\ln|\text{Im}(E)|$ of σ_p as a function of λ and $\text{Re}(E)$, where the color denotes the value of $\ln|\text{Im}(E)|$. Black solid lines represent the delocalization-localization transition. The spectrum σ_f is omitted, but its boundaries are indicated by black dashed lines. (c) Energy spectrum of σ_p with $\lambda = 5$. (d) Energy spectrum of σ_p with $\lambda = 10$. Here, $L = 1000$.

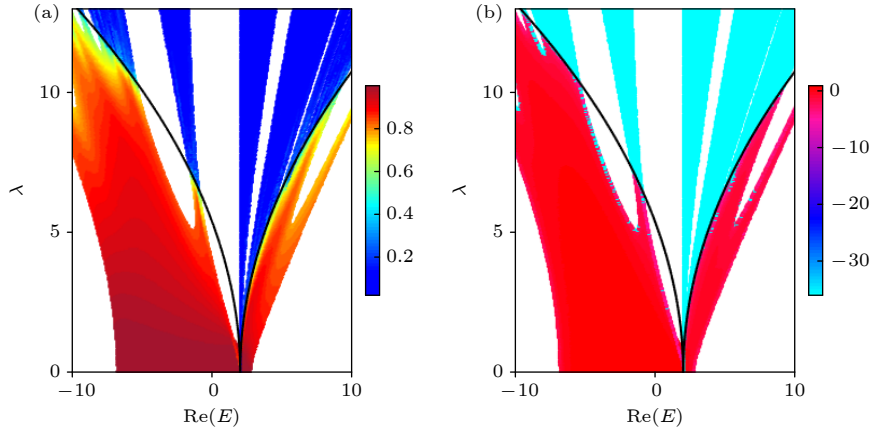


图 3 反对称情况时, $U = 1$ 类非厄米十字型晶格的局域化 (a) 分形维度 $D_2^{(l)}$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化; (b) 能量虚部 $\ln|\text{Im}(E)|$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化. 实线表示迁移率边. 这里 $L = 1000$

Fig. 3. Antisymmetric case of the $U = 1$ class non-Hermitian cross-stitch lattice: (a) $D_2^{(l)}$ of the spectrum as a function of λ , where the color denotes the value of the fractal dimension $D_2^{(l)}$; (b) $\ln|\text{Im}(E)|$ of the spectrum as a function of λ and $\text{Re}(E)$, where the color denotes the value of $\ln|\text{Im}(E)|$. The black solid lines represent the mobility edges. Here, $L = 1000$.

并代入 $\varepsilon_n^- = \lambda \cos(2\pi n\alpha)$ 得到:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{E+t}{2} - \frac{\lambda^2}{4(E-t)} \right] p_n \\ &= \frac{\lambda^2}{4(E-t)} \cos(2\pi n\alpha) p_n \\ & \quad - (e^{-h} p_{n-1} + e^h p_{n+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

这样一个非互易的 AA 模型, 其迁移率边为

$\lambda_{c2} = 2\sqrt{2|E-t|M}$. 从图 3 可以看出, 系统的局域化转变和能谱的实复转变是一致的, 并且解析的迁移率边结果与数值结果符合得很好.

3.2 $U = 2$ 类十字晶格

接下来考虑 $U = 2$ 类非厄米十字晶格, 即对于

哈密顿量 (1) 选取 $A = -1$, 相应的本征方程为

$$\begin{aligned} (E+t)p_n &= \varepsilon_n^+ p_n + \varepsilon_n^- f_n - 2e^{-h} f_{n-1}, \\ (E-t)f_n &= \varepsilon_n^+ f_n + \varepsilon_n^- p_n - 2e^h p_{n+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

当 $\phi_b = 0$ 时, 即对称调制情况, 根据方程 (10), 胞内和胞间的几何信息可以写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} \hat{V}^{(1)} &= \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{-h} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{T}_2^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2e^h & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

