

## 黏弹性介质包裹的液体腔内球状泡群耦合振动模型\*

左馨怡 雷照康 武耀蓉 王成会†

(陕西师范大学, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710062)

(2024年5月1日收到; 2024年6月13日收到修改稿)

高强度超声可激发生物组织空化, 软组织常被当作黏弹性介质, 因此, 黏弹性介质中气泡动力学行为研究可为超声生物治疗提供理论支持. 为探索组织液内多气泡动力学影响, 构建了球形液体腔内的球状泡团模型, 考虑了液体腔外黏弹性介质的动力学效应, 得到了球状泡群内气泡耦合振动方程, 并基于此分析了气泡的振动行为. 结果表明, 腔体以及泡群约束虽抑制了气泡振动, 但在一定程度上还可以增强气泡的非线性振动特性. 约束环境下气泡的非球形振动稳定性主要受驱动声波压力幅值和频率、气泡初始半径以及气泡数密度影响, 而腔体半径的影响随驱动压力的增加而增强; 存在最小不稳定驱动声压阈值, 不同初始半径的气泡不稳定振动阈值压力不同且不稳定分布区主要分布在小于  $4\ \mu\text{m}$  的范围内; 驱动频率增大, 气泡振动不稳定区的声压阈值也随之增大, 且不稳定区域有减小的趋势; 随着气泡数密度的增加, 气泡不稳定区域逐渐向无规则的斑图状分布, 极易受到扰动发生不稳定振动而崩溃. 高频声波激励下平衡半径大于  $4\ \mu\text{m}$  范围内气泡的惯性空化阈值受频率和气泡数密度的影响显著.

**关键词:** 球状泡群, 液体腔, 空化气泡, 耦合振动**PACS:** 43.35.+d, 43.25.+y, 47.55.dp**DOI:** 10.7498/aps.73.20240606

## 1 引言

随着超声空化技术在生物医学领域的广泛应用, 组织空化成核问题受到越来越多的关注, 主要涉及两方面研究: 一是与安全性相关超声剂量问题, 二是如何基于特定的治疗需求调控局域声空化强度问题. 高强度超声激发人体组织产生空化气泡, 其在声波的激励下振荡形成次级声辐射; 大振幅振动气泡的膨胀、收缩乃至崩溃可改变其周围的流速场和介质的应力应变分布, 进而激发邻近细胞的动力学响应并产生一定的生物学效应<sup>[1]</sup>. 研究空化泡在液体腔内的动力学行为可为超声肿瘤治疗<sup>[2-4]</sup>、药物输送<sup>[5-7]</sup>和炎症靶向显影<sup>[8-10]</sup>等提供理论和实验支持. 另外, 植物中充满液体的导管将水分从根部输送到叶子, 而导管内气泡的存在被

认为是导致植物干旱死亡的一个重要原因<sup>[11]</sup>. 因此, 管腔等封闭或者半封闭空间内的气泡动力学问题的研究有助于理解气泡引起的局域生物物理效应.

高强度的超声可以在软组织中引起空化, 生物组织可近似认为是黏弹性介质; Tanasawa 和 Yang<sup>[12]</sup>首次发展了黏弹性流体中气泡的非线性振荡模型, 发现存在弹性时黏弹性阻尼对气泡坍塌影响小于纯流体. 为探索局域空间内的气泡动力学, 人们构建了球腔液体内气泡的自由振荡模型<sup>[13]</sup>, 以解释负压作用下在凝胶中观察到的气泡快速振荡的行为<sup>[14]</sup>. 理论分析表明, 约束在液体腔内的气泡振动受约束边界的影响, 如液体腔的大小、包裹液体腔的介质特性等. Yang 和 Church<sup>[15]</sup>考虑腔外介质弹性影响对 Keller-Miksis 方程的黏性阻尼项进行了修正, 将 Voigt 黏弹性模型引入动力学方程研究

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12374441, 11974232, 12074238) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangld001@snnu.edu.cn

介质弹性对气泡振荡的影响,发现弹性的存在使得气泡的惯性空化阈值提高. Wang<sup>[13]</sup>通过假设腔体体积变化与约束壁上的液体压力成正比,考虑黏性以及表面张力的影响,得到了约束在弹性固体所包裹的液体腔中的单气泡的 Rayleigh-Plesset 方程,通过理论和数值分析发现弹性约束相对于无界液体中气泡的振荡频率增大,气泡在更长的时间和更大的平衡半径下达到稳定状态. Konstantin 和 Iskander<sup>[16]</sup>研究了限制在无限弹性固体包裹的液体腔中单个空化气泡的动力学,发现体积约束显著地影响经典 Blake 空化阈值,并当液体腔尺寸小于临界尺寸时,气泡空化被完全抑制. 张陶然等<sup>[17]</sup>利用 Voigt 黏弹性模型,推导了生物组织中气泡径向振动方程,探究了组织的黏弹性对气泡的惯性空化阈值的影响,结果表明,随着组织剪切模量越大,驱动频率越高,腔体半径越小气泡惯性空化阈值越高. 张先梅等<sup>[18,19]</sup>构建了弹性介质包裹的液体腔内的气泡振动模型,推导了考虑腔外介质弹性影响的气泡动力学方程. 研究结果表明,在声场驱动下气泡核快速生长到新的平衡半径后振荡,当超声频率与气泡固有振荡频率相近时气泡剧烈振荡几个周期后崩溃;空化泡的成核时间对气核的初始位置很敏感<sup>[18,19]</sup>. 液体微腔内气泡动力学行为的理论和实验研究可为认识组织空化奠定基础,也可为适应不同需求的超声剂量的调控提供理论依据. Gaudron 等<sup>[20]</sup>基于 Kelvin-Voigt 模型和 Rayleigh-Plesset 方程发展了非球形振动单气泡模型,并研究了其形状稳定性,发现当介质剪切模量增加时,形状稳定性增强. 组织空化通常会引起温升效应, Zilonova 等<sup>[21]</sup>通过引入耦合温度空化模型来研究聚焦超声作用下软组织中气泡振动相关的能量转化,发现软组织中的振荡气泡内外存在连续的温度分布,软组织弹性越大气泡内温度越低.

