

# 超材料梁的双阶耦合带隙调控设计与宽带减振特性\*

刘权兴 何哲星 李永强 温激鸿 肖勇†

(国防科技大学智能科学学院, 装备综合保障技术重点实验室, 长沙 410073)

(2024年5月14日收到; 2024年6月18日收到修改稿)

局域共振带隙和 Bragg 带隙可同时存在于超材料梁中, 利用两种带隙之间的相互耦合效应可以实现超宽耦合带隙设计, 在宽带减振领域极具应用潜力. 以往研究通常考虑单振子超材料梁的单阶耦合带隙设计, 因而只能实现单阶的超宽耦合带隙, 无法满足双目标或多目标频带的宽带减振需求. 为此, 本文开展了双振子超材料梁的双阶耦合带隙调控设计研究, 提出了一种实现双阶耦合宽带隙的设计方法, 分析了所设计双阶耦合带隙相比传统单阶耦合带隙的带宽优势, 并探究了双振子质量分配比对双阶耦合带隙总宽度的影响, 进一步设计出最优的质量分配比, 使得实现的双阶耦合带隙的总宽度最宽. 此外, 还采用谱元法研究了基于双阶耦合带隙设计的双振子超材料梁的减振特性, 通过与有限元法进行对比, 验证了谱元法的准确性, 研究表明基于双阶耦合带隙设计可以实现两个宽频带范围的高效减振.

**关键词:** 超材料梁, 弯曲波带隙, 耦合带隙, 宽带减振**PACS:** 46.40.-f, 62.30.+d, 63.20.-e**DOI:** 10.7498/aps.73.20240689

## 1 引言

结构振动在飞机、舰艇、车辆等装备中广泛存在, 影响装备的性能、功能和服役寿命等, 因此开展结构减振技术的研究具有重要意义. 然而, 传统结构减振技术在重量、尺寸等约束下普遍难以同时实现宽带和高效的减振性能.

近年来, 超材料结构的发展为解决传统减振技术瓶颈问题提供了新思路, 在结构减振领域展现出了巨大的潜力<sup>[1-10]</sup>. 超材料结构是指通过在传统结构上附加或嵌入阵列化的微结构单元 (例如局域共振单元) 构筑的一类新型复合结构, 具有弹性波带隙特性, 利用这种带隙特性, 可以高效地抑制结构中特定频率范围内 (对应带隙频率范围内) 的振动传递, 即实现特定频带的高效减振性能.

超材料结构研究的重难点之一是如何实现宽带带隙设计, 从而实现宽带高效减振. 对此, 国内外学

者相继提出了多种方法, 包括耦合带隙设计<sup>[11,12]</sup>、多频谐振设计<sup>[13,14]</sup>、惯量放大结构设计<sup>[15-17]</sup>、非线性结构设计<sup>[18,19]</sup>等. 其中, 基于局域共振带隙与 Bragg 带隙耦合效应的设计方法相较于其他方法具有易实现、带隙宽、适应性强等优点, 早期已有学者围绕超材料杆、梁等结构的耦合带隙设计开展了深入研究<sup>[11,12]</sup>. 近期, 国内外学者围绕超材料结构的带隙耦合效应与利用展开了更广泛研究. Krushynska 等<sup>[20]</sup>在研究一种二维单相超材料时, 发现通过合理调节单相材料的二维周期分布即可产生带隙耦合效应, 利用该效应可实现二维宽频弹性波带隙设计. Li 等<sup>[21]</sup>提出了一种单相超材料梁结构, 对其同时设计弯曲波耦合带隙和纵波耦合带隙, 实现了梁结构的三维多向宽频振动的高效抑制. Guo 等<sup>[22]</sup>将带隙耦合原理引入到一种多尺度点阵夹芯超材料梁结构设计, 通过构建跨尺度元胞实现了超宽频耦合带隙, 并通过实验证实这种耦合带隙可以用于宽带振动抑制. 虽然国内外学者围绕

\* 国家自然科学基金重大项目 (批准号: 11991032) 和国家自然科学基金 (批准号: 51875569) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xiaoy@vip.sina.com

耦合带隙设计已经开展了广泛研究, 但已有研究通常仅考虑单振子超材料结构的单阶耦合带隙设计, 只利用局域共振带隙与单阶 Bragg 带隙的耦合效应, 因而只能实现单阶的超宽耦合带隙. 这种单阶耦合带隙设计方法虽然在单一频带的宽带减振中取得了一定效果, 但无法满足实际工程中普遍面临的两个或多个频带宽带减振的需求. 因此, 进一步探讨双阶耦合带隙调控设计方法及其宽带减振特性具有重要的理论意义与应用价值.

针对上述问题, 本文以一种双振子超材料梁为对象开展双阶耦合带隙调控设计研究, 旨在提出实现双阶耦合宽带隙的设计方法, 探明双阶耦合带隙特性及其调控设计规律, 并探究基于双阶耦合带隙设计的双振子超材料梁的宽带减振特性. 基于本文的研究, 有望为超材料梁结构在多目标频带宽带减振中的应用提供新的理论和方法支持.

## 2 双振子超材料梁的弯曲波色散关系解析模型

单振子超材料梁结构是通过在一根均匀基体梁结构上周期性地附加相同的单自由度局域振子构成. 以往研究表明<sup>[12,23]</sup>, 单振子超材料梁结构可以实现单阶耦合带隙. 为了在超材料梁结构中实现双阶耦合带隙, 本文通过在基体梁结构上周期性地附加两种具有不同共振频率的单自由度局域振子来构建双振子超材料梁结构. 为使问题简化, 可考虑周期阵列的两种振子附加在基体梁结构上的位置是相同的, 其物理模型如图 1 所示. 其中,  $m_1$  和  $k_1$  分别是第 1 种周期阵列局域振子的质量和弹簧刚度,  $m_2$  和  $k_2$  分别是第 2 种周期阵列局域振子的质量和弹簧刚度,  $a$  是相邻振子的间距, 即超材料梁结构的晶格常数. 下文将给出如图 1 所示的双振子超材料梁的弯曲波带隙计算解析模型.

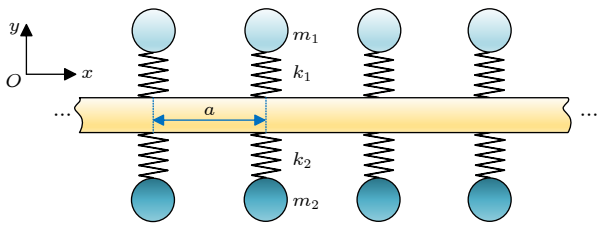


图 1 附有周期性双振子的超材料梁结构物理模型

Fig. 1. Physical model of a metamaterial beam structure carrying two periodic arrays of local resonators.

附有局域振子的超材料梁结构的弯曲波带隙特性与局域振子的动力学特性紧密相关. 单自由度振子的动力学特性可以通过其对基体梁的附加动刚度来表征, 具体表达式为<sup>[12,23]</sup>

$$D_{r,j} = k_j - \frac{k_j^2}{k_j - \omega^2 m_j}, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

也可将 (1) 式写成关于振子固有频率的表达式:

$$D_{r,j} = \frac{-\omega^2 m_j}{1 - \omega^2 / \omega_{r,j}^2}, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

其中  $\omega_{r,j} = \sqrt{k_j/m_j} = 2\pi f_{r,j}$ ,  $f_{r,j}$  为第  $j$  个局域振子的共振频率 (固有频率). 若考虑局域振子的阻尼, 弹簧刚度  $k_j$  应修正为复刚度  $k_j(1 + i\eta_j)$ , 其中  $\eta_j$  是第  $j$  个振子的损耗因子. 于是, (2) 式需改写为

$$D_{r,j} = \frac{-\omega^2 m_j}{1 - \omega^2 / [\omega_{r,j}^2 (1 + i\eta_j)]}. \quad (3)$$

对于本文研究的双振子超材料梁, 由于两种振子附加在基体梁的相同位置, 那么两个振子的总附加动刚度  $D_r$  等于两个振子附加动刚度的叠加, 即:

$$D_r = \sum_{j=1}^2 D_{r,j}. \quad (4)$$

基于文献 [12, 23] 中已有的解析建模方法, 可以推得图 1 所示的双振子超材料梁的弯曲波色散关系计算的显式解析表达式为

$$\cosh^2(\mu) + \alpha_1 \cosh(\mu) + \alpha_2 = 0, \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -[\cos(k_b a) + \cosh(k_b a)] \\ &\quad - \frac{D_r}{4EI k_b^3} [\sin(k_b a) - \sinh(k_b a)], \\ \alpha_2 &= \cos(k_b a) \cosh(k_b a) \\ &\quad + \frac{D_r}{4EI k_b^3} [\sin(k_b a) \cosh(k_b a) \\ &\quad - \cos(k_b a) \sinh(k_b a)]. \end{aligned} \quad (6)$$

这里  $\mu$  是超材料梁的弯曲波传播常数, 其实部  $\text{Re}(\mu)$  被称为衰减常数, 虚部  $\text{Im}(\mu)$  被称为相位常数;  $D_r$  是 (4) 式所给出的双局域振子的总附加动刚度;  $k_b$  为欧拉梁的弯曲波波数,

$$k_b = \left( \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{1/4}, \quad (7)$$

其中  $\rho$  和  $E$  分别是基体梁材料的密度和杨氏模量,  $A$  和  $I$  分别是梁的横截面积和截面二次矩. 如果考

考虑的是矩形截面梁, 设其宽度为  $b$ , 厚度为  $h$ , 则有  $A = b \times h$ ,  $I = bh^3/12$ . 如果考虑基体梁材料的阻尼, 那么其杨氏模量可替换为复数形式  $E(1 + i\eta_b)$ , 其中  $\eta_b$  是基体梁材料的损耗因子.

