非线性相互作用引起的双模 Dicke 模型的新奇量子相变*

赵秀琴[1)2)3)] 张文慧[1)2)3)†] 王红梅[1)2)3)]

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (太原师范学院计算与应用物理研究所, 晋中 030619)

3) (太原师范学院, 智能优化计算与区块链技术山西省重点实验室, 晋中 030619)

(2024 年 5 月 10 日收到; 2024 年 6 月 17 日收到修改稿)

量子相变是量子光学和凝聚态物理领域的一个重要课题. 本文在标准双模 Dicke 模型的基础上引入原子-光的非线性相互作用, 研究其所引起的量子相变. 利用自旋相干态变分法从理论上给出有两个参量的基态能量泛函. 两模光场采用四种不同的比例关系进行研究, 并且在实验参数下, 通过可调的原子-光的非线性相互作用参量, 给出了宏观多粒子量子态的丰富结构. 本文主要呈现了在蓝失谐和红失谐下, 双稳的正常相、共存的正常-超辐射相和原子数反转态等丰富的基态特性. 原子-光的非线性相互作用在蓝失谐可以引起标准的双模 Dicke 模型的正常相到超辐射相的二级量子相变. 在红失谐时引起新奇的基态特性, 新奇的量子相变, 即反转的超辐射相到反转的正常相的二级逆量子相变. 原子-光的非线性相互作用和两模光场比例不同时, 对量子相变的相边界和基态物理量的值有较大影响.

关键词: 双模 Dicke 模型, 原子-光的非线性相互作用, 量子相变, 自旋相干态法

PACS: 03.75.Mn, 05.30.Rt, 32.80.Qk, 42.50.Pq **DOI:** 10.7498/aps.73.20240665

1 引 言

量子相变通常被看作是在零温度下热涨落全部冻结, 由量子涨落引起的系统基态随耦合参数的突然变化[1–3], 是量子光学和凝聚态物理领域的一个重要课题. Dicke 模型[4] 描述 N 个二能级的原子和单模光场的相互作用, 给出了原子集体激发超辐射效应的理论解释, 是量子光学的基础. Dicke 模型中正常相到超辐射相的二级量子相变早已被发现, 是系统基态能谱的性质在耦合参数临界值处发生了结构性的改变[5], 这时系统的光子数和激发态原子会突然从零增长为一个有限值, 这种量子相变是探测多体物理系统量子关联性质以及其动力学特性的基本手段, 是量子信息领域所关心的中心课题, 也是当前混沌、量子光学、凝聚态物质等领域的热门问题[6–11].

近年来, 研究多模 Dicke 模型的量子相变, 原子整体与任意离散或连续玻色子模式相互作用的模型, 结果表明, 该体系经历了正常相到超辐射相的二级量子相变[12,13]. 两个交叉的光腔中玻色凝聚体的超辐射跃迁实验, 证明光可以在这两个腔模的任意叠加状态下发射, 可以驱动超辐射跃迁[14–16]. 理论上探究了两模光腔中增加另一个泵浦光, 对光学腔中超冷气体在红原子失谐 ($\Delta_a < 0$) 和蓝原子失谐 ($\Delta_a > 0$) 时对超辐射跃迁的影响[17]. 原子和光场采用不同耦合方式的双模 Dicke 模型也可以产生一级量子相变[18]. 分析了一级和二级超辐射量子相变的相关性[19]. 探讨了多模 Dicke 模型在单模情况下不存在的一些方面[20]. 这些实验和理论研究

* 国家自然科学基金 (批准号: 12304404) 和山西省基础研究计划 (批准号: 202203021222236) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangwh@tynu.edu.cn

© 2024 中国物理学会 Chinese Physical Society

提供了两模光场与原子耦合的方式和研究的方向.

量子相变一般被认为只有在光子和原子集体耦合强度与两能级原子的能级差在同一个数量级才会发生, 该条件在相当长的一段时间内被认为是一个苛刻的条件. 冷原子技术克服了这个困难, 模拟了 Dicke 模型并成功观察到超辐射量子相变[21], 从而使光场中的冷原子系统, 或者光腔中的玻色-爱因斯坦凝聚成为一个理想的量子模拟平台. 在实验中腔场的频率可被泵浦场调控, 甚至到负值, 而且出现原子-光的非线性相互作用, 这无疑为新的宏观量子态和相应的相变提供了可能. 这种高精细度光腔内的玻色-爱因斯坦凝聚系统被认为是一个很有前途的平台, 可以很好地从原子物理和量子光学中探索奇异的多体现象, 包含原子-光非线性相互作用的 Dicke 模型, 不仅实验上具有广泛的应用, 而且也有丰富的理论研究价值[7]. 我们在单模 Dicke 模型中, 研究了原子-光非线性相互作用的量子相变, 通过实验上可以调节相互作用强度的大小, 泵浦激光的频率, 可得到丰富的量子态结构. 在蓝失谐和红失谐下揭示了双稳态正常相、原子数反转和正常相-超辐射相共存的特性, 正常相到超辐射相和反转的超辐射相到反转的正常相的逆二级量子相变[22]. 也研究了标准的双模 Dicke 模型的量子相变, 存在正常相到超辐射相的二阶量子相变[23].

本文将在考虑一模光场与原子有非线性的相互作用, 且原子分别与双模光场的偶级耦合强度都相等的条件下, 分别讨论双模光场成四种比例关系时双模 Dicke 模型的量子相变. 用自旋相干态方法推导出了基态能量泛函, 基态能量泛函对经典参量求极值, 并且二阶偏导大于零, 可得考虑了正常和反转赝自旋时双稳、共存及新的宏观态的解. 非线性相互作用参量和双模光场的比例对双稳态和多种共存态的区域, 以及对正常相到超辐射相和新奇的反转的超辐射相到反转的正常相的逆量子相变的边界和区域都有较大影响. 可根据判断量子相变级次的方法, 得出量子相变的级次.

2 模型分析和精确解

2.1 模型及理论分析

在双模腔场中, 两模光场同时作用在 N 个二能级 ^{87}Rb 原子上, 在原子与双模光场的偶级耦合强度相等的条件下, 一模光场与原子有非线性相互作用的系统的哈密顿量可写为[7,22,23]

$$H=\sum_{l=1,2}\omega_l a_l^{\dagger}a_l+\omega_{\mathrm{a}}J_Z+\frac{g}{2\sqrt{N}}\times\sum_{l=1,2}\left(a_l^{\dagger}+a_l\right)\left(J_++J_-\right)+\frac{U}{N}J_z a_1^{\dagger}a_1, \quad (1)$$

其中取 $\hbar=1$, 当 $U=0$ 时, (1) 式回到标准的双模 Dicke 模型哈密顿量[23]. $a_l^{\dagger}(a_l)$ $(l=1,\,2)$ 是两模光场的产生 (湮灭) 算符; N 代表原子个数; ω_{a} 表示二能级原子的能级差, 且认为两模光场中, 光子和原子场偶极耦合强度相等且都等于 g, g 是可通过泵浦激光功率的改变而改变的实验参量. 集体自旋算符由 J_z, $J_{\pm}$ 表示, 对易关系是 $[J_+,J_-]=2J_z$, $[J_{\pm},J_z]=\mp J_{\pm}$. 集体自旋算符的基矢是 $|j,m\rangle$, 满足 $J_z|j,m\rangle=m|j,m\rangle$, 空间维度是 $2j+1=N+1$, $j=N/2$. 腔场的等效频率 $\omega_1=\Delta+\beta U$, 其中 $\Delta=\omega_{\mathrm{f}}-\omega_{\mathrm{p}}$ 是腔场频率 ω_{f} 和泵浦场频率 ω_{p} 间的失谐量, β 是与实验有关的无量纲常数, 依据 Liu 等[7] 报道取 $\beta=7/6U$, U 为原子-光非线性相互作用参量, 单位是能量单位, 可为正数也可为负数. 等效的腔频率 ω_1 可以通过泵浦激光与腔场失谐 Δ 和原子和光子相互作用 U 来调节, 可正可负, 这样丰富的新相和新的量子相变会产生. 第二模光场的频率取 $\omega_2=\omega_{\mathrm{a}}$.

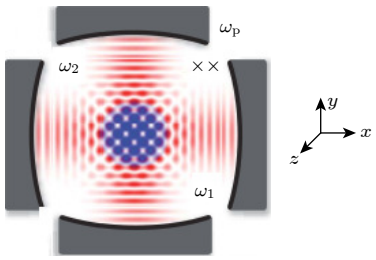


图 1 双模光腔内捕获超冷原子的实验装置. 等效的 N 个二能级超冷原子 ^{87}Rb 处于该腔中, x 方向有等效的腔频 ω_1 的光场, y 方向上有腔频 ω_2 的光场, z 方向有泵浦激光频率为 ω_{p}, 只调控腔频 ω_1

Fig. 1. Experimental setup for a trapped ultra-cold atoms in the dual-mode optical cavity. The equivalent N two-level ultracold atoms are in this cavity, with a equivalent cavity frequency ω_1 light field in the x direction, a cavity frequency ω_2 light field in the y direction, and in the z direction, the pumped laser frequency is ω_{p}, and only the cavity frequency ω_1 is regulated.