现有的组织空化模型通常建立在单气泡动力学基础之上,但空化气泡往往并不是单独存在的<sup>[22]</sup>,且气泡之间存在相互作用,因此,有必要进一步发展双泡<sup>[23]</sup>或多气泡动力学,以解释气泡的团聚行为及其空化影响. An 等<sup>[24,25]</sup>基于多气泡的聚集特征,发展了无限大液体介质中的球状泡群模型分析气泡振动,发现泡群内不同位置的气泡动力学行为相差不大,可能存在同步崩溃现象;王成会等<sup>[26]</sup>考虑气泡间耦合振动影响,发展了均匀球状泡群内振动气泡的动力学方程,并以此分析了气泡

的非线性声响应,发现气泡的耦合振动会削弱单个气泡的空化影响,但整体空化效应增强;研究证实,泡群内气泡数量对气泡的振荡行为有显著的影响,通过增加气泡数量可以增强气泡之间的相互作用,进一步抑制气泡空化<sup>[27-29]</sup>. 因此,气泡分布较为密集的区域气泡间的相互作用不能忽略. 为分析组织空化相关的耦合动力学效应,本文在黏弹性介质包裹的液体腔中单个空化气泡动力学基础上,考虑气泡之间的相互作用,发展液体腔中球状泡群内气泡的耦合振动模型,预测约束环境下多气泡体系中的气泡振荡行为和空化影响.

## 2 理论模型

超声波在黏弹性液体介质传播,若其强度超过空化阈值,可激发空化效应,常表现为复杂的多气泡聚集结构<sup>[30]</sup>,如葡萄串状、局域球状团簇等. 对液体微腔而言,其体积小,又因约束影响,一定强度的超声或者环境负压所激发的空化气泡被限定在有限体积内彼此间形成相互强耦合影响,仅考虑液体球腔内的单气泡动力学不足以更好地预测其空化影响. 为此,引入图 1 所示的黏弹性介质包裹球形液体腔内气泡球状分布的简化模型,发展液体腔内的多气泡动力学理论. 为简化分析,做如下假设: 1) 球状泡群处于液体腔中心位置,泡群内气泡均匀分布且气泡半径相同; 2) 腔体内液体不可压缩; 3) 忽略泡群中气泡内外质量交换; 4) 忽略泡群边界处液体质量的交换; 5) 泡群内气泡几乎同步振动且忽略泡群边界处声辐射对泡群边界的影响; 6) 不考虑气泡-液体界面之间的传热.

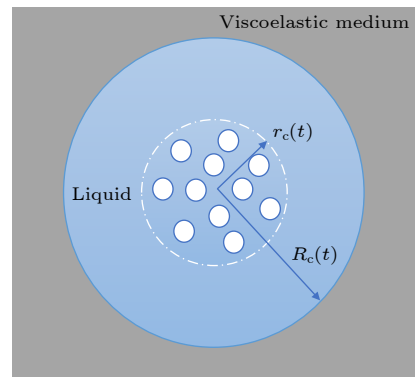


图 1 黏弹性介质包裹的液体腔中球状泡群

Fig. 1. Bubble cluster in a liquid confined in a viscoelastic medium.

由于气泡之间的相互作用, 泡群内气泡的径向振动将引起泡群边界面的振动, 忽略气泡周围液体的可压缩性, 泡群边界振动的动力学方程可表示为<sup>[17]</sup>

$$(r_c \ddot{r}_c + 2\dot{r}_c^2) \left(1 - \frac{r_c}{R_c}\right) - \frac{\dot{r}_c^2}{2} \left(1 - \frac{r_c^4}{R_c^4}\right) = \frac{1}{\rho}(p_c - p_{lc}), \quad (1)$$

式中,  $p_c$  为泡群内液体压力;  $\rho$  为液体密度;  $r_c$  和  $R_c$  分别为泡群半径和液体腔半径;  $\dot{r}_c$  为泡群边界振动速度; 腔体内壁处的液体压力  $p_{lc}$  可以表示为<sup>[17]</sup>

$$p_{lc} = p_0 + p_a \sin \omega t - \tau_{rr}|_{r=R_c}, \quad (2)$$

其中,  $\tau_{rr}|_{r=R_c}$  为腔壁外侧的介质应力, 表示为

$$\tau_{rr}|_{r=R_c} = -4 \left[ \frac{G(R_c^3 - R_{c0}^3)}{3R_c^3} + \mu \frac{\dot{R}_c}{R_c} \right]. \quad (3)$$

这里  $R_{c0}$  和  $\dot{R}_c$  为初始液体腔半径和液体腔边界振动速度;  $G$  和  $\mu$  分别为腔壁外侧介质的剪切模量和黏性系数;  $p_0$  为液体静态压力;  $p_a$  为驱动声压幅值;  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  为驱动声压频率.

超声波作用下, 含有  $N$  个气泡的泡群的体积变化与液体腔的体积变化相同, 都等于泡群内所有气泡的体积变化总和, 即

$$R_c^3 = R_{c0}^3 + N(r_b^3 - r_{b0}^3), \quad (4)$$

$$r_c^3 = r_{c0}^3 + N(r_b^3 - r_{b0}^3), \quad (5)$$

式中,  $r_{b0}$  和  $r_{c0}$  分别为气泡初始半径和球状泡群初始半径;  $r_b$  为气泡瞬时半径.

考虑气泡间的相互作用后, 球状泡群内的气泡振动的动力学方程为<sup>[24]</sup>

$$\left(1 - M + \frac{3}{2}M_0\right) r_b \ddot{r}_b + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{M}{3} + 2M_0\right) \dot{r}_b^2 = (1 + M) \frac{1}{\rho}(p_b - p_c) + \frac{t_R}{\rho} \dot{p}_b, \quad (6)$$

式中,  $M = \dot{r}_b/c$  为气泡壁马赫数;  $\dot{r}_b$  和  $\ddot{r}_b$  分别为气泡壁的径向运动速度和加速度;  $t_R = r_b/c$ ,  $c$  为液体中的声速;  $M_0 = N \frac{r_b}{r_c} \left(1 - \frac{r_0^2}{3r_c^2}\right)$  为考虑气泡之间的相互作用后引入的项,  $r_0$  为气泡在泡群中的位置, 因此, 气泡的振动与其在泡群内的相对位置有关. 对于小泡群而言, 气泡相对位置影响较小, 可近似认为所有气泡做同步振动<sup>[24]</sup>, 因此, 取液体腔中心处的气泡作为代表, 即取  $r_0 = 0$ . 由动力学

