

# 周期驱动拉曼晶格系统中的动力学拓扑现象\*

蔡德欢<sup>1)2)3)†</sup> 屈苏平<sup>3)</sup>

1) (合肥国家实验室, 合肥 230088)

2) (中国科学院量子信息与量子科技创新研究院, 合肥 230026)

3) (蚌埠学院, 蚌埠 233030)

(2024年4月17日收到; 2024年5月17日收到修改稿)

基于目前超冷原子系统中模拟能带拓扑和动力学量子相变的有关实验进展, 设计出一个时间周期驱动的一维拉曼晶格系统来模拟动力学拓扑现象. 利用振幅周期调制的拉曼光束耦合类碱土<sup>171</sup>Yb原子的 $\{^1S_0, ^3P_1\}$ 能级可以实现所需要的周期驱动拉曼晶格系统. 时间周期系统的单带紧束缚近似哈密顿量通过特定变换可以解析求得有效 Floquet 哈密顿量和微动算符 (micromotion operator), 从而可以在一维晶格系统中研究任意驱动频率下 Floquet 动力学量子相变和动力学斯格明子结构出现的条件. 结果表明, 拓扑非平庸的有效 Floquet 哈密顿量是系统出现 Floquet 动力学量子相变的充分不必要条件, 并且可以保护 Floquet 微动过程中的动力学斯格明子结构.

**关键词:** 拓扑相, 动力学量子相变, 超冷原子, 拉曼晶格

**PACS:** 03.65.Vf, 03.75.Kk, 03.75.Ss

**DOI:** 10.7498/aps.73.20240535

## 1 引言

近年来, 在凝聚态物质之外的体系中研究拓扑相及拓扑相关的现象是拓扑物态领域的一个重要研究方向. 随着超冷原子<sup>[1-6]</sup>、光子<sup>[7-11]</sup>、固态自旋<sup>[12,13]</sup>和超导量子比特<sup>[14,15]</sup>等量子模拟平台的迅速发展, 具有拓扑能带及拓扑特性的人工拓扑体系相继在这些平台上得以实现. 此外, 这些高度可控的人工拓扑体系使得非平衡动力学过程中的拓扑现象的实验研究成为可能<sup>[16-45]</sup>, 而这些动力学拓扑现象一般很难在传统凝聚态体系中实现. 典型的动力学拓扑现象, 如动力学量子相变<sup>[16-25]</sup>、能带反转面<sup>[26,27]</sup>及动量-时间域上的动力学斯格明子结构<sup>[28-30]</sup>等, 实验上通常可以通过量子淬火过程来实现. 淬火前后

哈密顿量的拓扑性质与量子淬火过程中构建的动力学拓扑结构存在密切关系<sup>[19,22,23]</sup>. 譬如, 系统初始时刻制备到某一个具有拓扑平庸属性的哈密顿量基态, 通过量子淬火, 系统接下来将在另一个末态哈密顿量作用下演化, 末态哈密顿量的拓扑性质可以根据淬火过程中的动力学拓扑结构推断出来.

除此之外, 时间周期驱动的 Floquet 系统中也存在动力学拓扑现象<sup>[35-45]</sup>. 2019年, Wang 等<sup>[38]</sup>在单光子分立时间量子行走实验中实现了 Floquet 动力学量子相变, 这个实验将 Floquet 动力学看作有效哈密顿量淬火过程中的频闪式量子模拟而不需要关注微动动力学过程. 随后, Floquet 微动过程中的动力学量子相变在零维固态自旋系统中得以实现<sup>[39]</sup>. 研究表明, Floquet 系统存在拓扑非平庸的有效 Floquet 哈密顿量是该系统发生 Floquet

\* 科技创新 2030-“量子通信与量子计算机”重大项目 (批准号: 2021ZD0301200)、国家自然科学基金 (批准号: 11974331)、安徽高校自然科学研究项目 (批准号: KJ2021A1130) 和安徽省高校优秀青年人才支持计划 (批准号: gxyq2022111) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dhcai@ustc.edu.cn

动力学量子相变的充要条件. 2022 年, 我们设计出了一个时间周期的一维拉曼晶格耦合模型, 在一维系统中研究了 Floquet 微动过程中的动力学量子相变<sup>[45]</sup>. 由于无法解析求得该系统 Floquet 态随时间的演化, 我们在高频极限下研究了该系统有效哈密顿量拓扑性质与系统出现 Floquet 动力学量子相变及动力学斯格明子结构间的关系.

在这一背景下, 本文设计了另外一个可以解析求解 Floquet 态演化的时间周期驱动拉曼晶格系统, 从而可以在任意频率下研究一维系统中的 Floquet 动力学量子相变和动力学斯格明子结构. 首先利用周期调制的拉曼光束耦合类碱土  $^{171}\text{Yb}$  原子  $\{^1\text{S}_0, ^3\text{P}_1\}$  能级实现时间周期拉曼晶格系统, 得到系统在单带紧束缚近似下的哈密顿量. 将该系统哈密顿量变换至准动量空间, 可以解析求得 Floquet 态随时间的演化. 形式上, 动力学量子相变出现的条件是 Loschmidt 振幅  $G(t) = \langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle$  在临界时间处变为零. 因此, 根据 Floquet 态演化的解析表达式可以得到 Floquet 动力学量子相变的参数条件, 并进一步研究该系统中有效哈密顿量与 Floquet 动力学量子相变间的关系.

## 2 理论模型

考虑将时间周期调制引入拉曼晶格势中, 可以实现如下周期驱动的哈密顿量 (为简便起见, 后面所有的公式中令  $\hbar = 1$ ):

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V_{\text{latt}}(x) + \frac{\delta}{2} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) + \left\{ [M_1(x, t) + iM_2(x, t)] |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \text{H.c.} \right\}, \quad (1)$$

这里  $\sigma \in \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  表示原子内部两个自旋自由度,  $p_x^2/(2m)$  是原子沿一维晶格  $x$  方向的动能,  $V_{\text{latt}}(x) = V_0 \cos^2(\pi k_0 x)$  是一维晶格势,  $M_1(x, t) = M_1 \sin(\omega t) e^{i\pi k_0 x}$  和  $M_2(x, t) = M_2 \cos(\omega t) e^{i\pi k_0 x}$  是利用时间周期调制和人工自旋轨道耦合效应产生的时间周期拉曼势,  $\omega$  是调制频率,  $\delta$  是双光子失谐, 也看作是一个等效的塞曼场. 同时, 这里考虑  $y$  和  $z$  方向存在很深的束缚势, 相应的自由度被冻结, 因此不体现在方程 (1) 中.

这里以  $^{171}\text{Yb}$  原子的  $\{^1\text{S}_0, ^3\text{P}_1\}$  能级结构作为具体实例, 来说明如何实现方程 (1) 中的哈密顿量.  $^{171}\text{Yb}$  原子核自旋  $I = 1/2$ , 根据核自旋与电子总角

动量耦合规则可知  $\{^1\text{S}_0, ^3\text{P}_1\}$  态具有图 1 所示的超精细能级结构. 同时, 选取其基态超精细能级构成哈密顿量 (1) 中的两个自旋态:  $|\uparrow\rangle = |^1\text{S}_0, m_F = 1/2\rangle$  和  $|\downarrow\rangle = |^1\text{S}_0, m_F = -1/2\rangle$ . 一束线偏振大失谐的驻波激光  $\mathbf{E}_{0x} = \hat{z}|E_{0x}| \cos(\pi k_0 x) e^{-i\omega_0 t}$  (图中未标出) 产生沿  $x$  方向的一维背景光晶格, 这束驻波场的频率相对于超精细能级  $F = 1/2 \leftrightarrow F' = 3/2$  跃迁为  $\sim 1$  GHz 的蓝失谐, 相应的晶格深度为  $V_0 = \sum_{F'} |\Omega_{0x}^{\uparrow, F'}|^2 / \Delta_{F'} = \sum_{F'} |\Omega_{0x}^{\downarrow, F'}|^2 / \Delta_{F'}$ , 其中  $\Omega_{0x}^{\sigma, F'}$  ( $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ) 和  $\Delta_{F'}$  是相应能级跃迁的拉比频率和单光子失谐, 其中能级求和表示耦合跃迁涉及超精细基态至  $^3\text{P}_1$  激发态所有相关的超精细态  $F' = 1/2, 3/2$ .