2.2 基态能量泛函

采用自旋相干态变分法来研究宏观多粒子量子系统的基态能量泛函. 首先在相干态的光场条件下, 借助自旋相干态变换, 把赝自旋算符对角化得

到基态能量泛函. 将能量泛函对经典场变量求极值, 并对二阶导数进行判定取极小值, 最后给出基态能量的精确解.

首先考虑双模光场都是相干态, 即量子化光场的宏观极限-宏观量子态. 按定义是光子湮灭算符的本征态即 $a_l\left|\alpha_l\right\rangle=\alpha_l\left|\alpha_l\right\rangle$, 其中 $\alpha_l=\gamma_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_l}$, 模 γ_l 和复数角 θ_l 为任意实数, 显然 $\left\langle\alpha_l\right| a_l^{\dagger} a_l\left|\alpha_l\right\rangle=\gamma_l^2$ 是光子数, $l=1,\ 2$.

对系统哈密顿量 (1) 式用双模光场相干态 $|u\rangle=\left|\alpha_1\right\rangle \otimes\left|\alpha_2\right\rangle$ 取平均得

$$\begin{aligned}\bar{H}=&\ \langle u|\, H\,|u\rangle=\omega_1\gamma_1^2+\omega_2\gamma_2^2+\left(\omega_{\mathrm{a}}+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)J_z\\&+\frac{g}{\sqrt{N}}\sum_{l=1,2}\gamma_l\cos\theta_l(J_++J_-),\end{aligned}\tag{2}$$

其中光场变量 γ_1, γ_2 和 θ_1, θ_2 是变分参量. 有两个宏观本征态, 即代表南极和北极规范的自旋相干态 $\left|n_{\mp}\right\rangle$, $\left|n_{-}\right\rangle$ 称为正常 ($\Downarrow$) 自旋态, $\left|n_{+}\right\rangle$ 称为反转 ($\Uparrow$) 自旋态.

利用自旋相干态变换将 $\bar{H}$ 进行对角化可得到相应的本征值, 即

$$\bar{H}\left|n_{\mp}\right\rangle=E_{\mp}\left|n_{\mp}\right\rangle.\tag{3}$$

自旋相干态[22–24] 事实上是自旋投影算符的本征态, 其本征方程为 $\boldsymbol{J}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\left|n_{\mp}\right\rangle=\mp j\left|n_{\mp}\right\rangle$, 其中 $j=N/2$, $\vec{\boldsymbol{n}}=(\sin\xi\cos\eta,\ \sin\xi\sin\eta,\ \cos\xi)$ 是方向角 ξ 和 η 的单位矢量. 自旋相干态满足最小不确定关系 $\Delta J_+\cdot\Delta J_-=\langle J_z\rangle/2$, 并且两个宏观量子态是相互正交的 $\langle n_-\mid n_+\rangle=0$. 通过么正变换可以从最大的自旋算符基矢 $\left|j,\mp j\right\rangle$ ($J_z\left|j,\ \mp j\right\rangle=\mp j|j,\ \mp j\rangle$) 产生自旋相干态, 即

$$\left|n_{\mp}\right\rangle=R(n)\left|j,\mp j\right\rangle=\mathrm{e}^{\frac{\xi}{2}\left(J_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}-J_-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\right)}\left|j,\mp j\right\rangle.\tag{4}$$

在自旋相干态下, 原来的自旋算符分别旋转为

$$\begin{cases}\tilde{J}_z=R^{\dagger}J_zR\\=J_z\cos\xi+\dfrac{1}{2}\sin\xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}J_-+\dfrac{1}{2}\sin\xi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}J_+,\\ \tilde{J}_+=R^{\dagger}J_+R\\=J_+\cos^2\dfrac{\xi}{2}-J_z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin\xi-J_-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\eta}\sin^2\dfrac{\xi}{2},\\ \tilde{J}_-=R^{\dagger}J_-R\\=J_-\cos^2\dfrac{\xi}{2}-J_z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}\sin\xi-J_+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\eta}\sin^2\dfrac{\xi}{2}.\end{cases}\tag{5}$$

令本征值方程 (3) 左乘 $R^{\dagger}$, 并将 (4) 式代入方程 (3) 得:

$$\begin{aligned}&R^{\dagger}[\omega_1\gamma_1^2+\omega_2\gamma_2^2+\left(\omega_a+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)J_z\\&+\frac{g}{\sqrt{N}}\sum_{l=1,2}\gamma_l\cos\theta_l(J_++J_-)]R\left|j,\pm j\right\rangle\\=&\ R^{\dagger}E_{\mp}R\left|j,\pm j\right\rangle.\end{aligned}\tag{6}$$

将 (5) 式代入 (6) 式, 并整理得:

$$\begin{aligned}&[\omega_1\gamma_1^2+\omega_2\gamma_2^2+A(\alpha_1,\alpha_2,\xi,\eta)J_z+B(\alpha_1,\alpha_2,\xi,\eta)J_+\\&+C(\alpha_1,\alpha_2,\xi,\eta)J_-]\left|j,\mp j\right\rangle=E_{\mp}\left|j,\mp j\right\rangle,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{cases}A=\varPhi\cos\xi-\dfrac{2g}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1,2}\gamma_l\cos\theta_l\sin\xi\cos\eta,\\ B=\dfrac{\varPhi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}\sin\xi+\dfrac{g}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1,2}\gamma_l\cos\theta_l\\\qquad\times\left(\cos^2\dfrac{\xi}{2}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\eta}\sin^2\dfrac{\xi}{2}\right),\\ C=\dfrac{\varPhi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin\xi+\dfrac{g}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1,2}\gamma_l\\\qquad\times\cos\theta_l\left(\cos^2\dfrac{\xi}{2}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\eta}\sin^2\dfrac{\xi}{2}\right).\end{cases}\tag{8}$$

$\varPhi=\omega_{\mathrm{a}}+U\gamma_1^2/N$, (7) 式成立的条件是非对角部分的系数为零, 即 $B=0$, $C=0$ 可得到如下形式满足对角化的方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\varPhi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}\sin\xi+\dfrac{g}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1,2}\gamma_l\cos\theta_l\\\times\left(\cos^2\dfrac{\xi}{2}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\eta}\sin^2\dfrac{\xi}{2}\right)=0,\\ \dfrac{\varPhi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin\xi+\dfrac{g}{\sqrt{N}}\displaystyle\sum_{l=1,2}\gamma_l\cos\theta_l\\\times\left(\cos^2\dfrac{\xi}{2}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\eta}\sin^2\dfrac{\xi}{2}\right)=0.\end{cases}\tag{9}$$

解 (9) 式可确定角参量的数值:

$$\begin{cases}\cos\eta=\cos\theta_1=\cos\theta_2=-1,\\ \cos\xi=\dfrac{\varPhi}{\sqrt{\varPhi^2+\dfrac{4g^2}{N}(\gamma_1+\gamma_2)^2}},\\ \sin\xi=-\dfrac{2g(\gamma_1+\gamma_2)}{\sqrt{N}\sqrt{\varPhi^2+\dfrac{4g^2}{N}(\gamma_1+\gamma_2)^2}}.\end{cases}\tag{10}$$

将 (10) 式代入 (8) 式可得:

$$A=\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{a}}+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)^2+\frac{4g^2}{N}(\gamma_1+\gamma_2)^2}. \tag{11}$$

由此可得 (3) 式的本征值, 即基态能量泛函是两个参量 γ_1 和 γ_2 的函数, 可表示为

$$E_{\mp}(\gamma_1,\gamma_2)=\omega_1\gamma_1^2+\omega_2\gamma_2^2 \mp\frac{N}{2}\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{a}}+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)^2+\frac{4g^2}{N}(\gamma_1+\gamma_2)^2}. \tag{12}$$

2.3 平均基态能量、总的平均光子数、原子布居数差

Dicke 模型中的量子相变的特征在于平均光子数 n_{p} (或 γ^2), 可作为序参数, 对于超辐射相 SP, $n_{\mathrm{p}}>0$, 对于正常相 NP, $n_{\mathrm{p}}=0$.