晶格本征方程类似于方程 (1):

$$\begin{aligned} E\varphi_n &= - \left[\hat{V}^{(1)}\varphi_n + \hat{T}_1^{(1)}\varphi_{n-1} + \hat{T}_2^{(1)}\varphi_{n+1} \right] \\ &+ \hat{\varepsilon}_n^{(1)}\varphi_n. \end{aligned} \quad (12)$$

对应的在位调制矩阵为 $\hat{\varepsilon}_n^{(1)} = \text{diag}(\varepsilon_n^+, \varepsilon_n^+)$. 考虑一个新变换, 即定义一个新的晶胞 $\tilde{\varphi}_n = (p_n, f_{n-1})$. 通过这一变换可以使 CLS 处于一个晶胞中, 相应的胞内胞间的几何信息变为

$$\begin{aligned} \hat{V}^{(2)} &= \begin{pmatrix} t & 2e^{-h} \\ 2e^h & -t \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{T}_2^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

其对应本征方程为

$$\begin{aligned} E\tilde{\varphi}_n &= - \left[\hat{V}^{(2)}\tilde{\varphi}_n + \hat{T}_1^{(2)}\tilde{\varphi}_{n-1} + \hat{T}_2^{(2)}\tilde{\varphi}_{n+1} \right] \\ &+ \hat{\varepsilon}_n^{(2)}\tilde{\varphi}_n, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\hat{\varepsilon}_n^{(2)} = \text{diag}(\varepsilon_n^+, \varepsilon_{n-1}^+)$. 很容易看到, 本征方程 (14) 中相邻晶胞之间的跃迁消失, 跃迁项仅存在于单个晶胞内部. 这表明即使存在准周期调制, 系统中所有的本征态都是局部的.

当 $\phi_b = \pi$ 时, 对应于 $U = 2$ 类十字晶格的反对称情况, 方程 (10) 变成:

$$\begin{aligned} (E+t)p_n &= \varepsilon_n^- f_n - 2e^{-h} f_{n-1}, \\ (E-t)f_n &= \varepsilon_n^- p_n - 2e^h p_{n+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