(5) 式是一个关于  $\cosh(\mu)$  的标准二次方程, 其解为

$$\cosh(\mu) = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2}. \quad (8)$$

每给定一个频率, 可以采用 (8) 式求得两对大小相同符号相反的传播常数,  $\pm\mu_1$  和  $\pm\mu_2$ . 每一对传播常数刻画的是同一种传播特性 (幅值和相位变化) 的本征波, 但传播方向相反. 对于超材料梁而言, 由于较小的衰减常数表征了衰减较慢的波, 因此可以很好地量化带隙的波衰减性能. 定义最小衰减常数为 [12,23]

$$\min |\operatorname{Re}(\mu)| = \min \{|\operatorname{Re}(\mu_1)|, |\operatorname{Re}(\mu_2)|\}. \quad (9)$$

通过绘制  $\min |\operatorname{Re}(\mu)|$  与频率  $f$  之间的关系曲线, 便能够充分衡量梁的弯曲波带隙特性. 满足  $\min |\operatorname{Re}(\mu)| > 0$  的频率范围即带隙范围, 而  $\min |\operatorname{Re}(\mu)|$  的大小即反映了带隙相应频率处的衰减能力强弱.

### 3 双阶耦合带隙的调控设计与分析

本文考虑的研究对象是双振子超材料梁结构, 如果将其中双振子的共振频率设计为不相同, 就可以实现两个不同频率位置的局域共振带隙. 可以料想, 通过合理设计两个局域共振带隙的频率位置, 使其分别与第一阶 Bragg 带隙、第二阶 Bragg 带隙相耦合, 就可同时实现第一阶和第二阶带隙耦

合, 即实现双阶耦合带隙. 为了更好地设计、认识及利用双振子超材料梁的双阶耦合带隙特性, 有几方面的问题值得研究. 1) 如何设计双振子参数来实现双阶耦合带隙? 2) 双阶耦合带隙与单阶耦合带隙相比, 其带隙特性有何不同以及有何优势? 3) 为了实现最宽带的减振性能, 在双振子总附加质量比给定的条件下, 如何分配双振子的质量比以实现最大的双阶耦合带隙总宽度? 4) 考虑到实际材料/结构系统中通常都存在阻尼效应, 有必要分析阻尼对双阶耦合带隙的影响. 3.1 节针对上述前两个问题展开研究, 3.2 节针对第 3 个问题展开研究, 3.3 节针对第 4 个问题展开研究.

#### 3.1 双阶耦合带隙的设计及其与单阶耦合带隙的对比分析

##### 3.1.1 双阶耦合带隙的设计

为实现双阶耦合带隙设计, 自然会想到的是参考以往针对单阶耦合带隙的设计方法进行设计, 但是这种方法是否可行还未曾研究. 因此, 下文将先考察直接采用已有的单阶耦合带隙的设计方法来设计双阶耦合带隙的可行性.

Xiao 等 [12,23] 以单振子超材料梁为对象, 对其单阶耦合带隙的调控设计已经开展过系统深入研究, 他们基于单振子超材料梁结构的带隙边界频率解析式, 已经推导出了实现单阶耦合带隙 (局域共振带隙与某阶 Bragg 带隙相互耦合) 的局域振子共振频率  $f_{r,1}$  的设计公式, 具体为

$$f_{r,1} = f_{r1,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{1,n}}{m_1}}, \quad (10)$$

式中,

$$k_1 = k_{1,n} = \begin{cases} \left. \frac{EI\bar{f}^3}{a^3} \left[ \frac{1}{\gamma_1\bar{f}} + \frac{\coth(\bar{f}/2) + \cot(\bar{f}/2)}{4} \right]^{-1} \right|_{\bar{f}=n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \left. \frac{EI\bar{f}^3}{a^3} \left[ \frac{1}{\gamma_1\bar{f}} + \frac{\tanh(\bar{f}/2) - \tan(\bar{f}/2)}{4} \right]^{-1} \right|_{\bar{f}=n\pi}, & n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (11)$$

其中  $n$  为 Bragg 带隙的阶数,  $f_{r1,n}$  是实现局域共振带隙与第  $n$  阶 Bragg 带隙耦合时局域振子应具有共振频率 (固有频率),  $k_{1,n}$  是相应的局域振子的弹簧刚度,  $m_1$  是相应的局域振子的质量,  $\gamma_1$  为局域振子的无量纲质量 (单振子相对于基体梁元胞的

附加质量比, 简称“附加质量比”), 可写为

$$\gamma_1 = \frac{m_1}{\rho A a}. \quad (12)$$

由 (10) 式—(12) 式可知, 给定单振子超材料梁结构的基体梁结构参数和晶格常数, 以及单振子

的附加质量比  $\gamma_1$  (无量纲质量), 便可以设计出实现单阶耦合带隙所需单振子的质量  $m_1$ 、弹簧刚度  $k_1$  及共振频率  $f_{r,1}$ 。

为了考察上述单振子超材料梁的单阶耦合带隙设计公式是否适用于双振子超材料梁的双阶耦合带隙设计, 先以单振子超材料梁结构为例, 分别设计实现第一阶耦合带隙和第二阶耦合带隙的两种单振子参数; 随后, 再将设计好的两种单振子同时附加在基体梁上来构建双振子超材料梁结构, 进而考察其是否可同时实现第一阶和第二阶耦合带隙. 为便于比较, 后文研究中, 涉及的所有单振子超材料梁或双振子超材料梁均选用相同的基体梁结构及晶格常数, 具体参数如表 1 所列。

表 1 基体梁结构参数及晶格常数

Table 1. Parameters of host beam and lattice constant.

密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	杨氏模量 $E/\text{Pa}$	宽 $b/\text{mm}$	厚 $h/\text{mm}$	晶格常数 $a/\text{mm}$
2700	$7\times 10^{10}$	20	4	200

首先, 对单振子超材料梁结构开展单阶耦合带隙设计, 分两种情形来考虑单振子的附加质量比, 分别为  $\gamma_1 = 0.5$  和  $\gamma_1 = 1$ . 于是, 根据 (10) 式—(12) 式, 在两种附加质量比条件下, 均可设计出实现第一阶带隙耦合 ( $n = 1$ ) 和第二阶带隙耦合 ( $n = 2$ ) 所需单振子的质量  $m_1$ 、弹簧刚度  $k_1$  及共振频率  $f_{r,1}$ , 进而利用 (8) 式和 (9) 式就可以计算出相应的单阶耦合带隙特性, 即最小衰减常数  $\min|\text{Re}(\mu)|$  与频率  $f$  之间的关系曲线, 结果如图 2 所示. 当单振子的附加质量比  $\gamma_1 = 0.5$  时, 为实现第一阶带隙耦合 ( $n = 1$ ), 可由 (10) 式求得单振子应具有共振频率为  $f_{r,1} = f_{r,1,1} = 193.20$  Hz; 为实现第二阶带隙耦合 ( $n = 2$ ), 可由 (10) 式求得单振子应具有共振频率为  $f_{r,1} = f_{r,1,2} = 691.74$  Hz. 类似地, 当单振子的附加质量比  $\gamma_1 = 1$  时, 为实现第一阶带隙耦合 ( $n = 1$ ) 和第二阶带隙耦合 ( $n = 2$ ), 可由 (10) 式求得单振子的共振频率应分别为  $f_{r,1} = f_{r,1,1} = 169.46$  Hz 和  $f_{r,1} = f_{r,1,2} = 576.66$  Hz.