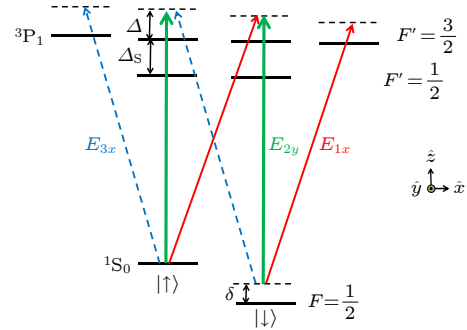


图 1 激光与类碱土  $^{171}\text{Yb}$  原子相互耦合实现时间周期拉曼晶格的原理图.  $F$  和  $F'$  分别是标记超精细基态和激发态的量子数,  $\Delta_s$  是超精细能级间距,  $x$  轴为量子化轴  
Fig. 1. Schematic illustration of a time-periodic Raman lattice realized by laser coupling to alkaline-earth-like atoms  $^{171}\text{Yb}$ .  $F$  and  $F'$  are the quantum numbers labeling the hyperfine ground states and excited states respectively,  $\Delta_s$  is the hyperfine manifolds, and the  $x$  axis is the quantization axis.

一束沿  $-x$  方向传播频率为  $\omega_1$  的蓝失谐 (失谐大小约为 2 GHz) 圆偏振激光  $\mathbf{E}_{1x} = (\hat{z} + i\hat{y})|E_{1x}| \times \sin(\omega t) e^{i(\pi k_0 x - \omega_1 t)}$  和一束沿  $-y$  方向传播频率为  $\omega_2$  的线偏振激光  $\mathbf{E}_{2y} = \hat{x}|E_{2y}| e^{i(\pi k_0 y - \omega_2 t)}$  通过双光子拉曼过程产生拉曼势  $M_1(x, t) = M_1 \sin(\omega t) e^{i\pi k_0 x} \times e^{-i\pi k_0 y}$ ,  $M_1 = \sum_{F'} \Omega_{1x}^{\uparrow, F'} \Omega_{2y}^{\downarrow, F'} / \Delta'_{F'}$ , 其中,  $\Delta'_{F'}$  是整个拉曼过程相对于激发态超精细能级  $F'$  的单光子失谐,  $\Omega_{1x}^{\sigma, F'}$  和  $\Omega_{2y}^{\sigma, F'}$  是相应的激光作用于基态  $|\sigma\rangle$  和激发态  $F'$  产生的拉比频率, 求和表示要涉及所有激发态超精细能级. 方程 (1) 中的  $\delta$  表示这个拉曼过程的双光子失谐. 拉曼势  $M_2(x, t) = M_2 \cos(\omega t) e^{i\pi k_0 x} e^{i\pi k_0 y}$  由光场  $\mathbf{E}_{2y}$  和频率为  $\omega_3$  沿  $x$  方向传播的圆偏振激光  $\mathbf{E}_{3x} = (\hat{z} - i\hat{y})|E_{3x}| \times$

$\cos(\omega t)e^{-i(\pi k_0 x - \omega_3 t)}$  通过另外一个双光子拉曼过程产生, 如图 1 中蓝色和绿色箭头所示. 其中  $M_2 = \sum_{F'} \Omega_{2y}^{\uparrow, F'} \Omega_{3x}^{\downarrow, F'} / \Delta'_{F'}$ ,  $\Omega_{3x}^{\sigma, F'}$  是圆偏振激光与相应能级耦合产生的拉比频率. 需要指出的是, 这里的双光子失谐  $\delta$  与第一个拉曼过程中  $M_1(x, t)$  的双光子失谐大小完全一样.

根据目前实验上的条件, 可以让这里所有的拉曼光束都由同一个激光源产生, 通过声光调制器调节它们之间的频率差为  $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ , 这样就可以保证两个拉曼过程具有相同的双光子失谐. 同时, 根据下文讨论动力学拓扑现象的需要, 令  $|E_{1x}| = |E_{3x}|$ , 且可以通过调节光场强度使得光场振幅  $|E_{0x}|$  和  $|E_{2y}|$  远大于  $|E_{1x}|$  和  $|E_{3x}|$ , 从而可以忽略  $|E_{1x}|$  和  $|E_{3x}|$  产生的光偶极势. 综合以上由不同激光作用于原子产生的背景光晶格和两个拉曼过程, 再去掉不相关的相位因子  $e^{\pm i k_0 y}$  就可以实现方程 (1) 中的哈密顿量.

对于方程 (1) 中的哈密顿量, 忽略能带间耦合的影响, 只考虑  $s$  带的物理和最邻近格点间的耦合, 即做单带紧束缚近似. 利用文献 [46–48] 中的近似方法, 可以得到紧束缚哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H_{\Gamma} &= -t_s \sum_j (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j\pm 1,\uparrow} - c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j\pm 1,\downarrow}) + m_z \sum_{\sigma,j} \zeta_{\sigma} c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \\
 &+ \left[ \sum_j t_{s0} \sin(\omega t) (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j-1,\downarrow} - c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j+1,\downarrow}) + \text{H.c.} \right] \\
 &+ \sum_j i t_{s0}'' \sin(\omega t) (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow} - c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow}) \\
 &+ \left[ \sum_j i t_{s0}' \cos(\omega t) (c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j-1,\downarrow} - c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j+1,\downarrow}) + \text{H.c.} \right] \\
 &- \left( \sum_j t_{s0}''' \cos(\omega t) c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow} + \text{H.c.} \right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中  $c_{j,\sigma}$  是对应于第  $j$  个格点上自旋为  $\sigma$  的原子湮灭算符,  $m_z = \delta/2$ ,  $\zeta_{\uparrow,\downarrow} = \pm$ .  $t_s$  是最邻近格点间自旋守恒的耦合系数,  $t_{s0}$  和  $t_{s0}''$  是与拉曼势  $M_1$  有关的最邻近格点间自旋翻转耦合系数,  $t_{s0}'$  和  $t_{s0}'''$  是与拉曼势  $M_2$  有关的最邻近格点间自旋翻转耦合系数. 需要指出的是, 这里的单带紧束缚近似成立的前提是驱动频率远小于能谱的带隙, 以保证体系没有产生显著的带间耦合效应, 因此后面的数值计算

结果都需要满足参数条件  $V_0 \gg \omega$ .