在 (12) 式中设总光子数 $\gamma^2=\gamma_1^2+\gamma_2^2$, 双模光场之间满足关系如下式

$$\begin{cases}\gamma_1^2/\gamma^2=\cos^2\varphi,\ \gamma_2^2/\gamma^2=\sin^2\varphi,\\ \gamma_2/\gamma_1=\tan\varphi,\ \gamma_2^2/\gamma_1^2=\tan^2\varphi,\\ \omega'=\omega_1+\omega_2\tan^2\varphi,\ g'=g(1+\tan\varphi),\\ \varphi\in[0,\pi/2).\end{cases} \tag{13}$$

将 (13) 式代入 (12) 式得单参量 γ_1 的能量泛函:

$$E_{\mp}(\gamma_1)=\langle\psi_{\mp}|H|\psi_{\mp}\rangle =\omega'\gamma_1^2\mp\frac{N}{2}\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{a}}+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)^2+\frac{4g'^2\gamma_1^2}{N}}. \tag{14}$$

通过能量泛函的极值条件可以得出宏观多粒子量子态的解, 即对 (14) 式中 γ_1 求一阶偏导, 得极值:

$$\frac{\partial E_{\mp}}{\partial\gamma_1}=\gamma_1\left[2\omega'\mp\frac{U\left(\omega_{\mathrm{a}}+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)+2g'^2}{2\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{a}}+\frac{U}{N}\gamma_1^2\right)^2+\frac{4g'^2\gamma_1^2}{N}}}\right]=0. \tag{15}$$

方程 (15) 有一个零光子数解 $\gamma_1=0$, 这就产生了正常相 NP($\gamma_{1n\mp}=0$), 只有当它的二阶导数大于零时是稳定的, 即 $\dfrac{\partial^2E_{\mp}}{\partial\gamma_1^2}>0$, 表示正常相 NP 状态 $\gamma_{1n\mp}=0$, 用 $\mathrm{N}_{\mp}$ 表示. 发现非零光子数解为

$$\frac{\gamma_{1\mathrm{s}\mp}^2}{N}=\frac{1}{U^2}\left[-\left(2g'^2+U\omega_{\mathrm{a}}\right)\pm4g'|\omega'|\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\varsigma}}\right]. \tag{16}$$

这里 $\zeta=g'^2+U\omega_a$, $\varsigma=4\omega'^2-U^2$, 且满足二阶导数大于零, 即

$$\frac{\partial^2E_{\mp}}{\partial\gamma_1^2}=\pm\varsigma\frac{\gamma_{1\mathrm{s}\mp}^2}{g'}\sqrt{\frac{\varsigma}{\zeta}}\geqslant0. \tag{17}$$

用非零光子解 (16) 式代入极值条件 (17) 式, 满足正常状态 ($\Downarrow$) $\gamma_{1\mathrm{s}-}^2$ 和反转态 ($\Uparrow$)$\gamma_{1\mathrm{s}+}^2$ 的必要条件: $\omega'>0$, $4\omega'^2-U^2>0$ 和 $\omega'<0$, $4\omega'^2-U^2<0$. 反转状态 ($\Uparrow$) 的 $\gamma_{1\mathrm{s}+}^2$ 仅当 $U<0$ 时, 可能通过非线性相互作用而存在. 当 (15) 式满足 $\partial E_{\mp}(\gamma_1=0)/\partial\gamma_1=0$, 可得相边界为

$$g'_{\mathrm{c}\mp}=\sqrt{\left(\pm\omega'-\frac{U}{2}\right)\omega_{\mathrm{a}}}. \tag{18}$$

光子数表达式 (16) 式代入 (14) 式, 得到在超辐射相中每个原子的平均能量的表达式是

$$\varepsilon_{\mp}=\frac{E_{\mp}}{\omega_{\mathrm{a}}N}=\frac{1}{U^2}\left[-\left(2g'^2+U\omega_{\mathrm{a}}\right)\pm4g'\omega'\sqrt{\frac{\zeta}{\varsigma}}\right]\frac{\omega'}{\omega_{\mathrm{a}}} \mp\frac{g'}{\omega_{\mathrm{a}}}\sqrt{\frac{\zeta}{\varsigma}}. \tag{19}$$

正常相时能量为

$$\varepsilon_{\mp}\left(\gamma_{\mp}^2=0\right)=\mp\frac{1}{2} \tag{20}$$

总波函数为 $|\psi_{\mp}\rangle=|u\rangle\otimes|n_{\mp}\rangle$, 超辐射的平均总光子数是

$$n_{\mathrm{p}}=\frac{\langle\psi_{\mp}|\sum\limits_{l=1,2}a_l^{\dagger}a_l|\psi_{\mp}\rangle}{N}=\gamma_{\mp}^2. \tag{21}$$

而原子布居数差分布为

$$\Delta n_{\mathrm{a}\mp}=\frac{\langle\psi_{\mp}|J_z|\psi_{\mp}\rangle}{N}=\frac{1}{U}\left[-\omega'\pm\frac{g'}{2}\sqrt{\frac{\varsigma}{\zeta}}\right]. \tag{22}$$

正常相的值为

$$\Delta n_{\mathrm{a}\mp}(\gamma_{\mathrm{s}\mp}^2=0)=\mp\frac{1}{2}. \tag{23}$$

反转态 ($\Uparrow$) 原子布居数差即 $\Delta n_{\mathrm{a}+}=1/2$.

相边界和物理量的表达式都与非线性相互作用 U 和第二模光场的占比有关.

2.4 量子相变级次的判定

Dicke 模型中判定量子相变级次 [13,19] 是根据基态能量 ε 是连续的, 基态能量对光和原子的偶级耦合参量 g 的 n 阶偏导数即 $\dfrac{\partial^n\varepsilon_{\mp}}{\partial g^n}$, 对某个 n 是不连续的, 量子相变的级次就是第 n 级. 比如第一级不连续就是一级量子相变; 第一级连续, 第二级不连续就是二级量子相变.

通过自旋相干态变分法推出了系统的哈密顿量的基态泛函是两个相干态光场参量的表达式. 通过进一步计算得到了系统中每个原子的平均能量、平均总光子数和原子布居数差表达式, 还可以判断相变的级次.

3 相图和量子相变级次

我们讨论蓝失谐和红失谐两种情况下, 原子-光非线性相互作用和两模光场的占比不同, 两种因素引起的稳定的多重量子态和量子相变特性.

3.1 蓝失谐时的相图和基态物理量线图

参数选自参考文献 [7, 21, 22] 中的值, 非线性相互作用值在一个宽的区域内扩展, $U/\omega_{\rm a}\in[-80,\,80]$. 集体原子与光场耦合强度分别是 $g/\omega_{\rm a}\in[0,\,10]$, 单位是 MHz. 以原子频率为单位, 即 $\omega_{\rm a}=1\,{\rm MHz}$. 蓝失谐时 $\omega_{\rm f}<\omega_{\rm p}$, 腔场 $\Delta=\omega_{\rm f}-\omega_{\rm p}<0$, 取 $\Delta/\omega_{\rm a}=-20$, 常数 $\beta=7/6$, 有效频率为 $\omega_1/\omega_{\rm a}=\Delta/\omega_{\rm a}+7U/6\omega_{\rm a}$, $\omega_2/\omega_{\rm a}=1$.

本文取两模光场的四种比例关系 (a, b, c, d), 其中 $a=0$, 代表第二模光场不存在, b, c, d 代表两模光场的比值分别是 1∶3, 1∶1, 3∶1, 以下表格同. 将上述参数代入 (18) 式可得如表 1 所列的相边界与原子-光的非线性相互作用参量 U 的关系.

图 2 中的边界是依据表 1 得到的, 四个图形的性质相同. 从图 2(a) 中可看出, 在 $U/\omega_{\rm a}\geqslant 30$ 的条件下, $g\leqslant g_{\rm c-}$ 是正常相的双稳态 ${\rm NP_{bi}}\,({\rm N_-},{\rm N_+})$ (青色区), 具有较低能量的 $\rm N_-$ 是基态; $g>g_{\rm c-}$ 是 $\rm S_-$ 与 $\rm N_+$ 共存区 ${\rm SP}({\rm S_-},{\rm N_+})$(红色区), $\rm S_-$ 是较低能态. 反转的 $\rm N_+$ 存在于 $g>g_{\rm c+}$ 的所有区, 是由原子-光非线性相互作用引起的是一个新的观测相. 在曲线 $g\leqslant g_{\rm c+}$ 下发现不稳定的宏观真空不稳定相区 (UMV, 空白区). $g_{\rm c-}$ 是正常相 $\rm N_-$ 到超辐射相 $\rm S_-$ 的相变界, $g_{\rm c+}$ 是反转的正常相 $\rm N_+$ 和不稳定的真空态的相边界. 从图 2 可以看出, 当非线性的相互作用参量 $U=0$ 时, $g_{\rm c-}$ 不存在, 所以不存在正常相 $\rm N_-$ 到超辐射相 $\rm S_-$ 的量子相变. $g_{\rm c+}$ 存在, 有宏观真空不稳定相 (UMV) 到反转正常相 $\rm N_+$ 的相变. 当有非线性的相互作用参量 U 存在并取一定的数值范围时, 如表 1 所列, $g_{\rm c-}$ 存在, 会出现正常相 $\rm N_-$ 到超辐射相 $\rm S_-$ 的量子相变. 两条相边界线 $g_{\rm c-}$,

表 1 蓝失谐时相应相图的参数 (U 作变量)

Table 1. Parameters of the corresponding phase diagram when blue detuning (U as variable).