图 2(a) 所示为第一阶耦合带隙设计结果, 可以看出, 在所示频率范围内共存在 3 个带隙, 其中第一带隙为局域共振带隙, 第二、三带隙为 Bragg 带隙. 局域共振带隙区别于 Bragg 带隙的典型特征是: 局域共振带隙范围内的最小衰减常数曲线存在尖锐的峰值, 因此其对波的衰减性能在峰值频率处会急剧增强, 而 Bragg 带隙范围内的最小衰

减常数曲线则不存在尖锐峰值. 此外, 局域共振带隙的两个边界频率都与振子参数相关, 如果只改变局域振子的参数 (如调节局域振子的附加质量比), 局域共振带隙 (如图 2(a) 中第一带隙) 的两个边界频率都会发生变化. Bragg 带隙则不同, 其一个边界频率与振子参数无关, 而只与基体梁参数和晶格常数有关, 这一频率被称为 Bragg 频率, 可以通过 (13) 式求得 [12,23]:

$$f_{Bn} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

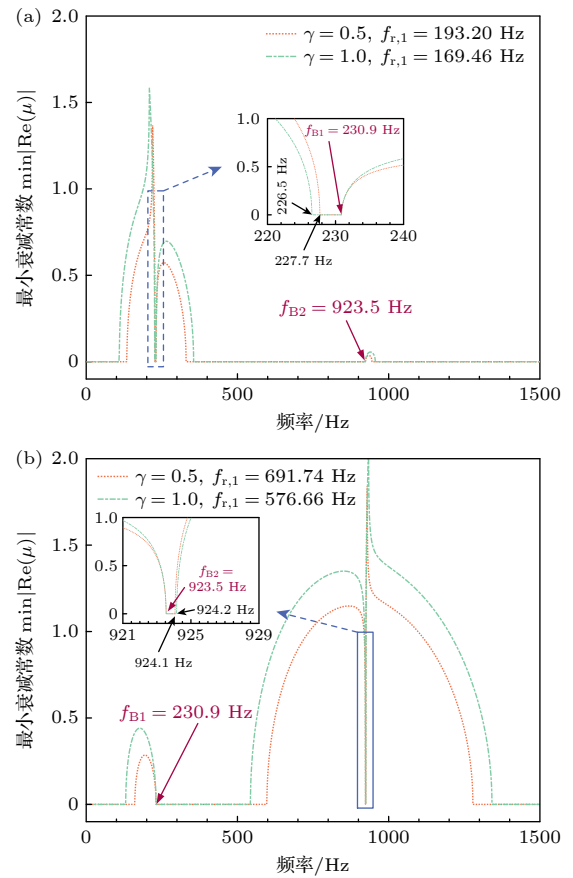


图 2 单振子超材料梁结构的单阶耦合带隙 (a) 第一阶耦合带隙; (b) 第二阶耦合带隙

Fig. 2. Single-order coupling bandgap of metamaterial beam structure carrying single-frequency local resonators: (a) The first order coupling bandgap; (b) the second order coupling bandgap.

从图 2(a) 可以得知, 第二、三带隙 (均为 Bragg 带隙) 的起始频率分别对应于第一阶 Bragg 频率  $f_{B1} = 230.9$  Hz 和第二阶 Bragg 频率  $f_{B2} = 923.5$  Hz. 因此, 如果只改变局域振子的参数 (如调节局域振子的附加质量比), 对图 2(a) 中第二、三带隙的起始频率并没有影响. 图 2(a) 还表明, 第一

带隙(局域共振带隙)与第二带隙(第一阶 Bragg 带隙)发生了强耦合,两者之间只存在一个很窄的通带. Xiao 等<sup>[23]</sup>针对单振子超材料梁结构的研究表明,这一通带总是存在的,且当满足由(10)式所确定的带隙耦合条件时,这一通带的宽度变为最窄,相应的耦合带隙(局域共振带隙和第一阶 Bragg 带隙)的总宽度最宽.从图 2(a)结果还可以得知,当局域振子附加质量比 $\gamma_1$ 从 0.5 增大到 1,耦合带隙之间的窄通带略有增宽,但增宽幅度很小;同时,耦合带隙的宽度明显增大.总之,在一阶带隙耦合条件下,第一带隙(局域共振带隙)与第二带隙(第一阶 Bragg 带隙)之间的通带宽度远小于带隙宽度,几乎可以忽略窄通带的存在,因此可近似地将第一、二带隙视合并为一个超宽的“伪带隙”,用于单个目标频带的宽带减振.

图 2(b)为第二阶耦合带隙设计结果,可以看出,在所示频率范围内同样存在 3 个带隙,其中第一、二带隙为 Bragg 带隙,第三带隙为局域共振带隙.第一、二带隙的截止频率分别对应于第一阶 Bragg 频率 $f_{B1} = 230.9$  Hz 和第二阶 Bragg 频率 $f_{B2} = 923.5$  Hz.因为 Bragg 频率只与基体梁参数和晶格常数有关,调节局域振子的附加质量比对图 2(b)中第一、二带隙(Bragg 带隙)的截止频率并没有影响.从图 2(b)还可以看出,第二带隙(第二阶 Bragg 带隙)与第三带隙(局域共振带隙)发生了耦合,两者之间只存在一个极窄的通带,可以近似地将第二、三带隙视合并为一个超宽的“伪带隙”.

进一步,对双振子超材料梁结构(同时附加振子 1 和振子 2)开展双阶耦合带隙设计.给定振子 1 和振子 2 的总附加质量比为 $\gamma = 1$ ,设振子的附加质量平均分配给振子 1 和振子 2,即 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ .首先,直接沿用前文单振子超材料梁的单阶耦合带隙设计方法来设计振子 1 和 2,可以直接分别采用图 2(a), (b)中 $\gamma_1 = 0.5$ 所对应的单振子的设计参数,即振子 1 的共振频率 $f_1 = 193.20$  Hz,振子 2 的共振频率 $f_2 = 691.74$  Hz,利用(8)式和(9)式即可以计算出该双振子超材料梁的带隙特性,如图 3(a)所示.可以看出,在所示频率范围内,产生了 4 个带隙,其中第一、四带隙为局域共振带隙(带隙内出现了尖锐衰减常数),而第二、三带隙为 Bragg 带隙.第二带隙的起始频率和第三带隙的截止频率分别对应第一、二阶 Bragg 频率( $f_{B1} =$

230.9 Hz,  $f_{B2} = 923.5$  Hz).对比图 3(a)和图 2 中 $\gamma_1 = 0.5$ 所对应的结果可知,图 3(a)中第一带隙(第一局域共振带隙)与第二带隙(第一阶 Bragg 带隙)也实现了类似图 2(a)中的一阶耦合带隙效应,两者之间仅存在一个较窄的通带;图 3(a)中第三带隙(第二阶 Bragg 带隙)与第四带隙(第二局域共振带隙)也实现了类似图 2(b)中的二阶耦合带隙效应.但是,值得注意的是,图 3(a)中的窄通带明显比图 2 中的窄通带宽得多,图 3(a)中第一、二带隙之间的通带宽度约为 12 Hz,而图 2(a)中的窄通带宽度仅为约 3 Hz;图 3(a)中,第三、四带隙之间的通带宽度约为 6 Hz,而图 2(b)中的窄通带宽度仅为约 1 Hz.由此可以初步判断,图 3(a)中的结果还未彻底实现双阶耦合带隙,即第一、二带隙之间的通带,以及第三、四带隙之间的通带都还未达到最窄的状态.

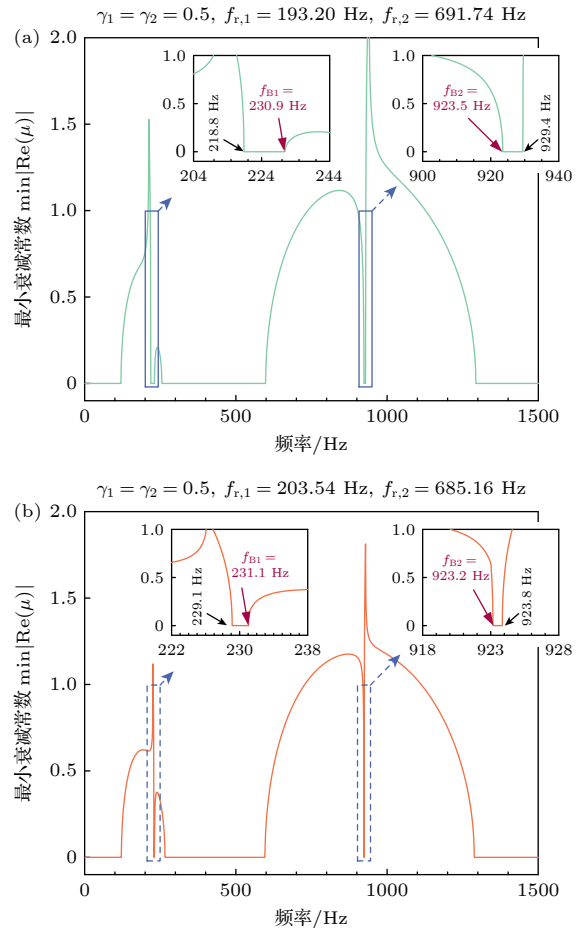


图 3 双振子超材料梁结构的双阶耦合带隙 (a)改进设计前;(b)改进设计后

Fig. 3. Double-order coupling bandgap of the metamaterial beam structure: (a) Designed bandgap before improvement; (b) designed bandgap after improvement.