### 3 Floquet 动力学量子相变和动力学斯格明子

#### 3.1 有效 Floquet 哈密顿量

哈密顿量 (2) 所刻画的时间周期驱动拉曼晶格系统沿  $x$  方向具有空间平移不变性, 对其做傅里叶变换  $c_{k,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_j e^{-ij k} c_{j,\sigma}$ , 可得准动量空间的 Bloch 哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H(k, t) &= \cos(\omega t) [2t_{s0}' \sin(k) - t_{s0}'''] \sigma_x \\
 &+ \sin(\omega t) [2t_{s0} \sin(k) - t_{s0}'''] \sigma_y \\
 &+ [m_z - 2t_s \cos(k)] \sigma_z. \quad (3)
 \end{aligned}$$

无量纲的准动量  $k \in [-\pi, \pi)$ , 是真实准动量除以单位元  $k_0 = 1/d$  ( $d$  为晶格常数) 以后的结果. 由于不同  $k$  指标下的动力学相互解耦, 可以根据这个时间周期的 Bloch 哈密顿量研究系统的动力学拓扑性质.

为简便起见, 让哈密顿量 (3) 中的耦合系数  $t_{s0} = t_{s0}'$ , 根据文献 [46–48] 中耦合系数的定义式可知此时的拉曼势  $M_1 = M_2$ , 也就是要求光场振幅  $|E_{1x}| = |E_{3x}|$ , 同时耦合系数  $t_{s0}'' = t_{s0}'''$  会自动满足. 在此条件下对哈密顿量 (3) 做规范变换,  $U_R(t) = e^{i\omega(\sigma_0 - \sigma_z)t/2}$ , 可以得到一个不含时的 Bloch 哈密顿量:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}} &\equiv U_R^\dagger(t) H(k, t) U_R(t) - i U_R^\dagger(t) \frac{d}{dt} U_R(t) \\
 &= h_x(k) \sigma_x + h_z(k) \sigma_z + \frac{\omega}{2} \sigma_0, \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中  $h_x(k) = 2t_{s0} \sin(k) - t_{s0}''$ ,  $h_z(k) = m_z - \omega/2 - 2t_s \cos(k)$ . 这个不含时的哈密顿量 (4) 式就是有效 Floquet 哈密顿量, 相应的规范变换就是微动算符 (micromotion operator):

$$U_F^k(t) \equiv U_R(t) = e^{i\omega(\sigma_0 - \sigma_z)t/2}. \quad (5)$$

根据 Floquet 理论, 时间周期的 Bloch 哈密顿量 (3) 式对应于每个  $k$  指标下的 Floquet 态随时间演化满足:

$$|\psi_k^\pm(t)\rangle = e^{-ie_k^\pm t} U_F^k(t) |\mu_k^\pm\rangle, \quad (6)$$

其中

$$\epsilon_k^\pm = \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{h_x^2(k) + h_z^2(k)} = \frac{\omega}{2} \pm |\epsilon_k|, \quad (7)$$

和

$$|\mu_k^+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{h_x(k)}{\sqrt{h_x^2(k) + (|\varepsilon_k| - h_z(k))^2}} \\ \frac{|\varepsilon_k| - h_z(k)}{\sqrt{h_x^2(k) + (|\varepsilon_k| - h_z(k))^2}} \end{pmatrix},$$

$$|\mu_k^-\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{|\varepsilon_k| - h_z(k)}{\sqrt{h_x^2(k) + (|\varepsilon_k| - h_z(k))^2}} \\ \frac{h_x(k)}{\sqrt{h_x^2(k) + (|\varepsilon_k| - h_z(k))^2}} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

是有效 Floquet 哈密顿量  $H_{\text{eff}}$  的本征值和本征态, 即满足本征方程  $H_{\text{eff}}|\mu_k^\pm\rangle = \varepsilon_k^\pm|\mu_k^\pm\rangle$  (其中  $\pm$  是能带指标). 微动算符具有时间周期性  $U_F^k(t) = U_F^k(t + nT)$ , 这是导致 Floquet 模  $|u_k^\pm(t)\rangle = U_F^k(t)|\mu_k^\pm\rangle = |u_k^\pm(t + T)\rangle$  具有时间周期性的根本原因.

由于有效 Floquet 哈密顿量  $H_{\text{eff}}$  具有手征对称  $\sigma_y H_{\text{eff}} \sigma_y = -H_{\text{eff}}$ . 因此, 随着  $k$  遍历整个布里渊区, 有效哈密顿量对应的矢量  $\mathbf{h} = (h_x, h_z)$  在  $x$ - $z$  平面内形成一个椭圆轨迹. 特别是当轨迹绕过原点的时候, 有效 Floquet 哈密顿量具有拓扑非平庸的特性, 如图 2(b) 所示, 相应的拓扑不变量是绕数

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{n}_h(k) \times \frac{d}{dk} \mathbf{n}_h(k) dk, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{n}_h = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$ . 图 2(b) 中相应的绕数  $\nu = 1$ , 此时哈密顿量  $H_{\text{eff}}$  具有非平庸的能带拓扑, 系统在开边界条件下存在拓扑边缘态, 其 Floquet 动力学在周期性边界条件下同样会出现拓扑现象. 图 2(a) 和图 2(c) 中椭圆轨迹不过原点, 因此绕数  $\nu = 0$ ,

哈密顿量  $H_{\text{eff}}$  具有拓扑平庸的能带结构.

### 3.2 Floquet 动力学量子相变

根据动力学量子相变的有关理论, Loschmidt 振幅  $G(t) = \langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle$  是用系统任意时刻的演化态向初态投影来定义的, 如果  $G(t)$  在某一临界时刻  $t_c$  变为零, 那么此时就出现了动力学量子相变. 目前关于动力学量子相变的研究主要集中在淬火系统中, 同时这一现象也会出现在 Floquet 动力学过程中. Floquet 系统中出现动力学量子相变的时候,  $G(t)$  会在一个周期的微动动力学过程中出现零点, 并随时间呈现周期性变化.

假设系统初始处于  $|\psi^-(t)\rangle = \prod_k |\psi_k^-(t)\rangle$ , Loschmidt 振幅为

$$G^-(t) = \langle \psi^-(0) | \psi^-(t) \rangle = \prod_k G_k^-(t), \quad (10)$$

其中

$$G_k^-(t) = \langle \psi_k^-(0) | \psi_k^-(t) \rangle = e^{-i\varepsilon_k^- t} \langle \mu_k^- | U_F^k(t) | \mu_k^- \rangle$$

$$= e^{-i\varepsilon_k^- t} \frac{(|\varepsilon_k| - h_z(k))^2 + h_x^2(k) e^{i\omega t}}{h_x^2(k) + (|\varepsilon_k| - h_z(k))^2}, \quad (11)$$