	φ	$\tan^2\varphi$	$1+\tan\varphi$	$g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}$	$g_{\rm c+}/\omega_{\rm a}$
a	0	0	1	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{2U}{\omega_{\rm a}}-60},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}>30$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{60-\dfrac{5U}{\omega_{\rm a}}},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}<12$
b	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{2U}{\omega_{\rm a}}-59},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}>29.5$	$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\sqrt{59-\dfrac{5U}{\omega_{\rm a}}},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}<11.8$
c	$\dfrac{\pi}{4}$	1	2	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{2U}{\omega_{\rm a}}-57},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}>28.5$	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{57-\dfrac{5U}{\omega_{\rm a}}},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}<11.4$
d	$\dfrac{\pi}{3}$	3	$1+\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{2U}{\omega_{\rm a}}-51},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}>25.5$	$\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}\sqrt{51-\dfrac{5U}{\omega_{\rm a}}},\quad \dfrac{U}{\omega_{\rm a}}<10.2$

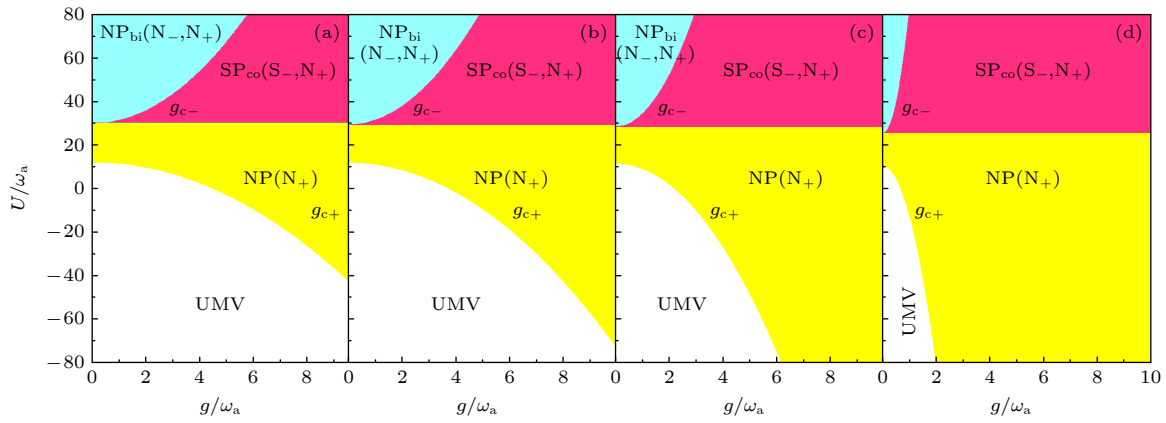


图 2 蓝失谐下的相图

Fig. 2. Phase diagram in blue detuning.

g_{c+} 和 U/ω_a 取确定值的一条直线将每个相图分为四个区. 原子-光非线性相互作用逐渐向正值方向变大时, 引起相边界 g_{c-} 变大, 向负值方向变大时, 相边界的值 g_{c+} 变大都影响了相变. 作为对照, 如图 2(b)—(d) 所示, 在第二模光场的占比逐渐增大, g_{c-} 和 g_{c+} 中 U 的取值也逐渐减小, 使得相变更易发生, 整体区域下移, 相变发生的范围变大. 但两个 U 之间的差距变小, 也可以看到区域的变化. 本文观察到的双稳态的宏观量子态与非平衡量子相变的动态研究一致[25]. 由于不满足必要条件, 因此不存在用于反转状态的 S_+, 蓝色失谐无法实现.

参照表 1 参数, 取 $U/\omega_a = 40, 60$, 可以比较同等条件下, 非线性相互作用参量 U 的作用. 其他参数不变, 代入 (18) 式可得具体数值的边界 g_{c-}/ω_a, 如表 2 所示. 将参数代入 (19) 式—(23) 式得到基态物理量随耦合强度 g 变化的线图, 如图 3 所示.

图 3(a) 代表单模光场, 图 3(b)—(d) 代表双模光场, 非线性的相互作用 U 对图 3(a) 的相变点影响比对图 3(b)—(d) 的影响大. U 增大, 相边界的值增大. 因为只考虑第一模光场和原子的非线性相互作用 U, 所以随着第二模光场占比的逐渐增大, 两个相变点 g_{c-} 的位置越来越近. 从图 3(a1), (a3), 图 3(b1), (b3), 图 3(c1), (c3) 和图 3(d1), (d3) 中可以看出, 总平均光子数和平均基态能量的数值随着 U 和第二模光场的强度增大, 都有较大的变化, 而图 3(a2)、图 3(b2)、图 3(c2) 和图 3(d2) 中原子布居数差分布变化较小. 相变点 g_{c-} 的数值减小, 使得正常相 N_- 到超辐射相 S_- 的量子相变 (黑色实线) 更容易一些. 红色虚线表示反转状态 N_+ ($\Uparrow$), 可以看出图 2 中双稳态 NP_{bi} (N_-, N_+) 的区域变小而共存态 SP(S_- , N_+) 的区域变大.

表 2 相变点 g_{c-} 的精确值

Table 2. Exact value of the phase transition point g_{c-}.

	φ	ω'	g'	g_{c-}/ω_a	
				$U/\omega_a = 40$	$U/\omega_a = 60$
a	0	ω_1	g	2.59	4.48
b	$\pi/6$	$\omega_1 + \frac{\omega_2}{3}$	$g\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	1.68	2.87
c	$\pi/4$	$\omega_1 + \omega_2$	$2g$	1.38	2.30
d	$\pi/3$	$\omega_1 + 3\omega_2$	$g(1+\sqrt{3})$	1.14	1.76

3.2 蓝失谐时的量子相变特性

在蓝失谐下存在正常相 N_- 到超辐射相 S_- 量子相变, 第二模光场没有影响量子相变的级次, 所

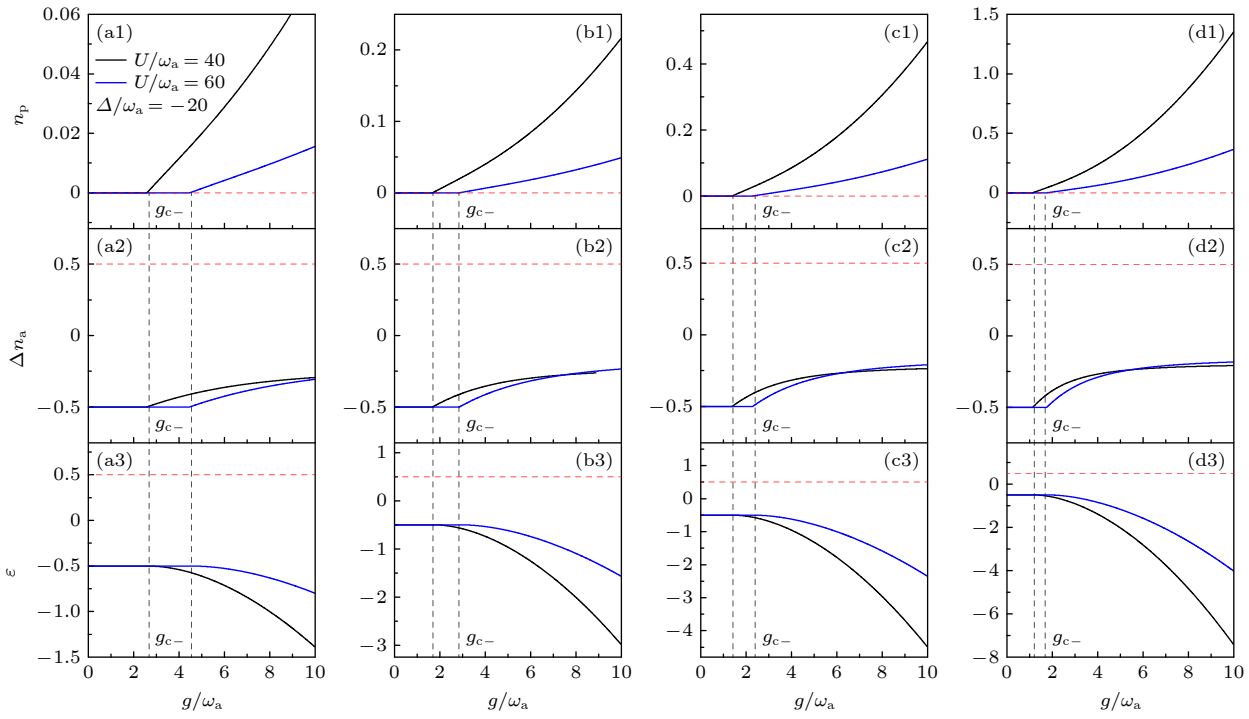


图 3 在蓝失谐下, (a1)—(d1) 总平均光子数 n_p, (a2)—(d2) 原子布居数差 Δn_a 和 (a3)—(d3) 平均基态能量 ε 随原子-场的耦合强度 g/ω_a 的变化曲线

Fig. 3. Variations curves of (a1)–(d1) total average photon number n_p, (a2)–(d2) atomic population imbalance Δn_a and (a3)–(d3) average ground state energy ε with the atom-field coupling intensity g/ω_a under the blue detuning.