将 f_n 用 p_n 代替, 方程 (15) 变成一个非厄米的

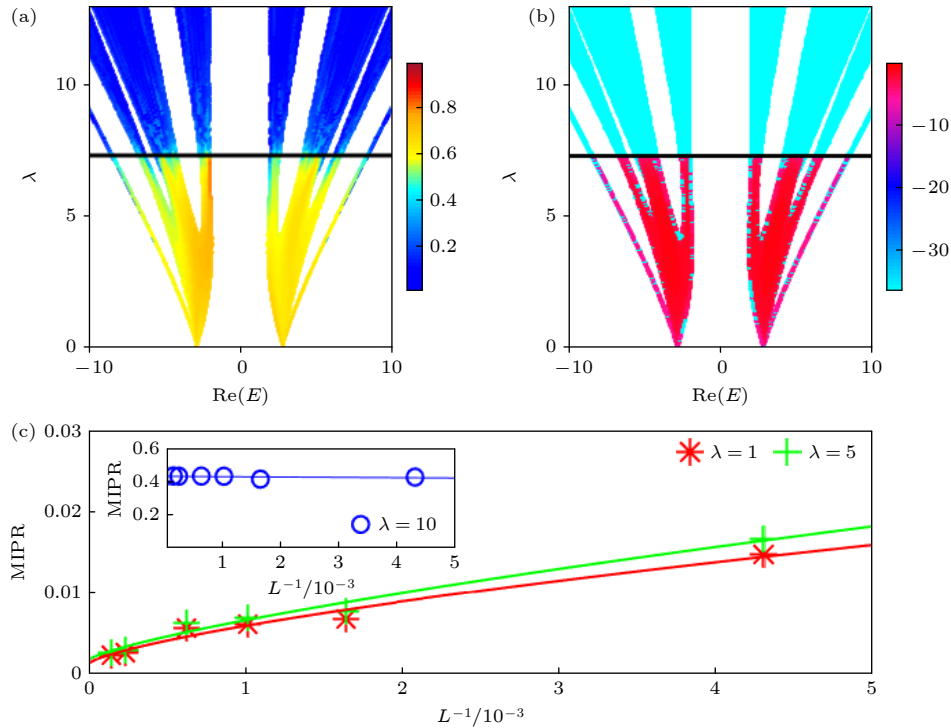


图 4 反对称情况时, $U = 2$ 类非厄米十字晶格的局域化 (a) 分型维度 $D_2^{(l)}$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化, 颜色表示分型维度 $D_2^{(l)}$ 的大小. (b) 能量虚部 $\ln|\text{Im}(E)|$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化, 颜色表示 $\ln|\text{Im}(E)|$ 的大小, 实线表示多重分形-局域的转变, 这里 $L = 1000$. (c) 多重分形区域的 MIPR 标度分析, 插图为局域区域的 MIPR 标度分析

Fig. 4. Antisymmetric case of $U = 2$ non-Hermitian cross-stitch lattice: (a) $D_2^{(l)}$ of the spectrum as a function of λ and $\text{Re}(E)$, where the color denotes the value of the fractal dimension $D_2^{(l)}$. (b) $\ln|\text{Im}(E)|$ of the spectrum as a function of λ and $\text{Re}(E)$, where the color denotes the value of $\ln|\text{Im}(E)|$. The black solid lines represent the multifractal-to-localized transition. Here, $L = 1000$. (c) The MIPR scaling of multifractal regions for different λ . The inset shows the MIPR scaling of localized regions for $\lambda = 10$.

非对角调制 AA 模型, 其本征方程为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E^2 - t^2 - 4}{2\lambda} - \frac{\lambda}{4} \right) p_n \\ &= \frac{\lambda}{4} \cos(4\pi n\alpha) p_n - \left\{ e^h \cos(2\pi n\alpha) p_{n+1} \right. \\ & \quad \left. + e^{-h} \cos[2\pi(n-1)\alpha] p_{n-1} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

根据文献 [35, 36, 38], 该类模型展示了一个由多重分形到局域的转变, 转变点为 $\lambda_{c3} = 4M$. 图 4(a) 和图 4(b) 分别展示了 $U = 2$ 类非厄米十字晶格在反对称准周期调制情况下, 分形维度 $D_2^{(l)}$ 和能量虚部 $\ln |\text{Im}(E)|$ 随着能量实部 $\text{Re}(E)$ 和无序强度 λ 的变化情况. 解析的局域化转变点如图 4(a) 和图 4(b) 中实线所示, 与数值结果一致. 为了验证系统中存在多重分形相, 图 4(c) 展示了 MIPR 的标度随尺寸 $1/L$ 变化的情况. 当 $\lambda < \lambda_{c3}$, 选取 $\lambda = 1$ 时, MIPR 相应的拟合参数 $\tilde{a} = 0.611$, $\tilde{b} = 0.703$, 以及 $\tilde{c} \rightarrow 0$, 当 $\lambda = 5$ 时, MIPR 标度的拟合参数 $\tilde{a} = 0.8792$, $\tilde{b} = 0.750$, 以及 $\tilde{c} \rightarrow 0$, 表明此时对应于系统处于多重分形相. 而当 $\lambda > \lambda_{c3}$ 时 ($\lambda = 10$), MIPR 展示了一个不依赖系统尺寸的行为, 如图 4(c) 中插图所示, 表明此时系统处于局域相.

4 结 论

本文研究了准周期调制势的对称性对 $U = 1$ 和 $U = 2$ 类具有平带的一维非厄米十字晶格的局域化的影响. 在 $U = 1$ 类十字晶格中引入对称的准周期调制, 系统展示出两类谱的解耦, 一类对应于全局域态, 另一类存在解析的扩展-局域的转变; 而反对称的准周期调制会诱导出精确的迁移率边. 在 $U = 2$ 类十字晶格中, 对称性的准周期调制不会改变系统的局域化性质, 即系统始终处于局域相, 而反对称的准周期调制会诱导出精确的多重分形-局域转变.