由这个解析表达式可知, 若存在临界动量  $k_c$ ,  $G_k^-(t)$  会在临界时间  $t_c = (n + 1/2)T$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 处周期性地消失, 临界动量  $k_c$  满足关系  $(|\varepsilon_k| - h_z(k))^2 = h_x^2(k)$ , 即

$$h_z(k_c) = 0. \quad (12)$$

也就是说, 存在临界动量等价于系统的有效 Floquet

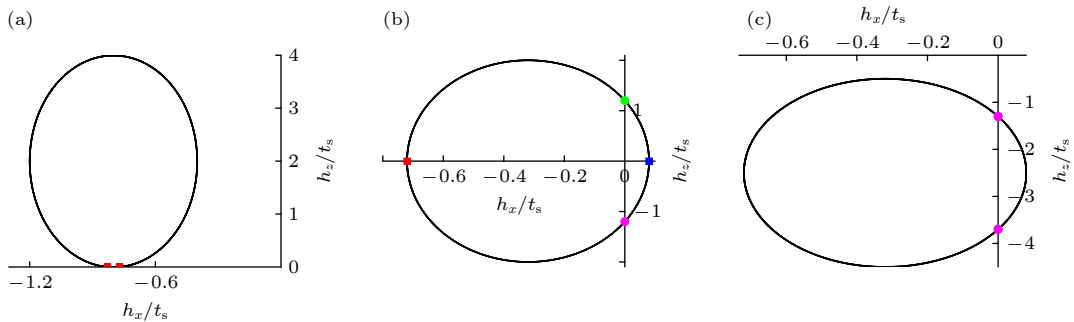


图 2 随无量纲的准动量  $k$  遍历整个布里渊区过程中矢量  $\mathbf{h}$  形成的椭圆轨迹 (a) 椭圆轨迹的绕数  $\nu = 0$ , 相应的参数为  $m_z = 2.05t_s$ ,  $t_{s0} = 0.2t_s$ ,  $t_{s0}'' = 0.8t_s$ ,  $\omega = 0.1t_s$ ; (b) 椭圆轨迹的绕数  $\nu = 1$ , 相应的参数为  $m_z = 2.5t_s$ ,  $t_{s0} = 0.2t_s$ ,  $t_{s0}'' = 0.32t_s$ ,  $\omega = 5t_s$ ; (c) 椭圆轨迹的绕数  $\nu = 0$ , 相应的参数为  $m_z = 0$ ,  $t_{s0} = 0.2t_s$ ,  $t_{s0}'' = 0.32t_s$ ,  $\omega = 5t_s$ . 品红色和绿色的圆点对应于两种不同类型的不动点, 红色和蓝色的方点对应于两种不同类型的临界动量  $k_c$

Fig. 2. The elliptic trajectory formed by  $\mathbf{h}$  as the dimensionless quasimomentum  $k$  traverses the Brillouin zone: (a) Trajectory for  $\nu = 0$ , with  $m_z = 2.05t_s$ ,  $t_{s0} = 0.2t_s$ ,  $t_{s0}'' = 0.8t_s$ ,  $\omega = 0.1t_s$ ; (b) trajectory for  $\nu = 1$ , with  $m_z = 2.5t_s$ ,  $t_{s0} = 0.2t_s$ ,  $t_{s0}'' = 0.32t_s$ ,  $\omega = 5t_s$ ; (c) trajectory for  $\nu = 0$ , with  $m_z = 0$ ,  $t_{s0} = 0.2t_s$ ,  $t_{s0}'' = 0.32t_s$ ,  $\omega = 5t_s$ . The magenta and green dots correspond to two different types of fixed points, and the red and blue square dots correspond to critical quasimomenta  $k_c$ .

哈密顿量相应的椭圆轨迹与  $x$  轴间存在交点, 其相应的参数条件可以表示为

$$\left| m_z - \frac{\omega}{2} \right| \leq t_s. \quad (13)$$

因此, 只要系统的参数满足方程 (13), 那么一定存在临界动量  $k_c$  使得 Loschmidt 振幅周期性地消失, 相应的速率函数  $g_-(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \ln |G_k^-(t)|^2$  在临界时间处出现非解析性, 系统出现 Floquet 动力学量子相变.

根据这里推导出的 Floquet 动力学量子相变的参数条件 (13) 式可知, Floquet 动力学量子相变的出现并不需要绕数  $\nu$  非零. 但  $\nu = 1$  时, 一定存在临界动量使得  $h_z(k_c) = 0$ , 因此有效 Floquet 哈密顿量具有拓扑非平庸的特性是出现 Floquet 动力学量子相变的充分但非必要条件.

由于 (5) 式中  $U_F^k(t)$  具有对角化的形式, 每个  $k$  指标下的 Bloch 态  $|\psi_k^-(t)\rangle$  演化都对应单位矢量  $\mathbf{n}_h(k, t) = \text{Tr}(|\psi_k^-(t)\rangle\langle\psi_k^-(t)|\boldsymbol{\sigma})$  在 Bloch 球上绕  $z$  轴进动, 如图 3 所示, 单位矢量初始位置  $\mathbf{n}_h(k, t) = \text{Tr}(|\mu_k^-\rangle\langle\mu_k^-|\boldsymbol{\sigma})$  是有效 Floquet 哈密顿量本征态映射至 Bloch 球上的位置. 如图 2 所示, 如果有效 Floquet 哈密顿量对应的椭圆轨迹与  $z$  轴相交,  $h_x(k_m) = 0, k_m = \arcsin[t''_{s0}/2t_{s0}, \pi - \arcsin[t''_{s0}/2t_{s0}]$ , 单位矢量初始落在 Bloch 球的  $z$  轴或者  $-z$  轴, 矢量固定不动, 量子态随时间的演化只会积累一个动力学相位, 这两个点叫不动点. 当交点同时出现在  $+z$  轴和  $-z$  轴的时候就是不同类型的不动点 (如图 2(b) 所示), 否则是同种类型的不动点 (如图 2(c) 所示), 只有存在两种不同类型的不动点时  $\nu$  才是不为零的整数. 有效 Floquet 哈密顿量对应的椭圆轨迹与  $x$  轴相交时  $h_z(k_c) = 0$ , 临界动量  $k_c = \{\arccos[(m_z - \omega/2)/2(t_s)], 2\pi - \arccos[(m_z - \omega/2)/(2(t_s))]\}$ , 单位矢量初始落在赤道面内, 因此在  $t_c$  处单位矢量绕至相反方向与初态正交, 出现 Floquet 动力学量子相变, 如图 2(a) 和图 2(b) 所示.

图 4 中数值计算了 Loschmidt 回波的相图和速率函数随时间的变化曲线. 图 4(a)—(c) 分别采用了图 2(a)—(c) 中的参数, 因此每幅图中的数值结果与图 2(a)—(c) 中的椭圆轨迹一一对应, 同时相应的速率函数  $g_-(t)$  随时间周期性地变化, 如图 4(d)—(f) 所示. 在图 2(a) 和图 2(b) 的参数条件下,  $g_-(t)$  周期性地出现非解析行为, 表征 Floquet

系统周期性的动力学量子相变, 如图 4(d) 和图 4(e) 所示. 只有图 4(b) 中同时存在动力学量子相变和两种不同类型的不动点, 相应的有效哈密顿量具有拓扑非平庸的能带结构. 图 4(a) 中没有不动点而图 4(c) 中存在同种相同类型的不动点, 此时的不动点和 Floquet 动力学量子相变之间已经没有必然联系. 因此, 本文的数值计算结果再次表明有效 Floquet 哈密顿量具有拓扑非平庸的特性是出现 Floquet 动力学量子相变的充分但非必要条件.