针对上述现象, 本文考虑在单振子超材料梁结构的单阶耦合带隙设计方法基础上, 提出一种实现双振子超材料梁结构中双阶耦合带隙的改进设计方法: 将基于单振子超材料梁结构的单阶耦合带隙条件设计的振子参数作为初始值来寻找更优设计值. 对于以上例子, 即在振子 1 的共振频率  $f_1 = 193.20$  Hz、振子 2 的共振频率  $f_2 = 691.74$  Hz 为中心的一定频率范围内, 寻找一对更优的双振子共振频率, 使得所关心的两个窄通带的带宽最窄, 从而实现理想的双阶耦合带隙. 具体设计过程为: 在上述振子 1, 2 的共振频率为中心的附近频率范围内, 以一定频率间隔步长依次给定一对双振子的共振频率, 并计算出相应的双振子超材料梁的带隙特性, 进而计算出两个窄通带的总宽度 (归一化宽度之和); 当两个窄通带的总宽度达到最小值时, 则认为实现了理想的双阶耦合带隙, 相应的双振子的共振频率即为最优设计值. 对于图 3(a) 中关注的算例, 基于上述改进设计思路寻优得到的双振子的共振频率分别为  $f_1 = 203.54$  Hz 和  $f_2 = 685.16$  Hz, 对应的最小衰减常数  $\min|\text{Re}(\mu)|$  与频率  $f$  之间的关系曲线如图 3(b) 所示. 从图 3(b) 可以看出, 采用改进方法设计的双振子参数后, 第一、二带隙之间的窄通带宽度约为 2 Hz, 第三、四带隙之间的窄通带宽度约为 0.6 Hz, 相比于直接沿用单振子超材料梁结构的耦合带隙设计方法 (图 3(a)), 改进后的设计方法 (图 3(b)) 获得的带隙耦合程度明显提升, 实现了所期望的理想的双阶耦合带隙.

### 3.1.2 双阶耦合带隙与单阶耦合带隙的对比分析

上述研究表明, 对双振子超材料梁结构进行合理设计, 可以实现双阶耦合带隙. 现比较在相同的振子总附加质量比下, 双振子超材料梁结构耦合带隙总宽度与单振子超材料梁结构耦合带隙总宽度.

为便于比较, 定义所关心频率范围内第  $i$  个带隙的归一化宽度为

$$G_i = \frac{f_{i,2} - f_{i,1}}{f_{i,c}} = \frac{2(f_{i,2} - f_{i,1})}{(f_{i,2} + f_{i,1})}, \quad (14)$$

其中  $f_{i,1}$ ,  $f_{i,2}$ ,  $f_{i,c}$  分别为第  $i$  个带隙的起始频率、截止频率、中心频率. 若所关心频率范围内共有  $N_g$  个带隙, 将所有带隙的总宽度定义为各个带隙的归一化宽度之和:

$$\sum G = \sum_{i=1}^{N_g} G_i. \quad (15)$$

现以图 3(b) 所示典型算例 (双振子的总附加质量比为 1) 和图 2(a), (b) 中所所示算例 (选择其中单振子附加质量比为 1 的情形) 进行对比, 分析双振子超材料梁结构相比单振子超材料梁结构的带隙宽度优势. 用于对比的 3 种超材料梁结构的周期元胞示意图如图 4 所示. 3 种超材料梁结构的带隙特性对比情况如表 2 所列, 可以看出, 在振子的总附加质量比相同的条件下, 单振子超材料梁结构采用第二阶耦合带隙设计 ( $n = 2$ ) 相比第一阶耦合带隙设计 ( $n = 1$ ) 可以获得更宽的总带隙宽度. 但是其在单阶耦合带隙设计下所实现的总带隙宽度

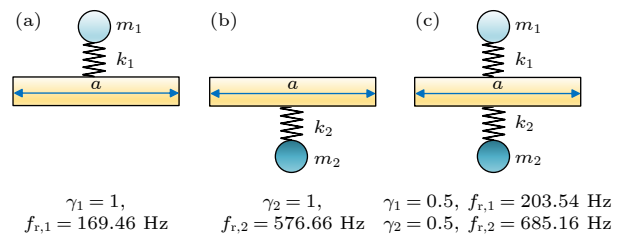


图 4 3 种超材料梁结构的周期元胞示意图 (a) 具有第一阶耦合带隙的单振子超材料梁的元胞 (单阶耦合带隙,  $n = 1$ ); (b) 具有第二阶耦合带隙的单振子超材料梁的元胞 (单阶耦合带隙,  $n = 2$ ); (c) 同时具有第一阶和第二阶耦合带隙的双振子超材料梁的元胞 (双阶耦合带隙)

Fig. 4. Schematic of unit cells of three metamaterial beams used for comparison of bandgaps: (a) Metamaterial beam carrying single-frequency local resonators with the first order coupling bandgap ( $n = 1$ ); (b) metamaterial beam carrying single-frequency local resonators with the second order coupling bandgap ( $n = 2$ ); (c) metamaterial beam carrying two single-frequency local resonators with the double-order coupling bandgap.

表 2 单阶耦合带隙设计与双阶耦合带隙设计所实现的带隙对比 (振子总附加质量比均为 1)

Table 2. Comparison of bandgaps achieved by design of single-order coupling bandgap and double-order coupling bandgap (the added resonator mass ratio is  $\gamma = 1$ ).

耦合带隙设计情形	单阶耦合带隙 ( $n = 1$ )	单阶耦合带隙 ( $n = 2$ )	双阶耦合带隙
第1带隙	$f_{1,1}/\text{Hz}$	108.300	130.190
边界频率	$f_{1,2}/\text{Hz}$	226.531	230.890
第2带隙	$f_{2,1}/\text{Hz}$	230.881	542.630
边界频率	$f_{2,2}/\text{Hz}$	355.171	923.548
第3带隙	$f_{3,1}/\text{Hz}$	922.821	924.158
边界频率	$f_{3,2}/\text{Hz}$	955.951	1341.580
第4带隙	$f_{4,1}/\text{Hz}$	—	—
边界频率	$f_{4,2}/\text{Hz}$	—	—
带隙总宽度	$\sum G$	1.1656	1.4458
		1.4458	1.5177

均窄于双振子超材料梁结构在双阶耦合带隙设计下所实现的总带隙宽度. 由此可见, 双振子超材料梁结构相比单振子超材料梁结构更有利于实现宽带隙设计.

以上研究表明, 本文所提出的双阶耦合带隙设计必须采用共振频率 (或谐振频率) 不同的两种局域共振振子来实现. 需要指出的是, 文献 [13, 14] 中已有通过局域共振振子的“多频谐振设计”来拓宽超材料结构带隙的研究, 但是与本文设计有所不同, 以往的“多频谐振设计”研究主要是针对亚波长尺度的低频范围 (即晶格常数远小于振子共振频率下基体结构中的弹性波波长) 来设计多个不同频率的局域振子. 虽然按照这种“多频谐振设计”方法, 每个振子都能产生一个窄带的局域共振带隙 (传统的低频局域共振带隙宽度通常较窄), 但是相邻的局域共振带隙之间总会存在一个通带, 且通带的宽度与相邻共振频率的间隔 (或频率差) 正相关, 只有将相邻的共振频率设计为比较接近时, 该通带的宽度才会变得较窄, 从而适当引入振子阻尼后, 可使得相邻的窄带局域共振带隙合并为一个更宽的局域共振带隙. 换言之, 如果相邻的共振频率相差较大时, 两个局域共振带隙之间的通带会变得较宽, 难以通过引入振子阻尼来实现两个局域共振带隙合二为一. 因此, 在以往的“多频谐振设计”研究中, 往往需要同时采用很多个“具有不同共振频率 (共振频率渐变的)”的局域共振振子, 才能实现多个窄带的局域共振带隙, 并进一步引入振子阻尼后, 才能将多个窄带局域共振带隙合并为一个宽带

隙. 概括而言, 传统的“多频谐振设计”来实现带隙展宽的研究普遍存在两个特点: 一是通常考虑深亚波长尺度的低频范围, 因此往往都采用较小的晶格常数 (即晶格常数远小于基体结构中的弹性波波长, 因而无法像本文一样利用两种带隙的耦合效应来拓宽带隙); 二是需要采用数量较多的“具有不同共振频率”的有阻尼局域共振振子才能显著拓宽带隙. 这种设计方法带来的问题是: 当待减振结构的长度  $L$  较长时 (比如与波长相当或更长), 若选用的晶格常数  $a$  较小 (深亚波长晶格), 那么所需周期数 ( $L/a$ ) 就较多, 导致所需要的“具有不同共振频率”的有阻尼局域共振振子的数量会非常多, 使得实际加工、安装“多频振子”的成本非常高昂, 不利于实际应用.