以讨论一模光场的量子相变的级次. 对于单模光场每个原子的平均能量, 将 $\omega'=\omega_1$, $g'=g$, $\zeta=g^2+U\omega_a$ 和 $\varsigma=4\omega_1^2-U^2$ 代入 (19) 式并化简, 得单模光场的平均每个原子的基态能量:

$$\varepsilon_{\mp}=\frac{E_{s\mp}}{\omega_{\rm a}N}=-\frac{2g^2\omega_1}{U^2\omega_{\rm a}}-\frac{\omega_1}{U}\pm\frac{4\omega_1^2/U^2\mp1}{\omega_{\rm a}\sqrt{4{\omega_1}^2-U^2}}\left(g\sqrt{g^2+U\omega_{\rm a}}\right). \tag{24}$$

(24) 式对原子和光场的偶级耦合参量 g 求一阶和二阶偏导得

$$\frac{\partial\varepsilon_{\mp}}{\partial g}=-\frac{4g\omega_1}{U^2\omega_{\rm a}}\pm\frac{4\omega_1^2/U^2\mp1}{\omega_{\rm a}\sqrt{4{\omega_1}^2-U^2}}\frac{2g^2+U\omega_{\rm a}}{\sqrt{g^2+U\omega_{\rm a}}}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{\mp}}{\partial g^2}=-\frac{4\omega_1}{U^2\omega_{\rm a}}\pm\frac{4\omega_1^2/U^2\mp1}{\omega_{\rm a}\sqrt{4{\omega_1}^2-U^2}}\frac{2g^3+3gU\omega_{\rm a}}{(g^2+U\omega_{\rm a})^{3/2}}. \tag{26}$$

根据 (25) 式和 (26) 式的连续性, 讨论在蓝失谐下存在 $\rm N_-$ 到 $\rm S_-$ 量子相变的级次. 利用上述的数据和 (25) 式和 (26) 式可画出相变的图示, 如图 4 所示.

从图 4 可看出基态能量对 g 的一阶偏导 $\partial\varepsilon_-/\partial g$ 是连续的 (图 4(a)), 二阶偏导 $\partial^2\varepsilon_-/\partial g^2$ 是不连续的 (图 4(b)), 所以从正常相 $\rm N_-$ 经相变点 $g_{\rm c-}$ 到超辐射 $\rm S_-$ 的相变属于二级量子相变.

总之蓝失谐时, 由于原子-光的非线性相互作用, 有双稳态、共存态和反转的正常相, 还可以实现正常相到超辐射相的二级量子相变.

3.3 红失谐时的相图和基态物理量线图

非线性相互作用在调控量子相变方面非常独特, 这方面有很多工作[25–27], 为了更好地展示其特性给出了红失谐时的相图和基态物理量线图 ($\omega_{\rm p}<\omega_{\rm f}$), 其中 $\Delta/\omega_{\rm a}=20$, 其他参数不变. 相位边界线分别来自 (18) 式, 参数如表 3 所列.

在图 5 中四个相图的性质完全相同. 当非线性相互作用 U=0 时只有正常相 $\rm N_-$ 到超辐射相 $\rm S_-$ 的量子相变, 而相边界 $g_{\rm c+}$ 不存在. 当 U<0 时会有丰富的量子态和新奇的量子相变. (1) 指单一的 NP ($\rm N_-$) 区间; (2) 指 $\rm NP_{co}(N_-,S_+)$ 区间, 还有单独的反转状态 ($\Uparrow$) $\rm S_+$ 的超辐射区域, 是有效频率变为负值所导致的, $\omega'<0$, 上述三个量子态是图 2 中没有的量子态. 两条相边界线 ($g_{\rm c-}$ 和 $g_{\rm c+}$) 和三

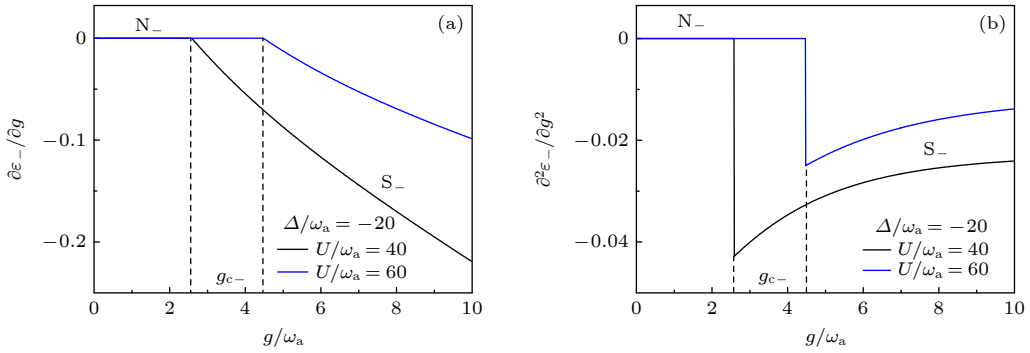


图 4 在蓝失谐下, (a) 基态能量对 g 的一阶偏导 $\partial\varepsilon_-/\partial g$ 和 (b) 二阶偏导 $\partial^2\varepsilon_-/\partial g^2$ 随 g 的变化曲线

Fig. 4. Under blue detuning, the first-order deflection $\partial\varepsilon_-/\partial g$ (a) ground state energy with respect to g and the second-order deflection $\partial^2\varepsilon_-/\partial g^2$ (b) change curve with respect to g.

表 3 红失谐相应图形的参数 (U 作变量)

Table 3. Parameters of the corresponding phase diagram when red detuning (U as variable).

	φ	$g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}$	$g_{\rm c+}/\omega_{\rm a}$	$U/\omega_{\rm a}$ ($\omega'<0$)
a	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{60+\frac{2U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}>-30$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{-60-\frac{5U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-12$	$20+\frac{7U}{6\omega_{\rm a}}<0,\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-17.14$
b	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{1+\sqrt{3}}\sqrt{61+\frac{2U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}>-30.5$	$\frac{1}{1+\sqrt{3}}\sqrt{-61-\frac{5U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-12.2$	$20+\frac{7U}{6\omega_{\rm a}}+\frac{1}{3}<0,\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-17.43$
c	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{63+\frac{2U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}>-31.5$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-63-\frac{5U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-12.6$	$20+\frac{7U}{6\omega_{\rm a}}+1<0,\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-18$
d	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{3+\sqrt{3}}\sqrt{69+\frac{2U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}>-34.5$	$\frac{1}{3+\sqrt{3}}\sqrt{-69-\frac{5U}{\omega_{\rm a}}},\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-13.8$	$20+\frac{7U}{6\omega_{\rm a}}+3<0,\ \frac{U}{\omega_{\rm a}}<-19.71$

条$U/\omega_{\rm a}$取确定值的直线将每个相图分为 7 个区. 如图 5(a) 所示, 有三条线 $U/\omega_{\rm a}=-12$, $U/\omega_{\rm a}=-120/7$, $U/\omega_{\rm a}=-30$将量子态分割开, 使相图和量子相变更加丰富. 两条相边界线在 $g_{\rm c-}=g_{\rm c+}$ ($U/\omega_{\rm a}=-120/7$) 处相交, 出现多个相的共存点. 在 $g>g_{\rm c-}$ 和 $U/\omega_{\rm a}>-12$ 决定的区 (红色区) 是超辐射 $\rm S_-$ 和反转正常相 $\rm N_+$ 的共存区. 双稳态 $\rm NP_{bi}(N_-,N_+)$ 位于 $g_{\rm c+}<g\leqslant g_{\rm c-}$ (青色区). 在这里有正常相 $\rm N_-$ 经相变点 $g_{\rm c-}$ 到超辐射相 $\rm S_-$ 的量子相变, 类比于蓝失谐是属于二级量子相变. 反转的 $\rm N_+$ 存在于 $g>g_{\rm c+}$ 的所有区. (2) 区中的 $\rm S_+$ 和单一超辐射区 $\rm S_+$ 位于边界 $g_{\rm c+}$ 之下, 且 $-30<U/\omega_{\rm a}<-120/7$ (紫色区和粉色区). 临界点 $g_{\rm c-}$ 分离共存相 $\rm NP_{co}(N_-,S_+)$ 和单个 $\rm S_+$ 的超辐射相, 随着 g 的增加, $\rm S_+$ 的超辐射相在临界点 $g_{\rm c+}$ 转变为反转的正常相 $\rm N_+$, 出现新奇的量子相变. 单个 $\rm N_-$ 在 $g<g_{\rm c+}$ 和 $U/\omega_{\rm a}>-120/7$ 之间 (绿色区). $U<-30$ 和 $g<g_{\rm c+}$ 是不稳定的真空宏观相区 (UMV, 空白区域). φ 取不同的相图如图 5(b)—(d) 所示, 相图的性质与图 5(a) 中的相同. 但是, 随着非线性相互作用和第二模光场的增加, 相界线 $g_{\rm c-}$ 和 $g_{\rm c+}$ 都不同. 量子态的区域有的相对减少, 也有区域相对增加. 从表 3 和图 5 可以看出, 当非线性的相互作用参量 U 取负值并在一定的数值范围内时, 如表 3 所列, 相边界 $g_{\rm c+}$ 存在, 并出现了新奇的反转的超辐射相 $\rm S_+$ 到反转的正常相 $\rm N_+$ 的量子相变.