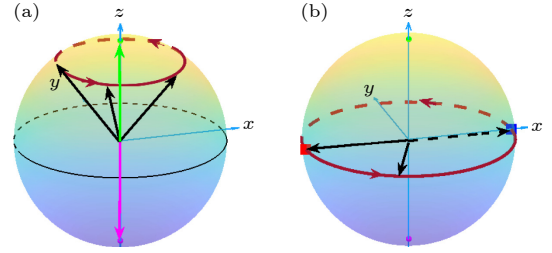


图 3 单位矢量  $\mathbf{n}_h(k, t)$  在 Bloch 球上的动力学演化 (a) 任意  $k$  指标下  $\mathbf{n}_h(k, t)$  绕  $z$  轴进动,  $k_m$  指标下矢量  $\mathbf{n}_h(k, t)$  指向 Bloch 球的北极 (球上绿点) 或者南极 (球上品红色点), 这些点对应于图 2 中椭圆轨迹与  $z$  轴交点; (b) 在临界动量  $k_c$  指标下矢量  $\mathbf{n}_h(k, t)$  落在赤道面上, Floquet 动力学经历半个周期以后单位矢量运动至相反方向, 此时的量子态与初态正交. 这些  $k_c$  点对应于图 2 中椭圆轨迹与  $x$  轴的交点

Fig. 3. Dynamical evolution of the unit vector  $\mathbf{n}_h(k, t)$  on the Bloch sphere: (a)  $\mathbf{n}_h(k, t)$  rotates around the  $z$ -axis at any  $k$ -index.  $\mathbf{n}_h(k, t)$  at the  $k_m$ -index points to the north pole (the green point) or the south pole (the magenta point) of the Bloch sphere, which corresponds to the intersections of elliptical trajectories with the  $z$ -axis in Fig. 2; (b)  $\mathbf{n}_h(k, t)$  lies on the equator at the critical momentum  $k_c$ -index, and the Floquet dynamics evolves half a cycle after which the unit vector moves to the opposite direction, at which point the quantum state is orthogonal to the initial state. These  $k_c$ -index correspond to the intersections of the elliptical trajectories with the  $x$  axis in Fig. 2.

Floquet 动力学量子相变是一种动力学拓扑现象, 可以定义相应的动力学拓扑序参量:

$$\nu^D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{k_m}^{k_n} dk \frac{\partial \phi_k^G(t)}{\partial k}, \quad (14)$$

其中  $\phi_k^G(t) = \phi_k(t) - \phi_k^{\text{dyn}}(t)$  是 Pancharatnam 几何相. 总相位  $\phi_k(t)$  源自于 Loschmidt 振幅  $G_k^-(t) = |G_k^-(t)| e^{i\phi_k(t)}$ , 动力学相位  $\phi_k^{\text{dyn}}(t) = -\int_0^t ds \langle \psi_k^-(s) | H(k, s) | \psi_k^-(s) \rangle$ . 动力学拓扑序参量的积分是在两个相邻的不动点  $k_m$  和  $k_n$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ) 间进行的, 量子态在这些不动点处的演化只积累动力学相

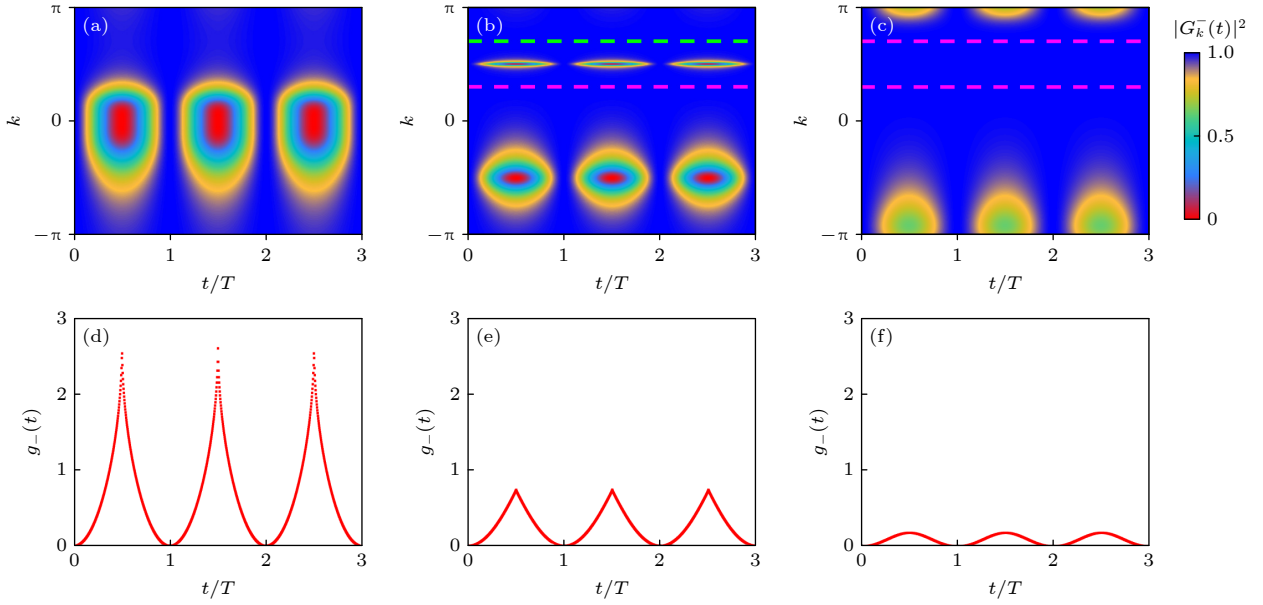


图 4 Loschmidt 回波  $|G_k^-(t)|^2$  和相应的速率函数  $g_-(t)$  (a)–(c)  $|G_k^-(t)|^2$  随时间  $t$  和无量纲准动量  $k$  变化的密度图, 这里的数值计算分别采用与图 2(a)–(c) 中相同的参数, 相应的速率函数如图 (d)–(f) 所示; 图 (a) 和 (b) 中出现了 Floquet 动力学量子相变, 每个周期内存在两个临界动量, 相应的速率函数在临界时间处出现非解析性. 图中品红色和绿色水平虚线分别表示两种不同类型的不动点出现的位置

Fig. 4. Loschmidt echo  $|G_k^-(t)|^2$  and the corresponding rate functions  $g_-(t)$ : (a)–(c) The density plot of  $|G_k^-(t)|^2$  versus  $t$  and  $k$ , where the numerical calculations are performed using the same parameters as in Figs. 2(a)–(c), respectively. The corresponding rate functions are shown in (d)–(f); Floquet dynamic quantum phase transitions occur in (a), (b), where two critical quasimomentas are identified in each period, and the corresponding rate functions appear nonanalytic at the critical time. The magenta and green dashed horizontal lines indicate the locations where two different types of fixed points appear, respectively.

位, Pancharatnam 几何相位始终为零. 只要存在不动点,  $\nu^D(t)$  就具有分立化的取值, 但只有存在不同类型的不动点, 它的值才会随着时间发生跃变, 如图 5(b) 和图 5(e) 所示.

图 5 给出了  $\phi_k^G(t)$  和  $\nu^D$  在 3 种参数情形下的数值结果, 分别对应于图 2 和图 4 中的 3 种情况. 图 5(e) 中动力学拓扑序参  $\nu^D(t)$  随时间的跃变能够忠实地表征 Floquet 动力学量子相变, 图 5(f) 中  $\nu^D(t)$  始终为零是由于不动点属于同种类型 (见图 2(c)), 图 5(d) 中  $\nu^D(t)$  没有出现分立化取值是由于缺乏不动点 (见图 2(a)).