边界条件可知, 气泡的散射压力  $p_b$  可以表示为

$$p_b = p_g - \frac{2\sigma}{r_b} - 4\eta \frac{\dot{r}_b}{r_b}, \quad (7)$$

式中,  $\sigma$  和  $\eta$  分别为液体表面张力系数和黏滞系数;  $p_g$  为气泡内气体压力, 可以表示为

$$p_g = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r_{b0}}\right) \left(\frac{r_{b0}^3 - h^3}{r_b^3 - h^3}\right)^\kappa, \quad (8)$$

其中,  $p_0$  为初始状态下的液体压力,  $h$  为气泡硬核半径, 当气泡内气体是空气时,  $h = r_{b0}/8.54$ , 气体的多方指数  $\kappa = 4/3$ .

联立 (1)–(8) 式消去  $p_c$  即可求解黏弹性介质包裹液体腔内球状泡群内气泡的动力学方程. 对比液体腔内的单泡模型<sup>[17]</sup>, 本文的模型是考虑了液体腔内气泡之间的相互作用以及泡群边界对于气泡振荡的影响后的简化模型. 当  $R_c \rightarrow \infty$  时, 有  $r_c/R_c \rightarrow 0$ ,  $r_c^4/R_c^4 \rightarrow 0$  以及  $\tau_{rr}|_{r=R_c} \rightarrow 0$ , 则  $p_{lc} = p_0 + p_a \sin \omega t$ , 方程 (1) 和方程 (6) 消去  $p_c$  后可退化为无限大液体泡群内气泡的动力学方程<sup>[26]</sup>.

## 3 数值分析与讨论

### 3.1 模型比较

为了更好地了解考虑气泡间相互作用的黏弹性介质包裹的球状泡群的动力学行为, 联立方程 (1) 和方程 (6) 运用龙格-库塔法进行求解, 并分析数值计算结果预测气泡的动力学行为. 在不作特殊说明情况下, 腔体内液体为水, 黏弹性介质采用软组织参数  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\sigma = 0.056 \text{ N/m}$ ,  $\mu = 0.015 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

在相同的计算条件下, 使用文献<sup>[26]</sup>中的参数, 设置参数  $f = 20 \text{ kHz}$ ,  $p_a = 1.5p_0$ ,  $N = 300$ ,  $r_{b0} = 5 \mu\text{m}$ ,  $r_{c0} = 1 \text{ mm}$ ,  $R_{c0} = 2 \text{ mm}$ , 联立方程 (1) 和方程 (6) 对液体腔内气泡耦合振动进行动力学分析 (model 1), 并将结果与王成会等<sup>[26]</sup>的球状泡群内气泡的耦合振动方程 (model 2) 以及单气泡动力学方程 (single bubble) 进行比较, 如图 2(a) 所示. 由于气泡间相互作用相关的抑制效应, 相比于无限大液体介质中声波驱动的单气泡而言, 泡群内气泡的振动受到抑制, 表现为气泡在声压的舒张相能够膨胀达到的最大无量纲半径由 13.75 (single bubble) 减小至 5.47 (model 1). 当泡群处在黏弹性介质包裹的液体腔中时, 尽管腔外介质增加了约

束影响,但在泡群以及液体腔相关参数的共同作用下,仍可能减弱对气泡振动的抑制影响,同时还可能推迟气泡的崩溃相位和减弱崩溃强度,表现为气泡达到最小半径时所对应的无量纲时间分别为 0.67 (model 1) 和 0.64 (model 2). 因此,在讨论一定强度的超声波作用于生物组织形成的空化效应时,组织的黏弹性对气泡振动行为的影响不能忽略. 设  $f = 20 \text{ kHz}$ ,  $p_a = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $N = 1$ ,  $r_{b0} = 2 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $r_{c0} = 10 \text{ }\mu\text{m}$ , 且腔体半径为  $200 \text{ }\mu\text{m}$  时,将本文的模型与 Wang<sup>[13]</sup> 等提出的弹性介质包裹的液体腔内单气泡空化模型 (model 3) 进行对比,如图 2(b) 所示. 在给定声场参数且驱动声压比较小的情形下,液体腔尺度对腔内单气泡振动行为的影响不大,几乎可以忽略不计. 两个模型在气泡膨胀相能够达到的最大值也差异不大,验证了本文提出的腔体内的泡群振动模型的可靠性.

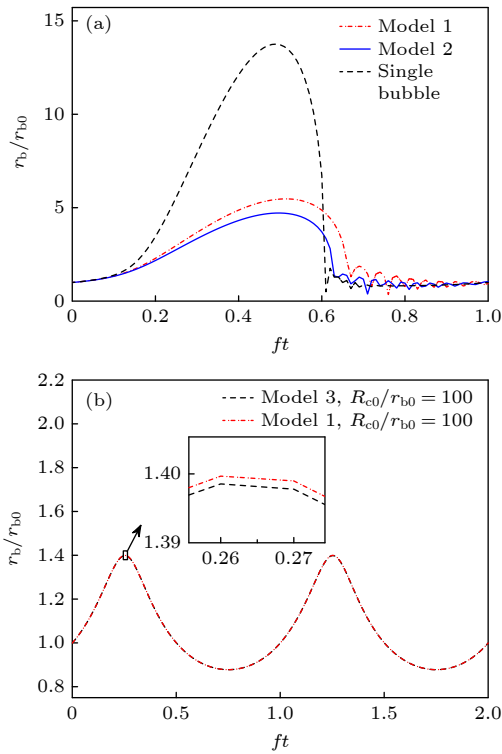


图 2 不同模型下气泡振荡对比图 (a) 本文模型 (model 1) 与球状泡群内气泡的耦合振动模型 (model 2) 以及单泡模型 (single bubble) 对比; (b) 本文模型与弹性介质包裹的液体腔内单气泡空化模型 (model 3) 对比

Fig. 2. Comparison of different models of bubble oscillations: (a) The model in this paper (model 1) is compared with the coupled oscillation model of bubble cluster in the infinite liquid (model 2) and the single bubble model (single bubble); (b) the model in this paper (model 1) is compared with the model of a single bubble in a liquid cavity enclosed by elastic medium (model 3).