对比传统“多频谐振设计”方法, 本文所提出的双阶耦合带隙设计方法的优势有两点: 1) 可以采用较大的晶格常数  $a$  来构造超材料结构, 那么所需周期数 ( $L/a$ ) 就较少. 2) 只采用两种“具有不同共振频率”的局域共振振子就实现了带隙的显著拓宽, 可大幅减少所需振子的数量, 降低加工、安装成本, 便于实际应用.

为了更好地说明本文双阶耦合带隙的优势, 图 5(a) 对比了本文设计的双振子超材料梁的“双阶耦合带隙” (采用了较大的晶格常数  $a = 0.2$  m) 和传统深亚波长晶格条件下设计的双振子超材料梁的“双频局域共振带隙” (采用了较小的晶格常数  $a = 0.02$  m), 对比的两种超材料梁所选用的基体梁结构和双振子的附加质量比及共振频率都完全

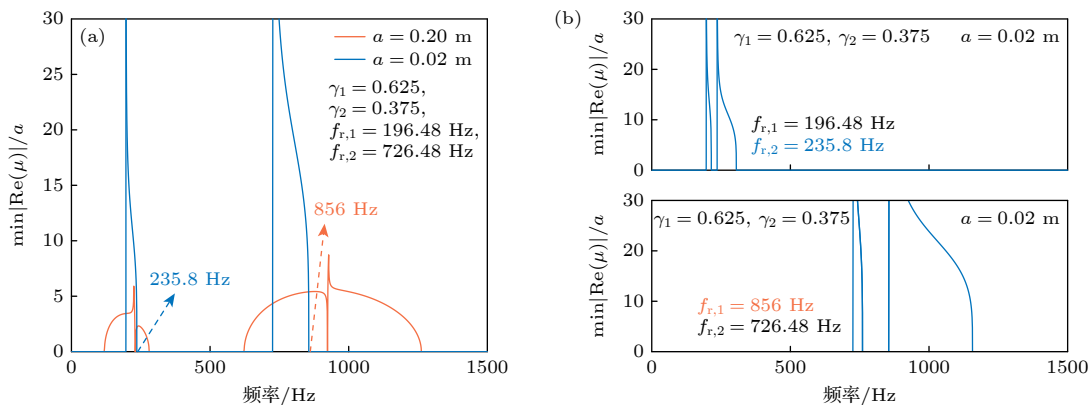


图 5 不同设计方法得到的双振子超材料梁的带隙特性对比 (a) 本文设计的双阶耦合带隙和传统深亚波长条件下设计的双频局域共振带隙的对比; (b) 深亚波长条件下双振子的共振频率被调节至比较靠近时的带隙特性

Fig. 5. Comparison of bandgaps of metamaterial beams carrying two single-frequency local resonators following different design methods: (a) Comparison of double-order coupling bandgaps obtained by present design and two resonance bandgaps obtained by conventional deep-subwavelength design; (b) two cases of resonance bandgaps obtained by conventional deep-subwavelength design of double-resonators with close resonance frequencies.

相同. 可以看出, 本文设计的“双阶耦合带隙”宽度远优于传统的“双频局域共振带隙”宽度. 其次, 可以注意到图 5(a) 中传统“双频局域共振带隙”由于两个局域共振带隙相隔较远, 它们之间的通带很宽, 为了缩小通带宽度, 进一步考虑两种其他设计方案 (将双振子的共振频率设计成更为靠近的方案): 方案一是将其中振子 2 的共振频率设计为第 1 个局域共振带隙的截止频率 (235.8 Hz), 而振子 1 参数保持不变; 方案二是将振子 1 的共振频率设计为第 2 个局域共振带隙的截止频率 (856 Hz), 而振子 2 参数保持不变. 相应地, 计算得到的两种方案的带隙特性如图 5(b) 所示. 可以看出, 这两种方案都在原来的局域共振带隙附近产生了一个新的局域共振带隙, 但是原来的局域共振带隙变得更窄了, 且所得新的两个局域共振带隙之间仍然存在一个较宽的通带, 无法直接合并为一个宽带隙. 此外, 两种方案所实现的带隙总宽度仍然不如本文设计的“双阶耦合带隙”, 而且还不能兼顾实现低频和高频的宽带隙.

### 3.2 双振子质量分配设计对双阶耦合带隙的调控

由前文研究可知, 当振子总附加质量比  $\gamma$  为 1 时, 若将振子总附加质量全部分配给振子 1 或振子 2 (退化为单振子超材料梁结构), 以及均分给振子 1 和 2 时 ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ ), 开展耦合带隙设计后, 3 种情形所获得的带隙总宽度是不同的 (见表 2). 由此可以推断, 在对双振子超材料梁结构开展双阶耦合带隙设计时, 双振子的质量分配比对带隙总宽度是有影响的. 换言之, 将附加质量均分给振子 1 和 2 可能并非最佳选择. 因此, 有必要进一步分析双振子质量分配比对双阶耦合带隙总宽度的影响.

#### 3.2.1 考虑一种给定的双振子总附加质量比

首先考虑给定一种总附加质量比的情况, 设总附加质量比  $\gamma$  为 1, 即有  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . 定义双振子质量分配比为

$$\beta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad (16)$$

其中  $\gamma_1, \gamma_2$  分别为振子 1 和振子 2 的附加质量比. 易知, 当  $\beta = 0$  时, 附加质量全部分配给振子 2, 即  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$ , 对应单振子超材料梁结构的第二阶耦合带隙设计 ( $n = 2$ ); 当  $\beta = +\infty$  时, 附加

质量全部分配给振子 1, 即  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ , 对应于单振子超材料梁结构的第一阶耦合带隙设计 ( $n = 1$ ).

当双振子的总附加质量比  $\gamma$  选定, 每给定一种质量分配比  $\beta$ , 就能确定振子 1 和振子 2 的附加质量比  $\gamma_1, \gamma_2$ . 随后, 采用 3.1 节提出的实现双阶耦合带隙的改进设计方法, 即可设计出所需的双振子频率, 同时计算出相应的双阶耦合带隙的频率范围, 进一步算出所关心频率范围内全部带隙的归一化宽度之和  $\sum G$ .

图 6(a) 所示为双振子质量分配比  $\beta$  变化对所设计的双阶耦合带隙频率范围的影响, 图中同时给出了所示频率范围内所有带隙的归一化宽度之和  $\sum G$  (红色实线)、第一阶耦合带隙的归一化宽度之和 (红色点划线) 以及第二阶耦合带隙的归一化宽度之和 (红色虚线) 随双振子质量分配比  $\beta$  的变化曲线. 可以看出, 随着双振子质量分配比  $\beta$  的增大 (即振子 1 的附加质量比逐渐增大、振子 2 的附加质量比逐渐减小), 第一阶耦合带隙归一化宽度之和逐渐增大, 而第二阶耦合带隙归一化宽度之和逐渐减小. 当  $\beta$  较小时, 第一阶耦合带隙归一化宽度之和增大的速度大于第二阶耦合带隙归一化宽度之和减小的速度, 故双阶耦合带隙总归一化宽度之和  $\sum G$  一直保持增大, 直到两者速度相等时达到最大值,  $\sum G_{\max} = 1.525$ , 对应的双振子质量分配比为最优值  $\beta_{\text{opt}} = 1.667$ , 振子 1 和振子 2 的附加质量比分别为  $\gamma_1 = 0.625$  和  $\gamma_2 = 0.375$ . 相应地, 设计出的双振子的共振频率分别为  $f_1 = 196.48$  Hz 和  $f_2 = 726.48$  Hz. 图 6(a) 还表明, 当双振子质量分配比大于最优值  $\beta_{\text{opt}}$  后, 随着  $\beta$  的继续增大, 第一阶耦合带隙归一化宽度之和增大的速度开始小于第二阶耦合带隙归一化宽度之和减小的速度, 故  $\sum G$  一直保持减小, 并最终基本趋于一定值 (为了更清晰展示出  $\beta$  较小时  $\sum G$  的变化趋势, 图中未绘制出  $\beta$  较大的情况). 通过上述分析可知, 对双振子超材料梁结构开展双阶耦合带隙设计时, 如果给定了双振子的总附加质量比, 需要合理分配双振子的附加质量比才可以实现最大的带隙总宽度, 而不是简单地将附加质量平均分配给双振子. 图 6(b) 所示为双振子质量分配比为最优值时 ( $\beta = \beta_{\text{opt}} = 1.667$ ), 所设计的双振子超材料梁结构的双阶耦合带隙特性. 可以得知, 在所示频率范围内, 4 个带隙的频率范围分别为 118.9—229.3 Hz, 231.9—280.4 Hz,

622.7—923.4 Hz 和 923.9—1262 Hz, 其中第一、二带隙之间的通带非常窄, 两者耦合成第一阶超宽的“伪带隙”; 第三、四带隙之间的通带也非常窄, 两者耦合成第二阶超宽的“伪带隙”。