### 3.3 Floquet 系统中的动力学斯格明子结构

动力学拓扑现象中另一个可以直接观测的效应是动力学斯格明子结构, 这种结构是由动量-时间域上的动力学陈数所保护的<sup>[28]</sup>. 根据文献 [45], Floquet 微动力学过程中也存在这种动力学斯格明子自旋结构. 这里的时间周期驱动拉曼晶格系统的拓扑非平庸有效 Floquet 哈密顿量会保护系统中不同类型的不动点. 基于这些不动点, 也可以在 Floquet 系统中定义动力学陈数<sup>[28,45]</sup>

$$C_{\text{dyn}}^{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{k_m}^{k_n} dk \int_0^T dt [\mathbf{n}_h(k, t) \times \partial_t \mathbf{n}_h(k, t)] \cdot \partial_k \mathbf{n}_h(k, t). \quad (15)$$

当系统存在不动点的时候, 动力学陈数始终会取分立化的值. 如果邻近的不动点  $k_m$  和  $k_n$  属于不同类型,  $C_{\text{dyn}}^{mn}$  取非零整数值, 如果邻近不动点属于相同类型, 则  $C_{\text{dyn}}^{mn} = 0$ , 动力学陈数本质上描述自旋结构  $\mathbf{n}_h(k, t)$  中斯格明子的数目. 系统的 Floquet 拓扑与 Floquet 动力学量子相变以及微动力学过程中的斯格明子结构密切相关, Floquet 拓扑可以保护系统中存在的这两种动力学拓扑现象. 图 6(a)–(c) 中数值计算了一个周期内动量-时间域上的自旋结构, 所用参数分别与图 2(a)–(c) 中的参数一致, 只有当两种不同类型的不动点都存在的时候才会出现动力学斯格明子结构, 如图 2(b) 所示. 因此, 有效 Floquet 哈密顿量具有拓扑非平庸的特性是出现动力学斯格明子结构的充要条件.

### 3.4 实验探测方案

根据前文所述, 要在实验上观测时间周期驱动拉曼晶格系统中的 Floquet 动力学量子相变和动

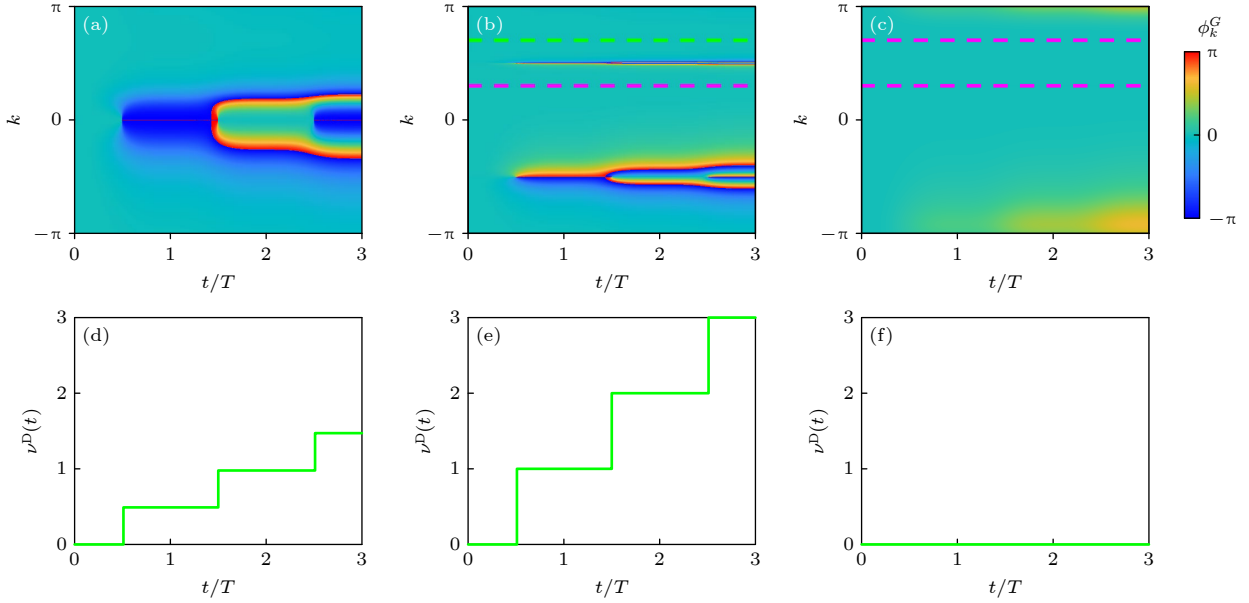


图 5 Pancharatnam 几何相位和动力学拓扑序参量 (a)–(c) Pancharatnam 几何相位随时间  $t$  和无量纲的准动量  $k$  变化的密度图, 这里的数值计算分别采用与图 2(a)–(c) 中相同的参数, 相应的动力学拓扑序参量分别如图 (d)–(f) 所示. 图中品红色和绿色虚线分别表示两种不同类型的不动点出现的位置

Fig. 5. Pancharatnam geometric phases and dynamic topological order parameter: (a)–(c) The density plot of the Pancharatnam geometric phases with time  $t$  and  $k$ , where the numerical calculations are performed using the same parameters as in Figs. 2(a)–(c), respectively. The corresponding dynamic topological order parameter are shown in (d)–(f). The magenta and green dashed horizontal lines indicate the locations where two different types of fixed points appear, respectively.

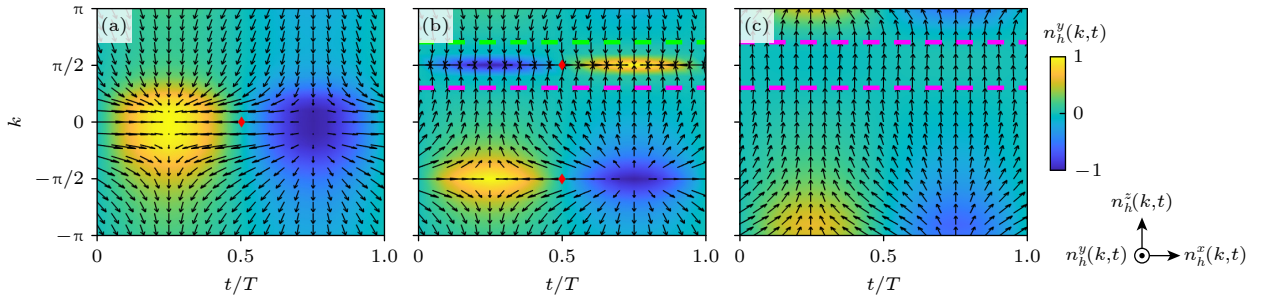


图 6 动量时间域  $k$ - $t$  上的自旋结构  $\mathbf{n}_h(k, t)$  (a) 存在动力学量子相变但不存在不动点; (b) 系统出现斯格明子结构说明存在分立化的动力学陈数, 品红色和绿色虚线分别表示两种不同类型的不动点; (c) 两条品红色虚线表示两个同种类型的不动点, 此时不存在动力学量子相变; 图 (a) 和 (b) 中红色方点表示动力学量子相变出现的位置

Fig. 6. Spin texture  $\mathbf{n}_h(k, t)$  in the  $k$ - $t$  domain: (a) Floquet dynamic quantum phase transitions exist but there are not fixed points; (b) the appearance of skyrmion substructure indicates the existence of quantized Chern number; the magenta and green dashed horizontal lines indicate the locations where two different types of fixed points appear, respectively; (c) two magenta dashed horizontal lines represent two fixed points of the same type, where there are no Floquet dynamic quantum phase transitions; the red square dots in (a) and (b) indicate the location where dynamic quantum phase transitions occur.