### 3.2 气泡振动特性分析

Vincent 等<sup>[14]</sup> 通过实验研究了初始半径小于  $200 \text{ }\mu\text{m}$  的液体腔,观察到了液体腔内单气泡尺寸约为腔体尺寸的 0.28 倍,在更小微腔内高强度超声可能激发更小的空化泡振动. 声波频率和声压幅值等参量可用于调控空化气泡的振动行为. 为探索气泡的声响应特性,设驱动声波频率  $f = 1 \text{ MHz}$ ,  $p_a = 1.5p_0$ ,  $N = 10$ ,  $r_{c0} = 50 \text{ }\mu\text{m}$  和  $R_{c0} = 200 \text{ }\mu\text{m}$ , 分析黏弹性介质包裹的液体腔的气泡动力学特征. 图 3(a) 给出了平衡半径为  $0.5\text{--}10 \text{ }\mu\text{m}$  的气泡振动分岔图,在小于  $2 \text{ }\mu\text{m}$  的范围内气泡振荡的非线性较弱,在  $4 \text{ }\mu\text{m}$  附近出现了二分岔结构在此范围内非线性较强. 液体腔外介质剪切模量的增加可抑制气泡的振动和非线性行为 (图 3(b)). 图 3(c) 是初始半径为  $1, 2$  和  $3 \text{ }\mu\text{m}$  时气泡的振动最大半径随泡群内气泡数的变化. 可以看出,气泡数的变化可影响  $1 \text{ }\mu\text{m}$  气泡的共振声响应,主要表现为在气泡数密小于  $2000$  的范围内,振动气泡最大无量纲半径有 2 个共振峰,整体而言,由于群振动气泡的抑制效应,随着气泡数密度增加振动减弱. 由图 3(d) 可知,在给定声波频率和声压条件下,气泡的初始半径不同,能达到的无量纲最大半径不同. 在  $0.5\text{--}10 \text{ }\mu\text{m}$  范围内,随着气泡初始半径的增加,最大无量纲幅值存在多个共振峰,主共振峰在  $2 \text{ }\mu\text{m}$  附近,且随着气泡数密度的增加,主共振峰有左移的趋势. 这表明泡群的抑制效应导致系统内气泡的共振半径减小,可以激发更小的气泡的共振响应,非线性增强. 由于气泡的振动行为同时受到多种因素影响,如驱动声波压力、环境压力、气泡数密度等,特别是在高密度气泡分布的强非线性环境下,微气泡极易聚并为初始半径略大的空化气泡,导致气泡数密度减小,进而增强空化影响.

### 3.3 非球形稳定性分析

当气泡的球形振动受到非球形扰动时,随着时间的变化气泡可能恢复球形,也可能偏移球形最终崩溃. 非球形气泡的  $n$  阶形状模态振幅  $a_n$  可以表示为<sup>[25]</sup>

$$\ddot{a}_n(t) + B_n(t)\dot{a}_n(t) - A_n(t)a_n(t) = 0, \quad (9)$$

其中

$$B_n = 3 \frac{\dot{r}_b}{r_b} - 2(n+2) \left[ (n-1)(n+1) - \frac{n(n+2)}{1+2\delta/r_b} \right] \frac{\eta}{\rho r_b^2}, \quad (10)$$

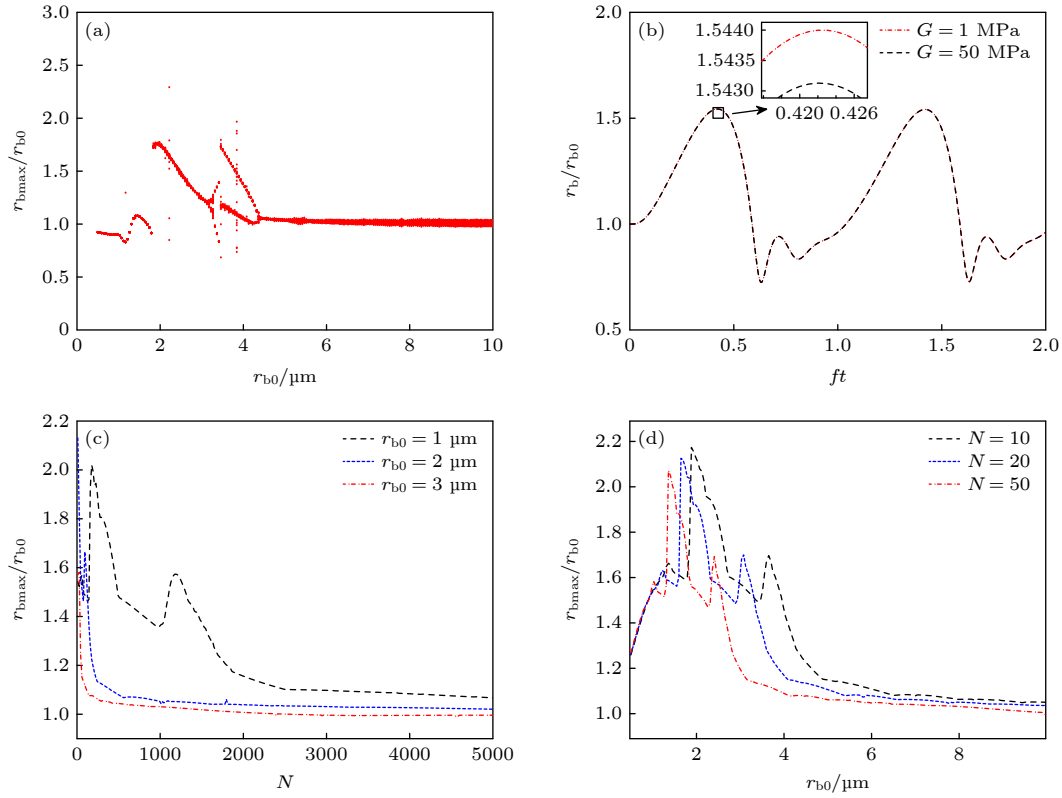


图 3 气泡振动特性 (a) 气泡振动分岔图; (b) 不同介质剪切模量下气泡径向振荡; (c) 气泡数量对气泡最大半径的影响; (d) 初始气泡半径对气泡最大半径的影响