在表 3 中, 取参数 $U/\omega_{\rm a}=-20$, -24, 其他参数不变, 代入 (18) 式可得相变点的具体值, 如表 4 所列. 代入 (19) 式—(23) 式可得相对应的物理量随耦合强度 g 变化的曲线.

在图 6 中非线性的相互作用参量 U 取两个值, 可以比较同等条件下对相变点和基态物理参量的影响. 对于临界边界 $g_{\rm c-}$ 的影响, 随着 U 减小 $g_{\rm c-}$ 减小; 对于 $g_{\rm c+}$ 则相反, 随着 U 减小 $g_{\rm c+}$ 增大. 随着第二模光场的强度增大, $g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}$ 和 $g_{\rm c+}/\omega_{\rm a}$ 的值都变小, 而且越来越靠近, 三个物理量曲线的形状都有较大的变化.

3.4 红失谐时的量子相变特性

图 6 展示了图 5 中的量子态 $\rm NP_{co}(N_-,S_+)$ 经过相变点 $g_{\rm c-}$ 到量子态 $\rm SP(S_+)$, 再经过相变点 $g_{\rm c+}$ 到反转的正常相 $\rm N_+$ 的相变过程. 从 $\rm S_+$ 到 $\rm N_+$ 的过程中基态能量是连续的, 所以可以用通常的方法判断相变的级次, 上述参数并用 (25) 式和 (26) 式可画出曲线图, 如图 7 所示.

从图 7 可看出基态能量对 g 的一阶偏导 $\partial\varepsilon_+/\partial g$ 是连续的 (图 7(a)), 二阶偏导 $\partial^2\varepsilon_+/\partial g^2$ 是不连续的 (图 7(b)), 所以相变属于二级量子相变, 从图中可看出对单模光场随着原子-光非线性相互作用 U 的减小相边界会变大.

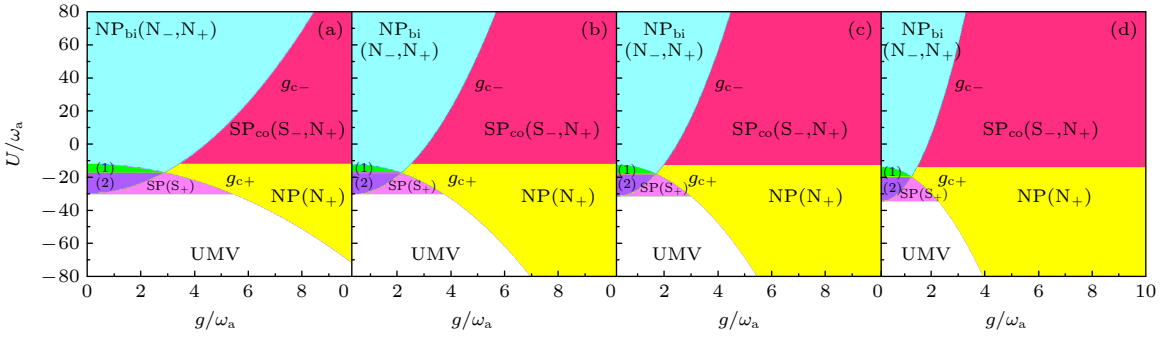


图 5 红失谐的相图

Fig. 5. Phase diagram in red detuning.

表 4 $U/\omega_a=-20$, -24 时, $g_{\rm c-}$ 和 $g_{\rm c+}$ 的值

Table 4. Values of $g_{\rm c-}$ and $g_{\rm c+}$ at $U/\omega_{\rm a}=-20$, -24.

	φ	$g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}$		$g_{\rm c+}/\omega_{\rm a}$	
		$g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}=-20$	$g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}=-24$	$U/\omega_{\rm a}=-20$	$U/\omega_{\rm a}=-24$
a	0	2.58	2.00	3.65	4.47
b	$\pi/6$	1.68	1.32	2.29	2.81
c	$\pi/4$	1.38	1.12	1.76	2.18
d	$\pi/3$	1.14	0.97	1.18	1.51

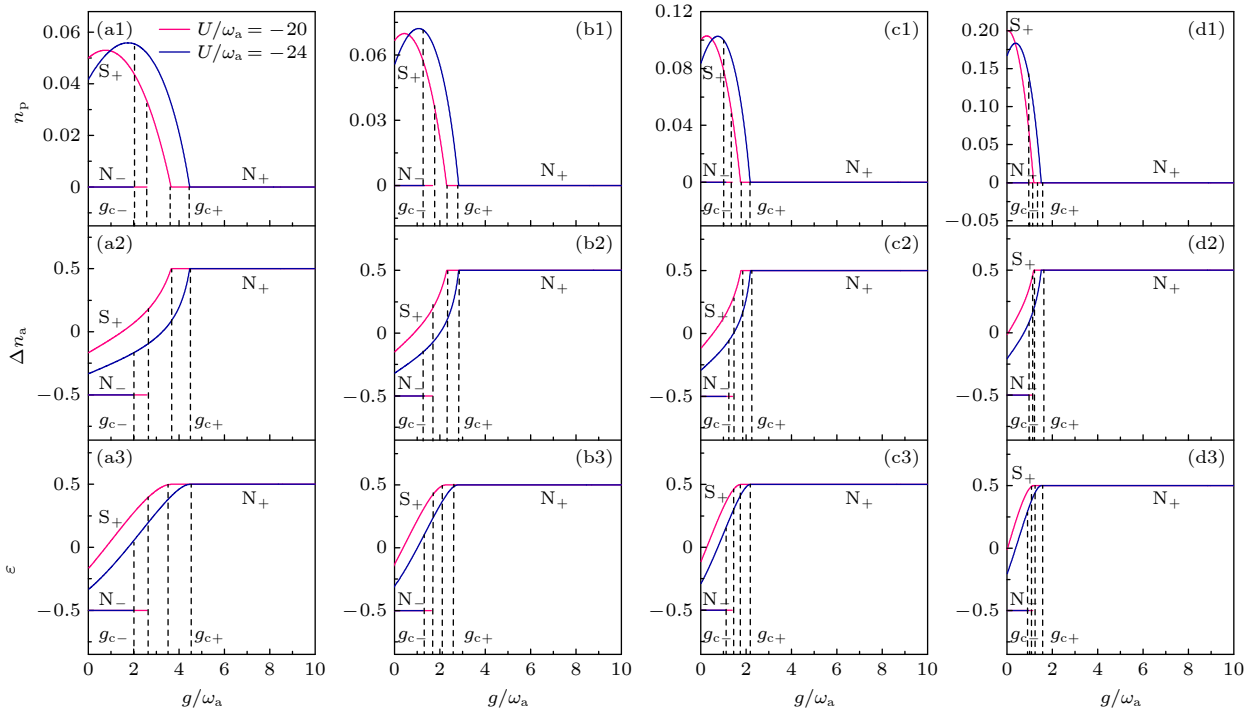


图 6 红失谐下 (a1)—(d1) 总平均光子数分布 n_p, (a2)—(d2) 原子布居数差分布 Δn_a 和 (a3)—(d3) 平均基态能量 ε 随原子-场耦合强度 g/ω_a 的变化曲线

Fig. 6. Variations curves of (a1)–(d1) total average photon number n_p, (a2)–(d2) atomic population imbalance Δn_a, and (a3)–(d3) average ground state energy with the atom-field coupling coefficient g/ω_a under the red detuning.