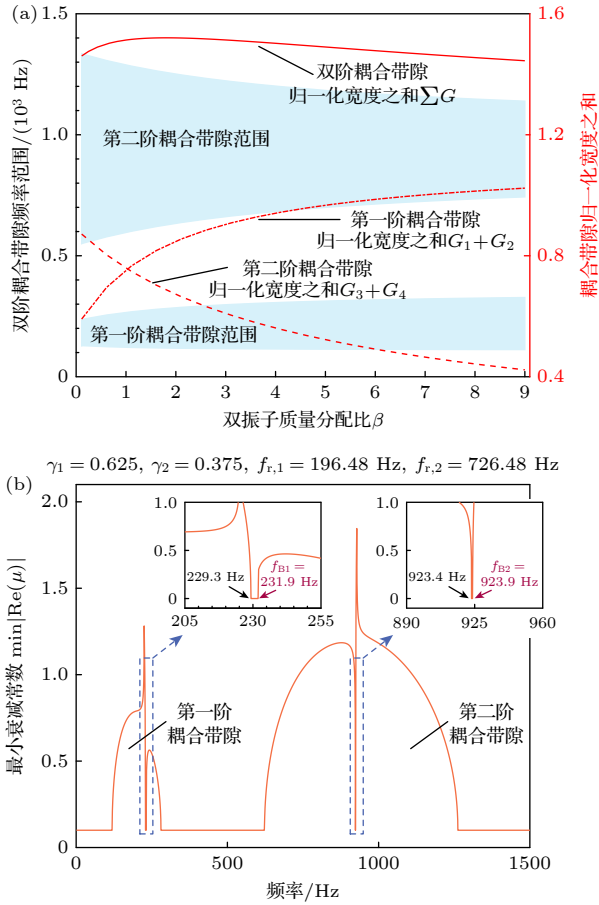


图 6 双振子质量分配比对双阶耦合带隙的影响及其最优值所对应的带隙特性 (a) 对带隙频率范围及归一化宽度之和的影响 (总附加质量比限定为  $\gamma = 1$ ); (b) 最优质量分配比对应的双阶耦合带隙特性

Fig. 6. Influence of mass ratio of two resonators on the double-order coupling bandgaps and the corresponding optimal bandgap behavior: (a) The effect on the bandgap frequency range and the sum of normalized bandgap width (the total added mass ratio is limited to  $\gamma = 1$ ); (b) the double-order coupled bandgap characteristics corresponding to the optimal mass distribution ratio.

### 3.2.2 考虑多种给定的双振子总附加质量比

3.2.1 节针对一种给定的双振子总附加质量比 ( $\gamma = 1$ ), 通过设计与分析得到了获得最大总带隙宽度的双振子质量分配比最优值  $\beta_{\text{opt}}$ . 但是, 实际应用中, 不同的应用场景所容许的振子总附加质量比可能不同, 那么相应的双振子质量分配比最优值  $\beta_{\text{opt}}$  也可能不同. 因此, 有必要进一步分析给定

多种不同的总附加质量比  $\gamma$  的情况, 分析其对双振子质量分配比最优值  $\beta_{\text{opt}}$  的影响.

图 7(a) 对比了分别取多种不同的给定的总附加质量比  $\gamma$  时, 双振子质量分配比  $\beta$  对双阶耦合带隙的归一化宽度之和  $\Sigma G$  的影响曲线. 可以看出, 随着总附加质量  $\gamma$  增大,  $\Sigma G$  呈现增大趋势, 并且增大幅度逐渐减小; 此外, 当总附加质量  $\gamma$  增大时,  $\Sigma G$  取得最大值所对应的双振子质量分配比最优值  $\beta_{\text{opt}}$  逐渐增大. 因此, 推测双振子质量分配比最优值  $\beta_{\text{opt}}$  与  $\gamma$  之间存在一定的函数关系. 为了直观地展示这一函数关系, 绘制二者之间的依赖关系, 如图 7(b) 所示. 通过数值拟合, 得到二者满足近似线性关系:

$$\beta_{\text{opt}} = 1.0245\gamma + 0.7384. \quad (17)$$

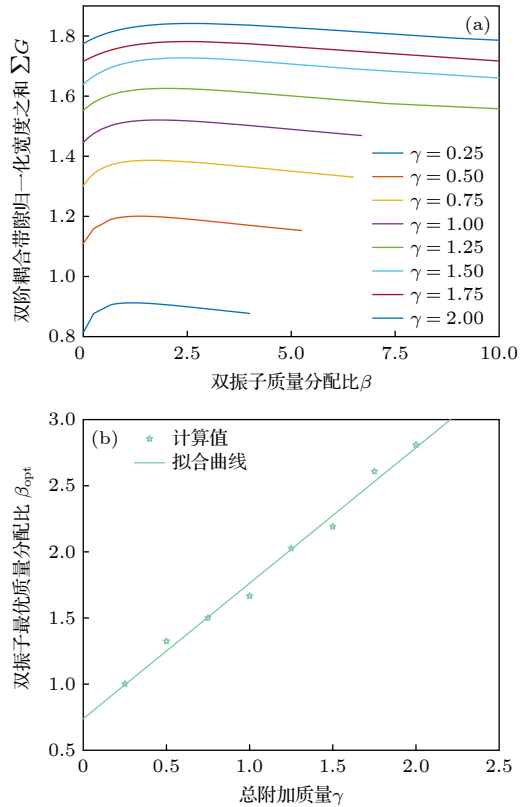


图 7 双振子质量分配比  $\beta$  对双阶耦合带隙的调控 (a) 给定不同总附加质量比情形下双振子质量分配比  $\beta$  对  $\Sigma G$  的影响; (b) 最优质量分配比  $\beta_{\text{opt}}$  与给定总附加质量比  $\gamma$  之间的关系

Fig. 7. Tuning of double-order coupling bandgaps by design of added mass ratio of double resonators  $\beta$ : (a) The influence of mass distribution ratio  $\beta$  on  $\Sigma G$  for different given total added mass ratio; (b) the relationship between the optimal mass allocation ratio  $\beta_{\text{opt}}$  and the given total added mass ratio  $\gamma$ .

因此,在基体梁参数及晶格常数给定的情况下,通过(17)式便可以在给定任意总附加质量比 $\gamma$ 的情况下,设计出近似最优的双振子质量分配比 $\beta_{\text{opt}}$ ,进而获得最大的双阶耦合带隙总宽度.

需要指出的是,虽然上文开展的双振子超材料梁设计研究都是基于一种厚度较薄(4 mm)的基体梁来开展的,但是上文双阶耦合带隙设计方法可以推广到任意厚度的基体梁情况.为此,需要对设计参数进行无量纲化处理.首先,引入无量纲频率的概念,定义无量纲频率为

$$\Omega = \frac{f}{f_{\text{B1}}}, \quad (18)$$

其中 $f_{\text{B1}}$ 为第一阶 Bragg 频率,其表达式为

$$f_{\text{B1}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (19)$$

于是,振子的无量纲共振频率可表述为

$$\Omega_{r,j} = \frac{f_{r,j}}{f_{\text{B1}}}, \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

那么,以图 6(b)中所设计的具有双阶耦合带隙特性的双振子超材料梁案例为例,其双振子的无量纲共振频率可以由(20)式计算得到,分别为 $\Omega_{r,1} = 0.8510$ ,  $\Omega_{r,2} = 3.1465$ .至此,该设计案例的双振子参数(质量和共振频率)已经全部无量纲化(其中振子的附加质量比可视为振子的无量纲质量).相应地,图 6(b)中结果可以用无量纲频率来绘制,如图 8(a)所示.需要特别说明的是,图 8(a)中结果由双振子的 4 个无量纲参数(附加质量比及无量纲共振频率)唯一确定,与具体的基体梁结构参数及晶格常数无关.因此,在双振子附加质量比不变的情况下( $\gamma_1 = 0.625$ ,  $\gamma_2 = 0.375$ ),可以在给定其他基体梁结构参数(如厚度 $h$ )的条件下,反向设计晶格常数和双振子共振频率,使其无量纲参数与图 8(a)一致,即可实现相同的带隙特性.

具体设计过程可分为两步.首先,根据给定的基体梁参数来确定所需晶格常数.具体设计公式可以由(19)式推得:

$$a = \left( \frac{EI}{\rho A} \right)^{1/4} \frac{\pi}{\sqrt{2\pi} f_{\text{B1}}} = \sqrt{h} \left( \frac{E}{12\rho} \right)^{1/4} \frac{\pi}{\sqrt{2\pi} f_{\text{B1}}}, \quad (21)$$

其中 $f_{\text{B1}}$ 为期望实现的第一阶 Bragg 频率(图 6(b)中案例为 $f_{\text{B1}} = 230.9$  Hz).因此,如果基体梁的厚

度 $h$ 增加,要使第一阶 Bragg 频率还出现在 230.9 Hz,所需要的晶格常数就要相应增大.例如,当厚度 $h$ 增大为原来的 9 倍(36 mm),那么所需要的晶格常数 $a$ 就增大为原来的 3 倍(0.6 m).