Fig. 3. Bubble oscillations characteristics: (a) Bubble oscillations bifurcation diagram; (b) radial oscillations of bubble under different medium shear moduli; (c) effect of the number of bubbles on maximum bubble radius; (d) effect of initial bubble radius on maximum bubble radius.

$$A_n = \frac{n-1}{r_b} \left[ \ddot{r}_b - (n+1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho r_b^2} - 2(n+2) \left( n+1 - \frac{n}{1+2\delta/r_b} \right) \frac{\eta \dot{r}_b}{\rho r_b^2} \right], \quad (11)$$

$$\delta = \min \left( \sqrt{\frac{\eta}{\omega \rho}}, \frac{r_b}{2n} \right). \quad (12)$$

为了更好地判断气泡的球形振动稳定性, 以气泡的非球形系数与初始半径的比值  $a_n/r_{b0}$  为分析对象, 若  $a_n/r_{b0} < 1$ , 泡群内气泡做稳定的非球形振荡, 若  $a_n/r_{b0} > 1$  则泡群内气泡做不稳定的非球形振荡, 气泡则会逐渐崩溃. 非球形振动的二阶气泡表面振动模式影响处于主导地位<sup>[31]</sup>, 故在分析过程中设  $n = 2$ . 设置参数  $f = 1$  MHz,  $N = 10$ ,  $r_{c0} = 50$   $\mu\text{m}$ ,  $R_{c0} = 200$   $\mu\text{m}$ ,  $G = 1$  MPa,  $r_{b0}$ - $p_a$  参数平面如图 4(a) 所示, 图中稳定区域为黑色, 不稳定区域为白色. 不稳定区域主要分布在气泡初始半径小于 3.8  $\mu\text{m}$  和驱动声压大于 0.1 MPa 的范围内, 且呈非均匀的斑点状分布. 这说明气泡振动的非球形稳定特性对声压和初始半径参数极为敏感, 微小的

扰动则可能导致气泡较强的非线性振动, 进而激发气泡崩溃形成空化影响. 在初始气泡半径为 0.5  $\mu\text{m}$  时对应的最小不稳定驱动声压阈值约为 0.29 MPa, 且随着初始气泡半径的增大, 最小不稳定驱动声压阈值减小, 较低的声压即可驱动气泡进行不稳定的非球形振荡.

为进一步认识气泡的稳定特性, 取  $r_{b0} = 0.5$   $\mu\text{m}$ , 在其他参数不变的情况下, 改变气泡数量和驱动压力得到  $N$ - $p_a$  参数平面, 如图 4(b) 所示. 当声压幅值超过 0.29 MPa, 气泡振动逐渐过渡到不稳定区, 且不稳定区分布在本文考察的整个气泡数量分布区间内, 表现为条纹状或斑点状. 因此, 在足够强的声压作用下, 可激发更小的微泡从稳定区变化到不稳定区, 产生空化影响. 其他参数不变的情况下, 改变初始液体腔半径的参数扫描结果 (图 4(c)) 表明, 不稳定区主要分布在驱动声压大于 0.29 MPa 的区域, 不稳定区内夹杂有几乎与液体腔半径变化无关的条带状稳定区域. 由此可以看出, 在此区间内的液体腔半径变化对气泡不稳定

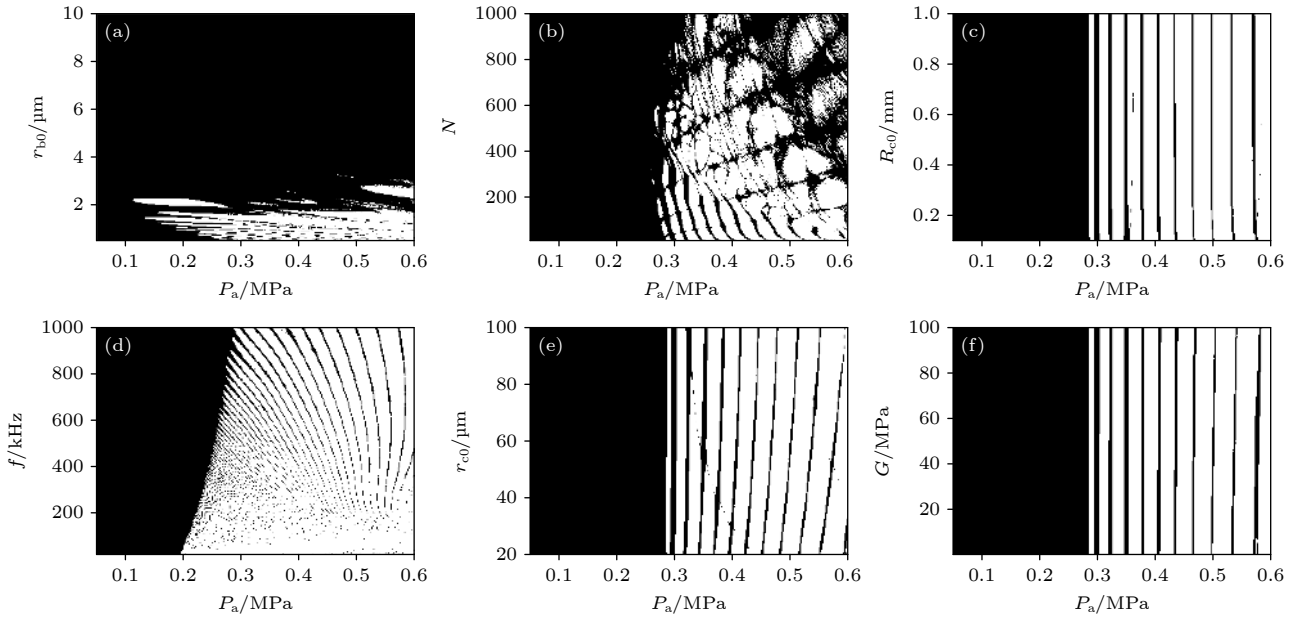


图 4 不同参数平面上气泡非球形系数与气泡半径比值  $a_n/r_{b0}$  (a)  $r_{b0}$ - $p_a$  参数平面; (b)  $N$ - $p_a$  参数平面; (c)  $R_{c0}$ - $p_a$  参数平面; (d)  $f$ - $p_a$  参数平面; (e)  $r_{c0}$ - $p_a$  参数平面; (f)  $G$ - $p_a$  参数平面 (黑色, 稳定; 白色, 不稳定)

Fig. 4. Ratio of bubble nonsphericity coefficient to bubble radius in different parameter planes: (a)  $r_{b0}$ - $p_a$  parameter plane; (b)  $N$ - $p_a$  parameter plane; (c)  $R_{c0}$ - $p_a$  parameter plane; (d)  $f$ - $p_a$  parameter plane; (e)  $r_{c0}$ - $p_a$  parameter plane; (f)  $G$ - $p_a$  parameter plane (black, stable; white, unstable).