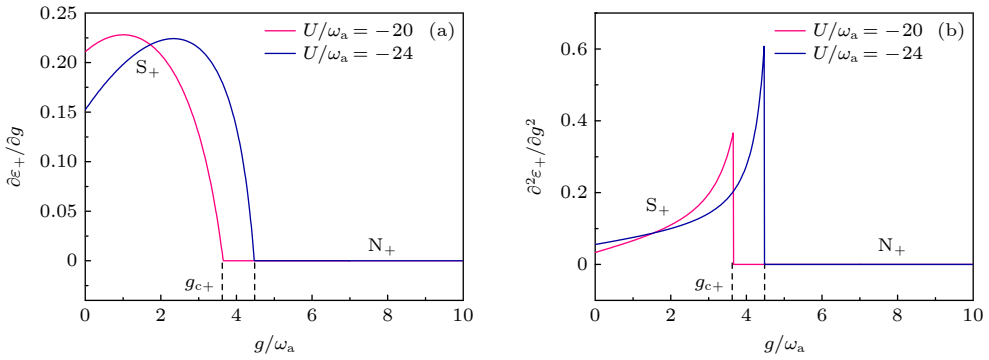


图 7 在红失谐下, (a) 基态能量对 g 的一阶偏导 $\partial\varepsilon_+/\partial g$ 和 (b) 二阶偏导 $\partial^2\varepsilon_+/\partial g^2$ 随 g/ω_a 的变化曲线

Fig. 7. Under red detuning, the first-order deflection $\partial\varepsilon_+/\partial g$ (a) ground state energy with respect to g and the second-order deflection $\partial^2\varepsilon_+/\partial g^2$ (b) change curve with respect to g/ω_a.

3.5 红失谐时两个正常相之间的量子相变

在表 3 中取参数 $U/\omega_a = -14, -16$, 其他参数不变, 代入 (18) 式可得相变点的具体值, 如表 5 所列, 能够得到 g_{c-} 大于 g_{c+}. 代入 (22) 式可得布居数差 Δn_a 随耦合强度 g 变化的曲线, 如图 8 所示.

在红失谐时取非线性相互作用 $U/\omega_a = -14, -16$, 只有正常相 N_- 和反转的正常相 N_+. 平均光子数始终为零, 布居数差分布 $\Delta n_{a\mp} = \mp 1/2$ 和基态能级的分布 $\varepsilon_\mp/\omega_a = \mp 1/2$, 画出的图一样, 所以图 8 只画了布居数差 Δn_a. 从图 8 中可看出 g_{c+} 都小于 g_{c-}, 随着 U 变大, g_{c+} 变小, g_{c-} 变大. 随着第二模光场比例的增大, 相变点都向减小的方向移动. 图 8 主要展示了图 5 中量子态 N_- 经过相变点 g_{c+} 到量子态 $NP_{bi}(N_-, N_+)$, 再经过相变点 g_{c-} 到量子态 N_+ 的变化.

红失谐时, 有双稳态和多样的共存态. 既存在正常相到超辐射相的二级量子相变, 又由于原子-光的非线性的相互作用, 引起新奇的反转超辐射相到反转正常相的二级逆量子相变.

表 5 $U/\omega_{\rm a}=-14,\ -16$, $g_{\rm c-}$ 和 $g_{\rm c+}$ 值

Table 5. Values of $g_{\rm c-}$ and $g_{\rm c+}$ at $U/\omega_{\rm a}=-14,\ -16$.

	φ	$g_{\rm c-}/\omega_{\rm a}$		$g_{\rm c+}/\omega_{\rm a}$	
		$U/\omega_{\rm a}=-14$	$U/\omega_{\rm a}=-16$	$U/\omega_{\rm a}=-14$	$U/\omega_{\rm a}=-16$
a	0	3.27	3.06	1.83	2.58
b	$\pi/6$	2.10	1.97	1.10	1.60
c	$\pi/4$	1.71	1.61	0.76	1.19
d	$\pi/3$	1.35	1.29	0.21	0.70

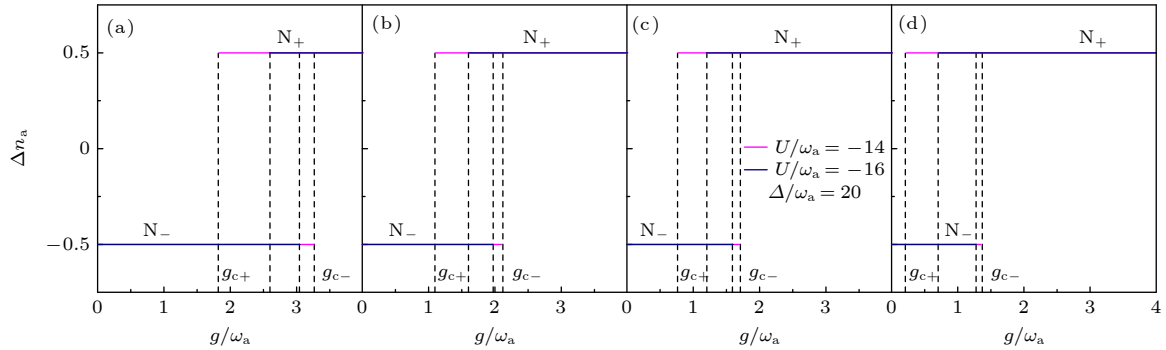


图 8 红失谐下布居数差 $\Delta n_{\rm a}$ 的期待值作为是原子-场耦合强度 $g/\omega_{\rm a}$ 的函数

Fig. 8. Variation of atomic population imbalance $\Delta n_{\rm a}$ as a function of the strength of the atom-field $g/\omega_{\rm a}$ under red detuning.

4 结 论

两个光学腔中的玻色-爱因斯坦凝聚系统提供了一个奇妙的模型, 可用于研究腔电动力学的强耦合区域中的量子相变. 利用调整原子-光的非线性相互作用强度和泵浦激光器频率的方案, 可以预测在实验中能够观测到反向量子相变、原子布居数反转和双稳态的宏观量子态. 在蓝失谐 $\omega'>0$ 时, 非线性相互作用可以引起正常相到超辐射相的二级量子相变; 红失谐 $\omega'<0$ 时, 会引起新奇的反转的超辐射相 $\rm S_+$ 态, 以及 $\rm S_+$ 到反转的正常相 $\rm N_+$ 的逆向的二级量子相变. 自旋相干态法由于能够考虑正常和反转的赝自旋状态来揭示双稳态和共存, 所以它在宏观量子特性的理论研究中具有很大优势. 本文研究了双模 Dicke 模型中, 双模光场成一定的比例关系, 双模腔场和原子偶极耦合常数相等, 且一模腔场和原子有非线性相互作用时的基态特性和新奇的量子相变. 对双稳态阶段的观察与非平衡 Dicke 模型的半经典动力学一致[26]. 原子-光非线性相互作用和双模光场的比例不但影响相图中各种相的范围, 而且影响了相边界的位置和基态物理量的变化.

参考文献

[1] Vojta M 2003 *Rep. Prog. Phys.* **66** 2069

[2] Gu S J 2010 *Int. J. Mod. Phys. B* **24** 4371

[3] Liu N 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 013402 (in Chinese) [刘妮 2013 物理学报 **62** 013402]

[4] Dicke R H 1954 *Phys. Rev. A* **93** 99

[5] Clive E, Tobias B 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066203

[6] Zanardi P, Paris M G A, Venuti L C 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042105

[7] Liu N, Lian J L, Ma J, et al. 2011 *Phys. Rev. A* **83** 033601

[8] Zhao J C, Hwang M J 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 163601

[9] Zhao X Q, Liu N, Liang J Q 2017 *Opt. Express* **25** 8123

[10] Novokreschenov D, Kudlis A, Iorsh I, Tokatly I V 2023 *Phys. Rev. B* **108** 235424

[11] Wang Q, Robnik M 2020 *Phys. Rev. E* **102** 032212

[12] Tolkunov D, Solenov D 2007 *Phys. Rev. B* **75** 024402

[13] Kirkova A V, Ivanov P A 2023 *Phys. Scr.* **98** 045105

[14] Léonard J, Morales A, Zupancic P, Esslinger T, Donner T 2017 *Nature* **543** 87

[15] Léonard J, Morales A, Zupancic P, Esslinger T 2017 *Science* **358** 1415

[16] Wu Z G, Chen Y, Zhai H 2018 *Sci. Bull.* **63** 542

[17] Qin W, Zheng D C, Wu Z D, Chen Y H, Liao R Y 2024 *Phys. Rev. A* **109** 013310

[18] Yu L X, Liang Q F, Wang L R, Zhu S Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 134204 (in Chinese) [俞立先, 梁奇锋, 汪丽蓉, 朱士群 2014 物理学报 **63** 134204]

[19] Soldati R R, Mitchison M T, Landi G T 2021 *Phys. Rev. A* **104** 052423

[20] Quezada L F, Nahmad-Achar E 2017 *Phys. Rev. A* **95** 013849

[21] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301

[22] Zhao X Q, Liu N, Liang J Q 2014 *Phys. Rev. A* **90** 023622

[23] Liu N, Zhao X Q, Liang J Q 2019 *Int. J. Theor. Phys.* **58** 558

[24] Yang X Y, Xue H B, Liang J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 114205 (in Chinese) [杨晓勇, 薛海斌, 梁九卿 2013 物理学报 **62** 114205]