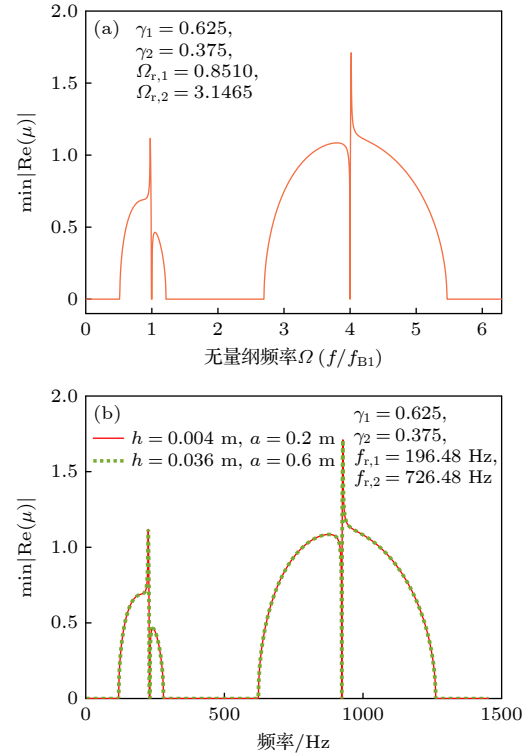


图 8 双振子超材料梁结构的双阶耦合带隙特性 (a) 无量纲参数下的带隙特性; (b) 不同厚度基体梁结构的带隙

Fig. 8. Double-order coupling bandgaps: (a) Plot of band-gap properties with non-dimensional frequency; (b) comparison of bandgap properties of two different metamaterial beams carrying two single-frequency local resonators.

其次,根据期望的振子无量纲共振频率来设计振子的实际共振频率.具体设计公式可以由(20)式推得:

$$f_{r,j} = \Omega_{r,j} f_{\text{B1}}, \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

如果考虑双振子的附加质量比不变( $\gamma_1, \gamma_2$ ),且期望实现的第一阶 Bragg 频率也不变( $f_{\text{B1}}$ ),那么由(22)式可知,期望的双振子的实际共振频率也不变( $f_{r,1} = 196.48$  Hz,  $f_{r,2} = 726.48$  Hz).

基于以上设计方法,以图 6(b)中所设计的具有双阶耦合带隙特性的双振子超材料梁案例为参照(基体梁厚度为 $h = 4$  mm),如果选用一种厚度更大( $h = 36$  mm)的基体梁来设计新的双振子超材料梁结构,只需将晶格常数设计为 $a = 0.6$  m,且其他参数保持不变就可实现相同的双阶耦合带

隙特性. 两种双振子超材料梁结构的参数如表 3 所列, 它们的带隙特性对比如图 8(b) 所示, 可以看出, 两者的带隙特性完全一致.

表 3 两种双振子超材料梁结构的参数

Table 3. Parameters of two metamaterial beams carrying double arrays of local resonators.

	$h/\text{mm}$	$a/\text{m}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$f_{r,1}/\text{Hz}$	$f_{r,2}/\text{Hz}$
原始基体梁	4	0.2	0.625	0.375	196.48	726.48
新基体梁	36	0.6	0.625	0.375	196.48	726.48

基于上述研究, 还有必要进一步说明本文双阶耦合带隙设计方法的适用性. 由以上设计公式 (21) 可知, 如果考虑的基体梁结构厚度  $h$  较大, 同时又希望在低频范围实现带隙耦合 (即需要将第一阶 Bragg 频率  $f_{B1}$  设计在低频范围), 那么所需要的晶格常数  $a$  就可能比较大. 通常, 有限长的周期性超材料梁结构至少要包含 3 个周期单元时才能实现预期的带隙减振特性, 因此本文双阶耦合带隙设计方法只适用于基体梁结构的长度  $L$  不小于所需晶格常数  $a$  的 3 倍的情况, 即基体梁结构的长度需要满足  $L \geq 3a$ , 对于长度更小的基体梁, 上述设计

方法则不适用.

### 3.3 系统阻尼对双阶耦合带隙的影响

本节进一步分析双振子超材料梁中的阻尼因素对其双阶耦合带隙的影响. 主要以图 6(b) 中双阶耦合带隙设计所对应的双振子超材料梁为例来进行分析. 首先, 分析双振子阻尼的影响. 图 9(a) 所示为基体梁和振子 2 的阻尼都为 0 时, 振子 1 的阻尼对双阶耦合带隙的影响; 图 9(b) 所示为基体梁和振子 1 的阻尼都为 0 时, 振子 2 的阻尼对双阶耦合带隙的影响. 可以看出, 振子 1 的阻尼主要影响第一阶耦合带隙特性, 而振子 2 的阻尼主要影响第二阶耦合带隙特性. 随着振子阻尼增大, 耦合带隙内的最大衰减性能会降低, 但耦合带隙上下边界处 (远离 Bragg 频率的带隙边界) 的衰减性能会得到提升, 使得带隙宽度得到拓宽. 但是, 振子阻尼增大并不会改善耦合带隙内部 Bragg 频率处的衰减性能. 图 9(c) 所示为基体梁的阻尼为 0 时, 振子 1 和 2 同时存在阻尼 (但大小存在 1 个数量级的差异) 对耦合带隙的影响. 可以看出, 与双振子都无

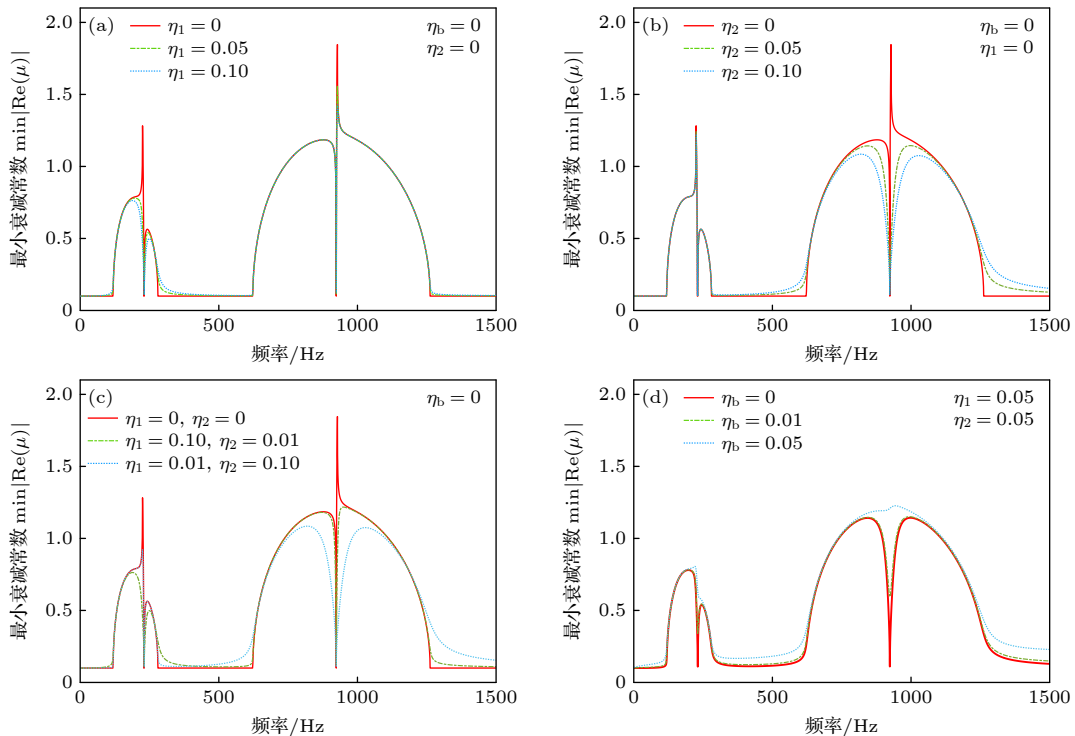


图 9 阻尼对双阶耦合带隙的影响 (a) 只有振子 1 存在阻尼时的影响; (b) 只有振子 2 存在阻尼时的影响; (c) 双振子同时存在阻尼的影响; (d) 基体梁阻尼的影响

Fig. 9. Effects of damping on double-order coupling bandgaps: (a) Effects of damping of the first resonator (damping exists only in the first resonator); (b) effects of damping of the second resonator (damping exists only in the second resonator); (c) effects of damping of the two resonators; (d) effects of the damping of the host beam.