性的影响较小, 气泡不稳定性主要受驱动声波压力控制. 驱动声波频率与声压幅值参数平面 (图 4(d)) 表明, 驱动声波频率和幅值变化对气泡不稳定性影响具有协同效应, 随着声波频率的增大, 不稳定区域对应的最小不稳定驱动声压阈值由 0.19 MPa 增至 0.29 MPa, 声压不稳定区域减小; 在不稳定区域内存在弧形射线状黑色条带相间分布, 以及在较低频率区有散点或短弧线状分布, 表现在不同的频率区间内气泡的声响应存在模式差异. 比较图 4(c)、图 4(e) 和图 4(f) 发现, 在给定的参数范围内, 液体腔外介质、剪切模量以及泡群半径变化对气泡不稳定性影响都相对较弱, 表现为图 4(c) 和图 4(f) 出现了几乎只与驱动声波幅值有关的条纹状不稳定区域. 这可能是由于研究所选取的初始气泡半径很小, 表面张力影响显著, 且气泡数量少而液体微腔尺寸相对较大导致腔体的弹性以及腔体的尺寸对于气泡的非球形稳定性影响减弱, 但高声压条件下泡群半径变化的影响将逐渐增强. 因此, 在所选参数范围内, 气泡初始半径、驱动声压幅值、声频率以及气泡数密度是影响气泡稳定特性的主要因素, 但尽管其他参量影响较小, 但强非线性环境下基于不同应用需求的合理的参数选择对声能量的有效利用仍然非常重要.

### 3.4 惯性空化阈值分析

气泡的惯性空化阈值与超声波频率、气泡大小和周围介质特性等多种因素有关. 为分析液体腔内泡群中气泡振动特征, 采用可使振动气泡最大半径达到初始半径两倍时的声压幅值作为惯性空化阈值来分析气泡的空化影响<sup>[15]</sup>, 初始气泡半径范围为 0.1—10  $\mu\text{m}$ . 设  $f = 1 \text{ MHz}$ ,  $N = 10$ ,  $r_{c0} = 50 \mu\text{m}$ ,  $R_{c0} = 200 \mu\text{m}$ , 若设腔体的剪切模量分别为 1, 10 和 20 MPa 时, 惯性空化阈值随气泡半径的变化如图 5(a) 所示. 对初始半径小于 2  $\mu\text{m}$  的气泡而言, 腔体外介质的剪切模量对惯性空化阈值影响极小, 且空化阈值随气泡半径的增加先逐渐减小后过渡到一平坦区, 表明在同一声场中该初始半径区间内的空化气泡可能同步达到惯性空化区; 气泡初始半径为 2  $\mu\text{m}$  的气泡所对应的惯性空化阈值约为 0.16 MPa; 当气泡初始半径大于 2  $\mu\text{m}$ , 随着气泡初始半径的增加, 腔体外介质的剪切模量对惯性空化阈值的影响逐渐显现并增强, 而惯性空化阈值变化呈现小幅起伏变化且具有增加的趋势. 设  $G = 1 \text{ MPa}$ , 比较驱动声波频率分别为 1, 2, 3 MHz 时不同初始半径的空化阈值变化曲线发现, 惯性阈值保持与频率的正相关关系 (图 5(b)), 与无限大介质中单气泡空化阈值预测结果一致.