力学斯格明子结构, 需先将系统制备至有效 Floquet 哈密顿量的本征态, 即初始时刻的 Floquet 态  $|\mu_k^+\rangle$ . 根据 Bloch 哈密顿量 (3) 式和有效 Floquet 哈密顿量 (4) 式, 初始时刻用图 1 所示耦合机制产生一个不含时的拉曼晶格系统  $\omega t = 0$ , 且通过调节双光子失谐  $\delta$  使得  $m'_z = m_z - \omega/2$  即可得到由有效 Floquet 哈密顿量所刻划的静态拉曼晶格系统. 利用文献 [4] 中的方法将系统制备至静态系统最低能带相应的

Bloch 态, 在某一时刻打开时间周期调制且调节双光子失谐至  $m_z$ , 使得制备的初态在哈密顿量 (3) 式驱动下进行演化. 最后, 根据文献 [21] 中结合时间飞行成像和时间-动量分辨全态断层扫描 (time- and momentum-resolved full state tomography) 技术, 可以对任意时刻 Floquet 态的演化进行重构, 从而可以重构出 Loschmidt 振幅观测 Floquet 动力学量子相变, 还可以利用这些技术观

测动力学斯格明子结构.

## 4 总结与讨论

本文和文献 [45] 通过不同的光耦合机制实现了两种不同的周期驱动一维拉曼晶格系统. 文献 [45] 中时间周期拉曼晶格系统的 Bloch 哈密顿量  $H(k, t) = \cos(\omega t)[2t'_{so} \sin(k) - t''_{so}] \sigma_x + 2t_{so} \sin(\omega t) \sin(k) \sigma_y + [m_z - 2t_s \cos(k)] \sigma_z$  无法通过一个规范变换来得到有效 Floquet 哈密顿量的解析表达式, 从而无法给出微扰算符和 Floquet 态的解析解. 因此, 该系统仅能研究高频极限下有效 Floquet 哈密顿量与 Floquet 动力学量子相变及动力学斯格明子结构间的关系. 偏离高频极限条件依然可能存在 Floquet 动力学量子相变, 但无法研究其与有效 Floquet 哈密顿量间的关系, 且由于动力学不动点的消失, 动力学斯格明子结构也随之消失.

本文研究了可以解析求解 Floquet 态随时间演化的周期驱动一维拉曼晶格系统, 从而可以在任意频率下研究系统的动力学拓扑性质. 研究结果表明, 当系统的有效 Floquet 哈密顿量具有拓扑非平庸的属性时, 存在两种不同类型的动力学不动点和动力学斯格明子自旋结构, 此时系统一定会出现 Floquet 动力学量子相变. 如果有效 Floquet 哈密顿量具有拓扑平庸的属性, 那么动力学斯格明子自旋结构一定消失, 但只要满足参数条件 (13) 式, Floquet 动力学量子相变就依然存在. 因此, 拓扑非平庸的有效 Floquet 哈密顿量是出现动力学斯格明子结构的充要条件, 是出现 Floquet 动力学量子相变的充分但非必要条件.

感谢中国科学技术大学易为教授和郑炜研究员的讨论.

## 参考文献

- [1] Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
- [2] Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, Lebrat M, Uehlinger T, Greif D, Esslinger T 2014 *Nature* **515** 237
- [3] Fläschner N, Rem B S, Tarnowski M, Vogel D, Lühlmann D S, Sengstock K, Weitenberg C 2016 *Science* **352** 1091
- [4] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [5] Tai M E, Lukin A, Rispoli M, et al. 2017 *Nature* **546** 519
- [6] Xie D, Deng T S, Xiao T, Gou W, Chen T, Yi W, Yan B 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 050502
- [7] Kitagawa T, Broome M A, Fedrizzi A, et al. 2012 *Nat. Commun.* **3** 882

- [8] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, et al. 2013 *Nature* **496** 196
- [9] Xu X Y, Wang Q Q, Pan W W, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 260501
- [10] Wang B, Chen T, Zhang X 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 100501
- [11] Chen C, Ding X, Qin J, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 100502
- [12] Yao N Y, Laumann C R, Gopalakrishnan S, Knap M, Müller M, Demler E A, Lukin M D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 243002
- [13] Shu Z, Liu Y, Cao Q, Yang P, Zhang S, Plenio M B, Jelezko F, Cai J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 210501
- [14] Roushan P, Neill C, Megrant A, et al. 2017 *Nat. Phys.* **13** 146
- [15] Yan Z, Zhang Y R, Gong M, et al. 2019 *Science* **364** 753
- [16] Heyl M, Polkovnikov A, Kehrein S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 135704
- [17] Budich J C, Heyl M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085416
- [18] Huang Z, Balatsky A V 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 086802
- [19] Wang C, Zhang P, Chen X, Yu J, Zhai H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 185701
- [20] Heyl M 2018 *Rep. Prog. Phys.* **81** 054001
- [21] Fläschner N, Vogel D, Tarnowski M, et al. 2018 *Nat. Phys.* **14** 265
- [22] Zhou L W, Wang Q H, Wang H L 2018 *Phys. Rev. A* **98** 022129
- [23] Qiu X, Deng T S, Guo G C, Yi W 2018 *Phys. Rev. A* **98** 021601
- [24] Tarnowski M, Ünal F N, Fläschner N, Rem B S, Eckardt A, Sengstock K, Weitenberg C 2019 *Nat. Commun.* **10** 1728
- [25] Deng T S, Yi W 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040303 (in Chinese) [邓天舒, 易为 2019 *物理学报* **68** 040303]
- [26] Zhang L, Zhang L, Niu S, Liu X J 2018 *Science Bulletin* **63** 1385
- [27] Zhang L, Zhang L, Liu X J 2019 *Phys. Rev. A* **99** 053606
- [28] Yang C, Li L, Chen S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 060304
- [29] Gong Z, Ueda M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250601
- [30] Qiu X, Deng T S, Hu Y, Xue P, Yi W 2019 *iScience* **20** 392
- [31] Sun W, Yi C R, Wang B Z, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250403
- [32] Defenu N, Enss T, Halimeh J C 2019 *Phys. Rev. B* **100** 014434
- [33] Ünal F N, Bouhon A, Slager R J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 053601
- [34] Uhrich P, Defenu N, Jafari R, Halimeh J C 2020 *Phys. Rev. B* **101** 245148
- [35] Kitagawa T, Berg E, Rudner M, Demler E 2010 *Phys. Rev. B* **82** 235114
- [36] Rudner M S, Lindner N H, Berg E, Levin M 2013 *Phys. Rev. X* **3** 031005
- [37] Eckardt A 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 0111004
- [38] Wang K, Qiu X, Xiao L, Zhan X, Bina Z, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 020501
- [39] Yang K, Zhou L, Ma W, Kong X, Wang P, Qin X, Rong X, Wang Y, Shi F, Gong J, Du J 2019 *Phys. Rev. B* **100** 085308
- [40] Wang K, Qiu X, Xiao L, Zhan X, Bian Z, Sanders B C, Yi W, Xue P 2019 *Nat. Commun.* **10** 2293
- [41] Cheng Q, Pan Y, Wang H, Zhang C, Yu D, Gover A, Zhang H, Li T, Zhou L, Zhu S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 173901
- [42] Mukherjee S, Rechtsman M C 2020 *Science* **368** 856
- [43] Zamani S, Jafari R, Langari A 2020 *Phys. Rev. B* **102** 144306
- [44] Jafari R, Akbari A 2021 *Phys. Rev. A* **103** 012204
- [45] Cai D H, Yi W 2022 *Phys. Rev. A* **105** 042812
- [46] Liu X J, Liu X Z, Cheng M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 076401
- [47] Liu X J, Law K T, Ng T K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 086401
- [48] Pan J S, Liu X J, Zhang W, Yi W, Guo G C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 045303

# Dynamic topological phenomena in periodically driven Raman lattice\*

Cai De-Huan<sup>1)2)3)†</sup> Qu Su-Ping<sup>3)</sup>

1) (Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China)