参考文献

[1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
 [2] Billy J, Josse V, Zuo Z, Bernard A, Hambrecht B, Lugan P, Clément D, Sanchez-Palencia L, Bouyer P, Aspect A 2008

Nature **453** 891
 [3] Hu H, Strybulevych A, Page J H, Skipetrov S E, van Tiggelen B A 2008 *Nat. Phys.* **4** 945
 [4] Pradhan P, Sridhar S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2360
 [5] Mott N 1987 *J. Phys. C* **20** 3075
 [6] Wang Y, Zhang L, Sun W, Poon T F J, Liu X J 2022 *Phys. Rev. B* **106** L140203
 [7] Yamamoto K, Aharony A, Entin-Wohlman O, Hatano N 2017 *Phys. Rev. B* **96** 155201
 [8] Aubry S, André G 1980 *Ann. Isr. Phys. Soc.* **3** 133
 [9] Longhi S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 237601
 [10] Xu Z, Xia X, Chen S 2022 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **65** 227211
 [11] Biddle J, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 070601
 [12] Ganeshan S, Pixley J H, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 146601
 [13] Leykam D, Flach S, Bahat-Treidel O, Desyatnikov A S 2013 *Phys. Rev. B* **88** 224203
 [14] Zhang W, Addison Z, Trivedi N 2021 *Phys. Rev. B* **104** 235202
 [15] Leykam D, Bodyfelt J D, Desyatnikov A S, Flach S 2017 *Eur. Phys. J. B* **90** 1
 [16] Maimaiti W, Andreanov A 2021 *Phys. Rev. B* **104** 035115
 [17] Bodyfelt D, Leykam D, Danieli C, Yu X, Flach S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 236403
 [18] Danieli C, Bodyfelt J D, Flach S 2015 *Phys. Rev. B* **91** 235134
 [19] Lee S, Andreanov A, Flach S 2023 *Phys. Rev. B* **107** 014204
 [20] Lee S, Flach S, Andreanov A 2023 *Chaos* **33** 073125
 [21] Ahmed A, Ramachandran A, Khaymovich I M, Sharma A 2022 *Phys. Rev. B* **106** 205119
 [22] Liu C, Jiang H, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **99** 125103
 [23] Liu C, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 144106
 [24] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
 [25] Zhao H, Miao P, Teimourpour M H, Malzard S, ElGanainy R, Schomerus H, Feng L 2018 *Nat. Commun.* **9** 981
 [26] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301
 [27] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
 [28] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
 [29] Hatano N, Nelson D R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 570
 [30] Hatano N, Nelson D R 1997 *Phys. Rev. B* **56** 8651
 [31] Hatano N, Nelson D R 1998 *Phys. Rev. B* **58** 8384
 [32] Flach S, Leykam D, Bodyfelt J D, Matthies P, Desyatnikov A S 2014 *Europhys. Lett.* **105** 30001
 [33] Miroshnichenko A E, Flach S, Kivshar Y S 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 2257
 [34] Evers F, Mirlin A D 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1355
 [35] Macé N, Alet F, Laflorencie N 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 180601
 [36] Liu H, Lu Z, Xia X, Xu Z 2024 arXiv: 2311.03166 [cond-mat.dis-nn]
 [37] Zeng Q B, Chen S, Lü R 2017 *Phys. Rev. A* **95** 062118
 [38] Tang L Z, Zhang G Q, Zhang L F, Zhang D W 2021 *Phys. Rev. A* **103** 033325
 [39] Kawabata K, Shiozaki K, Ueda M, Sato M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041015

Delocalization-localization transitions in 1D non-Hermitian cross-stitch lattices*

Liu Hui¹⁾ Lu Zhan-Peng¹⁾ Xu Zhi-Hao^{1)2)†}

1) (State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices,
Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

2) (Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

(Received 12 April 2024; revised manuscript received 8 May 2024)