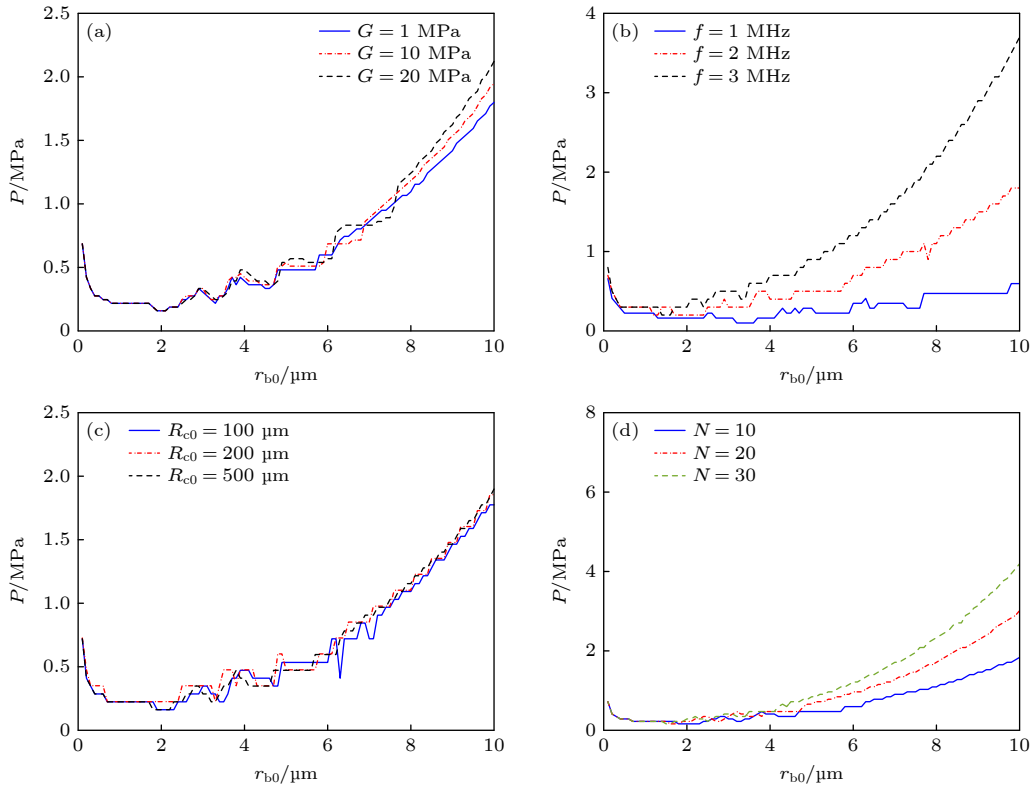


图 5 参数对气泡惯性空化阈值的影响 (a) 介质弹性; (b) 驱动频率; (c) 初始液体腔半径; (d) 气泡数量

Fig. 5. Influence of different parameters on the threshold of inertial cavitation of bubbles: (a) Shear modulus of medium; (b) driving frequency; (c) initial liquid cavity radius; (d) bubble number.

图 5(c) 是液体微腔半径分别为 100, 200 和 500  $\mu\text{m}$  时惯性空化阈值随气泡初始半径的变化。对比发现, 液体腔半径可影响惯性空化阈值的起伏变化特征, 但对阈值大小的影响较小。改变泡群中气泡数量分别为 10, 20 和 30 (图 5(d)) 发现, 由于气泡数量的增加可增强对泡群内振动气泡的抑制效应。因此, 对初始半径大于 2  $\mu\text{m}$  的气泡而言, 其惯性空化阈值随着气泡数的增加有增加的趋势, 但对初始半径在 2—5  $\mu\text{m}$  之间的气泡而言, 阈值变化曲线交替起伏变化, 说明在这个半径范围内的气泡振动非线性响应特性较为复杂, 可能也存在同步处于惯性空化区的状态, 与图 3(a) 显示的结果一致。实验研究证实高强度声场中空化气泡的最可几半径在 5  $\mu\text{m}$  左右 [32], 该范围内的空化气泡惯性空化阈值较低, 与之对应的强非线性振动有利于空化能量的转化利用, 理论预测与实验具有较好的一致性。

## 4 结 论

微腔内的声空化研究有助于理解气泡在约束状态下的动力学行为。高强度超声波激发生物组织

空化往往形成的多气泡体系, 气泡间的耦合相互作用不能忽略。空化通常在组织液内发生, 而组织液被黏弹性介质包裹, 因此发展黏弹性介质包裹的液体腔内的多气泡动力学具有重要意义。本文构建了黏弹性介质包裹的球状泡群的耦合振动动力学模型, 分析了泡群内气泡的振动特性, 主要考察了气泡初始半径、驱动声波压力幅值和频率以及液体腔半径、腔外介质剪切模量、泡群半径和数量等因素的影响, 分析了气泡振动的不稳定性 and 空化阈值。在 1 MHz 的高频声场中, 振动气泡的主共振响应半径在 2  $\mu\text{m}$  附近, 且随着气泡数密度的增加, 主共振半径有减小的趋势, 说明气泡数密度分布以及腔体弹性等参量影响泡群内气泡的共振响应。约束环境中泡群内振动气泡的不稳定性主要受驱动声场频率、声压幅值以及气泡初始半径和气泡数密度的影响, 高声压条件下泡群尺度变化对气泡振动的不稳定性的影响增强, 而液体腔半径和介质剪切模量对气泡振动的不稳定性影响较小。高频声波激励下, 初始半径 1—4  $\mu\text{m}$  附近气泡的惯性空化阈值较小, 更易于激发惯性空化, 且各参量对初始半径大于 4  $\mu\text{m}$  的气泡的惯性空化阈值影响更为显著。

## 参考文献

- [1] Kooiman K, Roovers S, Langeveld S A G, Kleven R T, Dewitte H, O'Reilly M A, Escoffre J M, Bouakaz A, Verweij M D, Hynynen K, Lentacker I, Stride E, Holland C K 2020 *Ultrasound Med. Biol.* **46** 1296
- [2] Xi F, Feng Y, Chen Q, Chen L, Liu J 2022 *Front. Oncol.* **12** 852454
- [3] Ellegala D B, Leong-Poi H, Carpenter J E, Klivanov A L, Kaul S, Shaffrey M E, Sklenar J, Lindner J R 2003 *Circulation* **108** 336
- [4] Lanza G M, Abendschein D R, Hall C S, Scott M J, Scherrer D E, Houseman A, Miller J G, Wickline S A 2000 *J. Am. Soc. Echocardiogr.* **13** 608
- [5] Lyons B, Balkaran J P R, Dunn-Lawless D, Lucian V, Keller S B, O'Reilly C S, Hu L A, Rubasingham J, Nair M, Carlisle R, Stride E, Gray M, Coussios C, Lu Y, Chen Z J 2023 *Molecules* **28** 7733
- [6] Wischhusen J, Padilla F 2019 *Irbm* **40** 10
- [7] Guzman H R, McNamara A J, Nguyen D X, Prausnitz M R 2003 *Ultrasound Med. Biol.* **29** 1211
- [8] Liu Y, Yang H, Sakanishi A 2006 *Biotechnol. Adv.* **24** 1
- [9] Unnikrishnan S, Klivanov A L 2012 *Am. J. Roentgenol.* **199** 292
- [10] Villanueva F S, Jankowski R J, Klivanov S, Pina M L, Alber S M, Watkins S C, Brandenburger G H, Wagner W R 1998 *Circulation* **98** 1
- [11] Schenk H J, Steppe K, Jansen S 2015 *Trends Plant Sci.* **20** 199
- [12] Tanasawa I, Yang W J 1970 *J. Appl. Phys.* **41** 4526
- [13] Wang Q X 2017 *Phys. Fluids* **29** 072101
- [14] Vincent O, Marmottant P, Gonzalez-Avila S R, Ando K, Ohl C D 2014 *Soft Matter* **10** 1455
- [15] Church C C, Yang X M 2006 *AIP Conf. Proc.* **838** 217
- [16] Leonov K, Akhatov I 2021 *Phys. Rev. E* **104** 015105
- [17] Zhang T R, Mo R Y, Hu J, Chen S, Wang C H, Guo J Z 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 124301 (in Chinese) [张陶然, 莫润阳, 胡静, 陈时, 王成会, 郭建中 2021 物理学报 **70** 124301]
- [18] Zhang X M, Wang C H, Guo J Z, Mo R Y, Hu J, Chen S 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 214305 (in Chinese) [张先梅, 王成会, 郭建中, 莫润阳, 胡静, 陈时 2021 物理学报 **70** 214305]
- [19] Zhang X M, Li F, Wang C H, Guo J Z, Mo R Y, Hu J, Chen S, He J X, Liu H H 2022 *Ultrason. Sonochem.* **84** 105957
- [20] Gaudron R, Murakami K, Johnsen E 2020 *J. Mech. Phys. Solids* **143** 104047
- [21] Zilonova E M, Solovchuk M, Sheu T W H 2019 *Ultrason. Sonochem.* **53** 11
- [22] Yasui K, Iida Y, Tuziuti T, Kozuka T, Towata A 2008 *Phys. Rev. E* **77** 016609
- [23] Wang X, Chen W, Zhou M, Zhang Z, Zhang L 2022 *Ultrason. Sonochem.* **84** 105952
- [24] An Y 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066313
- [25] Zhang W, An Y 2013 *Phys. Rev. E* **87** 053023
- [26] Wang C H, Mo R Y, Hu J, Chen S 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 234301 (in Chinese) [王成会, 莫润阳, 胡静, 陈时 2015 物理学报 **64** 234301]
- [27] Xu L, Yao X R, Shen Y 2024 *Chin. Phys. B* **33** 044702
- [28] Liu R, Huang C Y, Wu Y R, Hu J, Mo R Y, Wang C H 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 084303 [刘睿, 黄晨阳, 武耀蓉, 胡静, 莫润阳, 王成会 2024 物理学报 **73** 084303]
- [29] Li F, Zhang X M, Tian H, Hu J, Chen S, Wang C H, Guo J Z, Mo R Y 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 084303 (in Chinese) [李凡, 张先梅, 田华, 胡静, 陈时, 王成会, 郭建中, 莫润阳 2022 物理学报 **71** 084303]
- [30] Vincent O, Marmottant P, Quinto-Su P A, Ohl C D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 184502
- [31] Ma Y, Zhang G, Ma T 2022 *Ultrason. Sonochem.* **84** 105953
- [32] Weninger K R, Camara C G, Putterman S J 2001 *Phys. Rev. E* **63** 016310