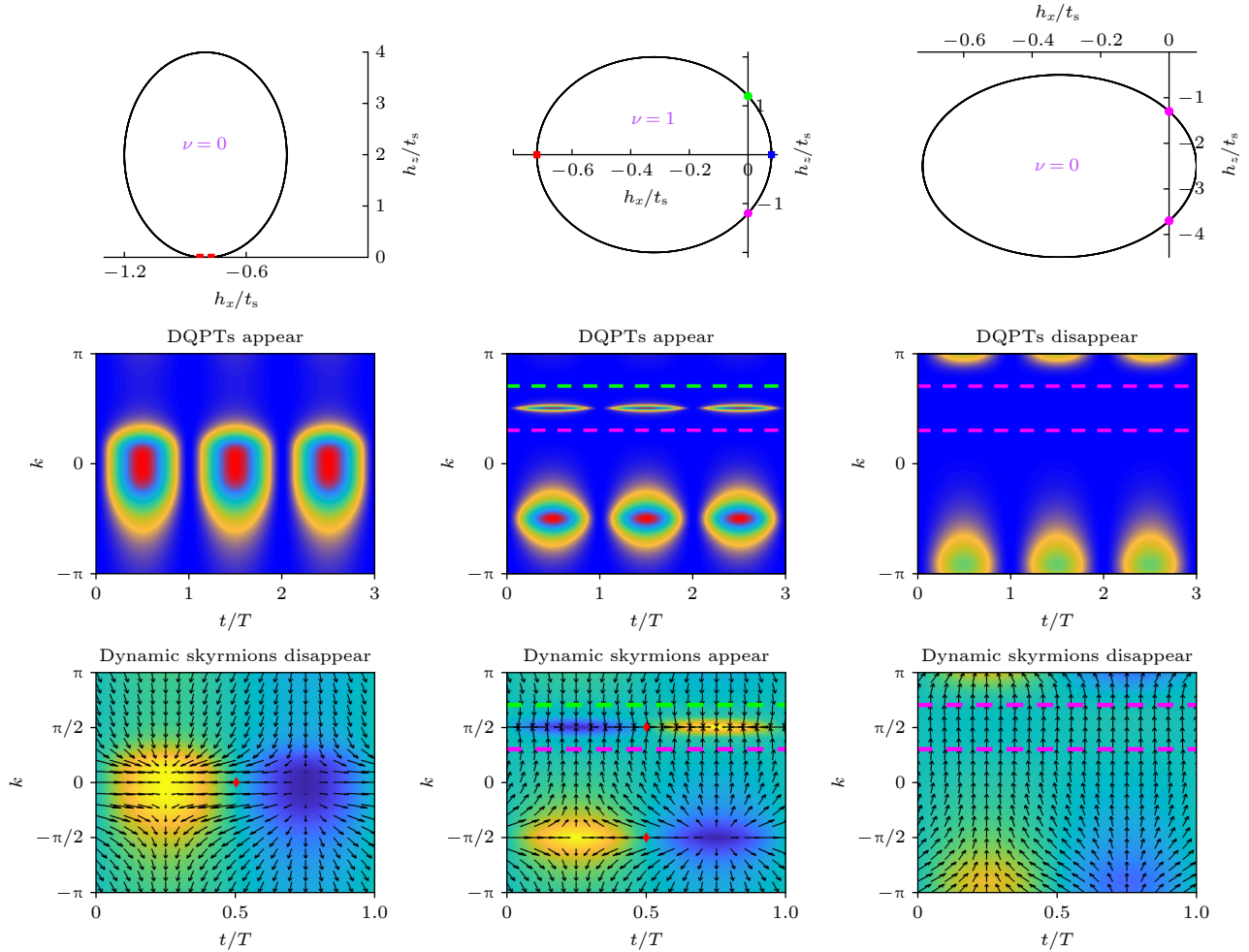
2) (CAS Center For Excellence in Quantum Information and Quantum Physics, Hefei 230026, China)

3) (Bengbu University, Bengbu 233030, China)

(Received 17 April 2024; revised manuscript received 17 May 2024)

## Abstract

According to the recent experimental progress of simulating energy band topology and dynamic quantum phase transitions (DQPTs) in ultracold atomic systems, we develop a periodically driven one-dimensional (1D) Raman lattice system to simulate dynamic topological phenomena. By utilizing amplitude-periodically



\* Project supported by the Innovation Program for Quantum Science and Technology, China (Grant No. 2021ZD0301200), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11974331), the Natural Science Foundation for Universities of Anhui Province, China (Grant No. KJ2021A1130), and the College Youth Talent Support of Anhui Province, China (Grant No. gxyq2022111).

† Corresponding author. E-mail: [dhcai@ustc.edu.cn](mailto:dhcai@ustc.edu.cn)

modulated Raman beams to couple the  $\{^1S_0, ^3P_1\}$  manifolds of alkaline-earth-like atoms  $^{171}\text{Yb}$ , we can realize the desired periodically driven Raman lattice. Utilizing the single-band, tight-binding Hamiltonian of the time-periodic system, we analytically determine the effective Floquet Hamiltonian and the micromotion operator. These allow us to investigate the conditions under which Floquet dynamic quantum phase transitions and dynamic skyrmion structures emerge at any driving frequency in the 1D Raman lattice. When the corresponding vector trajectory of the effective Floquet Hamiltonian has a non-zero winding number ( $\nu \neq 0$ ), the system exhibits both Floquet dynamic quantum phase transitions and dynamic skyrmion structures. For  $\nu = 0$ , Floquet dynamic quantum phase transitions may still occur, but dynamic skyrmion structures will definitely disappear. Therefore, the topologically nontrivial nature of the effective Floquet Hamiltonian is a sufficient but not necessary condition for the onset of the Floquet dynamic quantum phase transitions. But it is a necessary and sufficient condition for the onset of the dynamical skyrmion structures.

**Keywords:** topological phase, dynamical quantum phase transition, ultracold atoms, Raman lattice

**PACS:** 03.65.Vf, 03.75.Kk, 03.75.Ss

**DOI:** [10.7498/aps.73.20240535](https://doi.org/10.7498/aps.73.20240535)



## 周期驱动拉曼晶格系统中的动力学拓扑现象

蔡德欢 屈苏平

### Dynamic topological phenomena in periodically driven Raman lattice

Cai De-Huan Qu Su-Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 140301 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240535

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240535>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 超冷原子动量光晶格中的非线性拓扑泵浦

Nonlinear topological pumping in momentum space lattice of ultracold atoms

物理学报. 2023, 72(16): 160302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230740>

#### 两次淬火下横场中XY链的动力学量子相变

Dynamical quantum phase transitions in transverse field XY chain after a double quench

物理学报. 2021, 70(18): 180502 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210728>

#### 基于动力学平均场的光晶格超冷原子量子模拟

Quantum simulation of ultracold atoms in optical lattice based on dynamical mean-field theory

物理学报. 2023, 72(18): 183701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230701>

#### 一维超冷原子动量光晶格中的手征对称性破缺拓扑相

Topological phase in one-dimensional momentum space lattice of ultracold atoms without chiral symmetry

物理学报. 2024, 73(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231566>

#### 基于Yu-Shiba-Rusinov态的拓扑超导理论

Theory of topological superconductivity based on Yu-Shiba-Rusinov states

物理学报. 2020, 69(11): 117401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200831>

#### 双层石墨烯中的偶数分母分数量子霍尔态

Even-denominator fractional quantum Hall state in bilayer graphene

物理学报. 2022, 71(18): 187202 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220905>