[25] Larson J, Damski B, Morigi G, Lewenstein M 2008 *Phys.*

Rev. Lett **100** 050401
[26] Liu N, Li J D, Liang J Q 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053623
[27] Wang Z M, Lian J L, Liang J Q, Yu Y M, Liu W M 2016 *Phys. Rev. A* **93** 033630

Nonlinear interactions caused novel quantum phase transitions in two-mode Dicke models*

Zhao Xiu-Qin [1)2)3)] Zhang Wen-Hui [1)2)3)†] Wang Hong-Mei [1)2)3)]

1) (*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong* 030619, *China*)

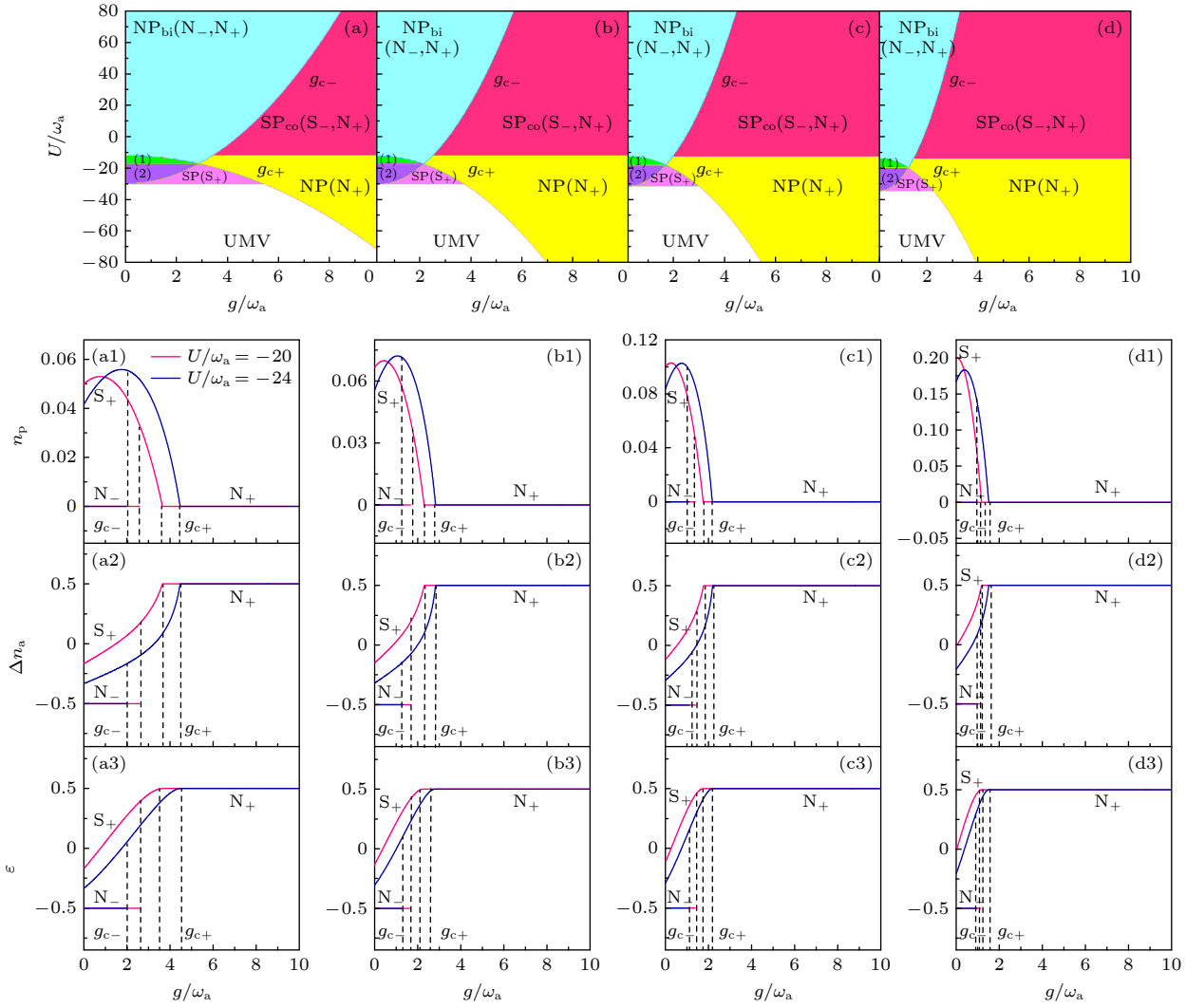
2) (*Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong* 030619, *China*)

3) (*Shanxi Key Laboratory for Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Taiyuan Normal University, Jinzhong* 030619, *China*)

(Received 10 May 2024; revised manuscript received 17 June 2024)

Abstract

Quantum phase transition is an important subject in the field of quantum optics and condensed matter physics. In this work, we study the quantum phase transition of the two-mode Dicke model by using the nonlinear atom-light interaction introduced into the interaction between one mode light field and atom. The spin coherent variational method is used to study macroscopic multi-particle quantum systems. Firstly, the



pseudo spin operator is diagonalized to obtain the variational fundamental state energy functional by means of spin coherent state transformation under the condition of coherent state light field. The energy functional is used to find the extreme value of the classical field variable, and the second derivative is determined to find the minimum value, and finally the exact solution of the ground state energy is given. Four different proportional relationships are used to study the two-mode optical field, and the rich structure of macroscopic multi-particle quantum states is given by adjusting atom-optical nonlinear interaction parameters under the experimental parameters. The abundant ground state properties such as bistable normal phase, coexisting normal-superradiation and atomic population inversion under blue and red detuning are presented. The nonlinear atom-light interaction causes blue detuning, and there is also a second-order quantum phase transition from the normal phase to the superradiation phase in the standard two-mode Dicke model. In the case of red detuning, a novel and stable reversed superradiation phase also appears. With the increase of the coupling coefficient, the reversed superradiation phase is transformed into the reversed normal phase. The nonlinear interaction between atoms and light and the different ratio of two modes of light field have great influence on the phase boundary of quantum phase transition, and the region of quantum state, as shown in Fig. (a)–(d).

When the nonlinear interaction takes two definite values, the curve of the ground state physical parameters changing with the coupling parameters of atoms and light also reflects the novel second-order inverse quantum phase transition from the reversed superradiation phase to the reversed normal phase in red detuning, as shown in Fig. (a1)–(d3).

Keywords: two-mode Dicke model, atomic-optical nonlinear interaction, quantum phase transition, spin coherent state method

PACS: 03.75.Mn, 05.30.Rt, 32.80.Qk, 42.50.Pq **DOI:** 10.7498/aps.73.20240665

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12304404) and the Basic Research Project of Shanxi Province, China (Grant No. 202203021222236).

† Corresponding author. E-mail: zhangwh@tynu.edu.cn

物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

非线性相互作用引起的双模Dicke模型的新奇量子相变

赵秀琴 张文慧 王红梅

Nonlinear interactions caused novel quantum phase transitions in two-mode Dicke models

Zhao Xiu-Qin Zhang Wen-Hui Wang Hong-Mei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 73, 160302 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240665
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.73.20240665
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

您可能感兴趣的其他文章
Articles you may be interested in

含有Dzyaloshinskii-Moriya相互作用的自旋1键交替海森伯模型的量子相变和拓扑序标度
Quantum phase transition and topological order scaling in spin-1 bond-alternating Heisenberg model with Dzyaloshinskii-Moriya interaction
物理学报. 2020, 69(9): 090302 https://doi.org/10.7498/aps.69.20191773

Jaynes-Cummings晶格模型和Rabi晶格模型的量子相变
The quantum phase transition in the Jaynes-Cummings lattice model and the Rabi lattice model
物理学报. 2021, 70(10): 100201 https://doi.org/10.7498/aps.70.20202066

自旋-1/2量子罗盘链的量子相与相变
Quantum phases and transitions of spin-1/2 quantum compass chain
物理学报. 2022, 71(3): 030302 https://doi.org/10.7498/aps.71.20211433

准一维混合自旋(1/2, 5/2) Ising-*XXZ*模型的量子相干和互信息
Quantum coherence and mutual information of mixed spin-(1/2, 5/2) Ising-*XXZ* model on quasi-one-dimensional lattices
物理学报. 2023, 72(13): 130301 https://doi.org/10.7498/aps.72.20230381

各向异性ruby晶格中费米子体系的Mott相变
Mott transition of fermions in anisotropic ruby lattice
物理学报. 2021, 70(23): 230305 https://doi.org/10.7498/aps.70.20210963

基于动力学平均场的光晶格超冷原子量子模拟
Quantum simulation of ultracold atoms in optical lattice based on dynamical mean-field theory
物理学报. 2023, 72(18): 183701 https://doi.org/10.7498/aps.72.20230701