# A model of coupled oscillation of bubble cluster in liquid cavity wrapped by viscoelastic medium\*

Zuo Xin-Yi    Lei Zhao-Kang    Wu Yao-Rong    Wang Cheng-Hui<sup>†</sup>

(*Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*)

( Received 1 May 2024; revised manuscript received 13 June 2024 )

## Abstract

Considering the interactions between bubbles in a multi-bubble system in a liquid micro-cavity, a spherical bubble cluster in a liquid cavity is modeled in order to describe the dynamical effect of the viscoelastic medium outside the liquid cavity on the oscillation of bubbles, and the coupled equations of bubbles are obtained. Subsequently, the acoustic response characteristics of bubbles are investigated by analyzing the radial oscillation, the stability of the non-spherical shape of bubbles and the threshold of inertial cavitation. The results show that the confinement of the cavity and the bubble cluster facilitates the suppression of bubble oscillation, however, it might enhance the nonlinear properties of bubbles to a certain extent. From the acoustic response curve at 1 MHz, it is found that the main resonance peaks shift leftward with the increase of the bubble number, which means a minor resonant radius can be obtained. The nonlinear stability of bubbles in a confined environment is mainly determined by acoustic pressure amplitude and frequency, the initial bubble radius, and bubble number density, while the effect of the cavity radius is enhanced with the increase of the driving pressure. There is a minimum unstable driving acoustic pressure threshold, depending on the initial bubble radius, and the unstable regions are mainly located in a range of less than 4  $\mu\text{m}$ . With the increase in bubble number density, the strip-type stable region scattered of the unstable region in the map is gradually transformed into a random patch-like distribution, which indicates that the bubble oscillation under high acoustic pressure is more sensitive to the parameters, and it is very susceptible to interference, produces unstable oscillation and then collapses. When the bubble equilibrium radius is in a range greater than 4  $\mu\text{m}$ , the influences of frequency and bubble number density on the inertial thresholds are particularly significant.

**Keywords:** spherical bubble cluster, liquid cavity, cavitation bubbles, coupled oscillation

**PACS:** 43.35.+d, 43.25.+y, 47.55.dp

**DOI:** 10.7498/aps.73.20240606

\* Project supported by the the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12374441, 11974232, 12074238).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wangld001@snnu.edu.cn

## 黏弹性介质包裹的液体腔内球状泡群耦合振动模型

左馨怡 雷照康 武耀蓉 王成会

### A model of coupled oscillation of bubble cluster in liquid cavity wrapped by viscoelastic medium

Zuo Xin-Yi Lei Zhao-Kang Wu Yao-Rong Wang Cheng-Hui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 154301 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240606

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240606>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 黏弹介质包裹的液体腔中气泡的动力学分析

Dynamic analysis of bubble in liquid cavity wrapped by viscoelastic medium

物理学报. 2021, 70(12): 124301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201876>

#### 无界弹性介质球形液体空腔中的气泡的动力学

Dynamics of bubbles in spherical liquid cavity wrapped by elastic medium

物理学报. 2021, 70(21): 214305 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210869>

#### 双泡耦合声空化动力学过程模拟

Simulation of dynamic process of double bubble coupled acoustic cavitation

物理学报. 2023, 72(2): 024303 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20221571>

#### 不同类型气泡组成的混合泡群声空化特性

Acoustic cavitation characteristics of mixed bubble groups composed of different types of bubbles

物理学报. 2020, 69(18): 184301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200381>

#### 考虑水蒸气蒸发和冷凝的球状泡群中泡的动力学特性

Dynamic characteristics of bubbles in spherical bubble group considering evaporation and condensation of water vapor

物理学报. 2021, 70(19): 194301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210045>

#### 声空化场中球状泡团的结构稳定性分析

Structural stability analysis of spherical bubble clusters in acoustic cavitation fields

物理学报. 2024, 73(8): 084303 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20232008>