Abstract

In this work, we investigate the influence of quasi-periodic modulation on the localization properties of one-dimensional non-Hermitian cross-stitch lattices with flat bands. The crystalline Hamiltonian for this non-Hermitian cross-stitch lattice is given by:

$$\hat{H} = \sum_n \left[t(a_n^\dagger b_n + b_n^\dagger a_n) + J e^h (a_n^\dagger b_{n+1} + a_n^\dagger a_{n+1} + A b_n^\dagger a_{n+1} + A b_n^\dagger b_{n+1}) + J e^{-h} (A a_{n+1}^\dagger b_n + a_{n+1}^\dagger a_n + b_{n+1}^\dagger a_n + A b_{n+1}^\dagger b_n) \right]$$

with $A = \pm 1$. When $A = 1$, the clean lattice supports two bands with dispersion relations $E_0 = -t$, $E_1 = 4 \cos(k - ih) + t$. The compact localized states (CLSs) within the flat band E_0 are localized in one unit cell, indicating that the system is characterized by the $U = 1$ class. Conversely, for $A = -1$, there are two flat bands in the system: $E_{\pm} = \pm \sqrt{t^2 + 4}$. The CLSs within the flat bands are localized in two unit cells, indicating that the system is marked by the $U = 2$ class. After introducing quasi-periodic modulations $\varepsilon_n^\beta = \lambda_\beta \cos(2\pi\alpha n + \phi_\beta)$ ($\beta = \{a, b\}$), delocalization-localization transitions can be observed by numerically calculating the fractal dimension D_2 and imaginary part of the energy spectrum $\ln|\text{Im}(E)|$. Our findings indicate that the symmetry of quasi-periodic modulations plays an important role in determining the localization properties of the system. For the case of $U = 1$, the symmetric quasi-periodic modulation leads to two independent spectra σ_f and σ_p . The σ_f retains its compact properties, while the σ_p owns an extended-localized transition at $\lambda_{c1} = 4M$ with $M = \max\{e^h, e^{-h}\}$. However, in the case of antisymmetric modulation, the system exhibits an exact mobility edge $\lambda_{c2} = 2\sqrt{2|E - t|M}$. For the $U = 2$ class, all the eigenstates remain localized under any symmetric quasi-periodic modulation. In the case of antisymmetric modulation, all states transition from multifractal to localized states as the modulation strength increases, with a critical point at $\lambda_{c3} = 4M$. This work expands the understanding of localization properties in non-Hermitian flat-band systems and provides a new perspective on delocalization-localization transitions.

Keywords: flat-band systems, non-Hermitian systems, disorder, localization

PACS: 72.80.Ng, 72.20.Ee, 72.15.Rn

DOI: [10.7498/aps.73.20240510](https://doi.org/10.7498/aps.73.20240510)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12375016), the Fundamental Research Program of Shanxi Province, China (Grant No. 20210302123442), the Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics (Grant No. 2023BNLCPKF001), and the Fund for Shanxi "1331 Project" Key Subjects, China.

† Corresponding author. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

一维非厄米十字晶格中的退局域-局域转变

刘辉 陆展鹏 徐志浩

Delocalization-localization transitions in 1D non-Hermitian cross-stitch lattices

Liu Hui Lu Zhan-Peng Xu Zhi-Hao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 137201 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240510

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240510>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

具有平带的一维十字型晶格中重返局域化现象

Reentrant localization phenomenon in one-dimensional cross-stitch lattice with flat band

物理学报. 2024, 73(3): 037202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231393>

由超辐射引起的迁移率边和重返局域化

Mobility edges and reentrant localization induced by superradiance

物理学报. 2022, 71(11): 113702 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212246>

随机两体耗散诱导的非厄米多体局域化

Random two-body dissipation induced non-Hermitian many-body localization

物理学报. 2024, 73(7): 077202 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231987>

无序非厄米Su-Schrieffer-Heeger中的趋肤效应

Skin effect in disordered non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger

物理学报. 2022, 71(22): 227402 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221151>

非厄米系统的量子模拟新进展

Recent progress of quantum simulation of non-Hermitian systems

物理学报. 2022, 71(24): 240303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221825>

非厄米镶嵌型二聚化晶格

Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

物理学报. 2022, 71(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>