阻尼的情况相比, 当双振子都存在阻尼且振子 1 的阻尼大于振子 2 的时, 第一阶耦合带隙受到更大影响; 当振子 2 的阻尼大于振子 1 的时, 第二阶耦合带隙受到更大影响。

图 9(d) 所示为双振子都存在小阻尼 ( $\eta_1 = \eta_2 = 0.05$ ) 时, 基体梁的阻尼对双阶耦合带隙特性的影响。可以看出, 随着基体梁阻尼增大, 双阶耦合带隙的边界附近频率处及带隙外频率范围的波衰减性能会逐渐提升, 且随着频率升高, 提升程度更显著。特别有利的是, 基体梁只需具有较小的阻尼即可以显著提升耦合带隙内部窄通带 (Bragg 频率附近) 的波衰减性能。图 9(d) 表明, 当基体梁阻尼损耗因子为 0.05 时, 双阶耦合带隙内部的窄通带已经彻底消失, 即双阶耦合带隙由“伪带隙” (内部存在窄通带) 变成了真正意义的超宽合并带隙。

#### 4 双阶耦合带隙的宽带减振特性

前文考虑的都是无限长周期的双振子超材料梁结构。但实际工程中需要开展减振设计的梁结构都是有限长的, 为了验证将双阶耦合带隙用于有限长梁结构宽带振动抑制的可行性, 本节将研究有限长双振子超材料梁结构的减振特性。

#### 4.1 有限长双振子超材料梁结构的减振特性分析模型与方法

有限长双振子超材料梁结构及其受迫振动模型如图 10 所示, 其包含  $N$  个元胞, 左端与一大刚体基座相固连, 右端自由。左端第一个元胞内的振子附加位置距离基体梁的左端距离为  $a_L$ , 最右端元胞内的振子附加位置距离基体梁的右端距离为  $a_R$ , 且  $a = a_L + a_R$ 。设大刚体基座整体受  $y$  向平动简谐振动位移激励且不发生转动, 其振动位移幅值设为  $w_{in}$ , 则梁左端的横向振动位移幅值也为  $w_{in}$ 。本文将采用谱元法<sup>[12,23]</sup>对图 10 所示超材料梁结构建立强迫振动仿真模型, 计算出双振子超材料梁结构右端的横向振动位移幅值  $w_{out}$ 。进而, 双振子超材料梁结构的减振特性可以通过两端的振动位移传递率  $T$  来评估, 其计算表达式为

$$T = 20\log_{10} \left| \frac{w_{out}}{w_{in}} \right|. \quad (23)$$

为了比较双阶耦合带隙与传统单阶耦合带隙的减振效果, 后文还将计算有限长单振子超材料梁结构 (具有单阶耦合带隙) 的减振特性, 其结构系统及受迫振动模型如图 11 所示。其中图 11(a) 所示为只附加振子 1 的单振子超材料梁, 图 11(b) 为只附加振子 2 的单振子超材料梁。

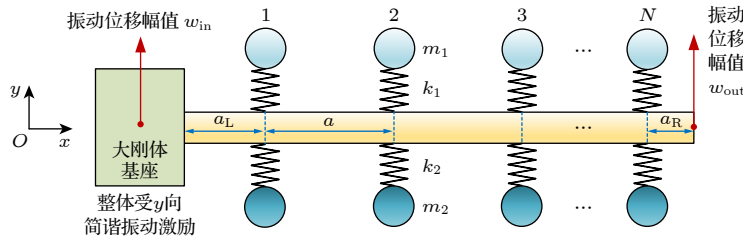


图 10 含  $N$  个周期元胞的双振子超材料梁结构的振动特性分析模型示意图

Fig. 10. Schematic of vibration analysis model of a finite metamaterial beam carrying  $N$  periodic double-resonators.

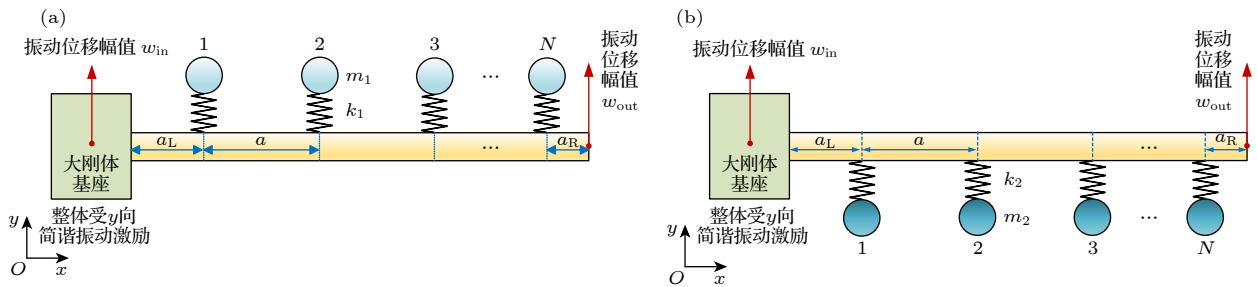


图 11 含  $N$  个周期元胞的单振子超材料梁结构的振动特性分析模型示意图 (a) 只附加振子 1; (b) 只附加振子 2

Fig. 11. Schematic of vibration analysis model of a finite metamaterial beam carrying  $N$  periodic single-frequency local resonators: (a) Attaching only local resonator 1; (b) attaching only local resonator 2.

## 4.2 有限长双振子超材料梁结构的减振特性仿真分析

本小节以图 6(b) 中所设计的具有双阶耦合带隙的双振子超材料梁为例来仿真分析其减振特性, 其基体梁结构参数和晶格常数同前, 如表 1 所列; 其双振子的附加质量比和共振频率如表 4 所列. 相应地, 振子质量为  $m_j = \rho A a \gamma_j$ , 振子刚度为  $k_j = m_j (2\pi f_{r,j})^2$  ( $j = 1, 2$ ). 若考虑振子的阻尼, 弹簧刚度  $k_j$  应替换为复刚度  $k_j (1 + i\eta_j)$ .

表 4 双振子参数

Table 4. Parameters of double local resonators.

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$f_{r,1}/\text{Hz}$	$f_{r,2}/\text{Hz}$
0.625	0.375	196.48	726.48

为简单验证谱元法的准确性, 考虑有限长双振子超材料梁结构的一个特例, 设其包含周期元胞个数为 6 ( $N = 6$ ), 双振子均附加于元胞右边界 (即  $a_R = 0$ ), 双振子的阻尼为  $\eta = \eta_1 = \eta_2 = 0.05$ . 分别用谱元法和有限元法 (基于 COMSOL 建模完成) 来计算其振动传递率. 在 COMSOL 模型中, 利用“弹簧-质量”集中参数系统模拟双振子, 基体梁的左端边界条件设置为其横截面只能沿  $y$  向平移而不能转动, 从而模拟图 10 所示悬臂型双振子超材料梁结构受根部 (左端) 横向平移振动激励的情形. 采用两种方法计算得到 0—1500 Hz 频段内的振动传递率曲线对比如图 12(a) 所示. 可以看出两种方法计算结果非常吻合, 从而验证了谱元法的有效性. 为了与前文带隙计算结果 (见图 6(b)) 对比, 图 12(a) 中用阴影区标明了前文理论计算得到的双阶耦合带隙频率范围. 图中阴影区忽略了相邻耦合带隙之间的窄通带, 因此只标出两个宽“伪带隙”的频率范围, 分别为 118.9—280.4 Hz 和 622.7—1262 Hz. 可以看出, 谱元法计算得到的减振频率范围与前文理论解析计算得到的带隙频率范围吻合良好, 在两个宽“伪带隙”频率范围内, 基体梁的振动传递得到了显著衰减, 即实现了两个宽频带的高效减振性能, 从而验证了本文所提出的双阶耦合带隙设计方法的有效性.

为了进一步考察有限长双振子超材料梁结构的受迫振动行为, 在图 12(a) 中标出了几个特殊的频率位置, 分别用字母 A—D 标示. 其中 A, D 频率位置接近第一、二阶 Bragg 频率 ( $f_{B1} = 230.9$  Hz,  $f_{B2} = 923.5$  Hz), 分别位于两阶耦合带隙之间 (两

个“伪带隙”内) 的两个窄通带内; B 频率位于两个“伪带隙”之间的宽通带内, 而 C 频率位于第二个“伪带隙”内 (但偏离内部窄通带). 图 12(b) 给出了有限元法仿真得到的超材料结构中基体梁在 A—D 处 4 个频率下的受迫振动后的形变图. 可以看出, 在 A, D 两个频率下, 基体梁的振动受周期性振子耦合调制, 致使相邻振子之间的基体梁发生了 Bragg 振荡, 因此相邻振子 (间隔一个晶格长度) 之间的基体梁的振动波形分别与半个波长 (A 频率) 和一个波长 (D 频率) 大致相当. 同时, 由于振子的阻尼作用, 使振动从左向右传递过程中, 幅值逐渐降低. 因此, 在 A, D 两个频率下, 超材料梁结构的振动在宏观上也表现出一定的衰减特性. 这与 B 和 C 频率处的振动特性有显著不同. 由于 B 频率位于常规的通带范围内, 该频率下结构振动从左向右传递过程中, 并不会表现出明显的幅值变化, 在宏观上不会表现出明显的衰减特性.

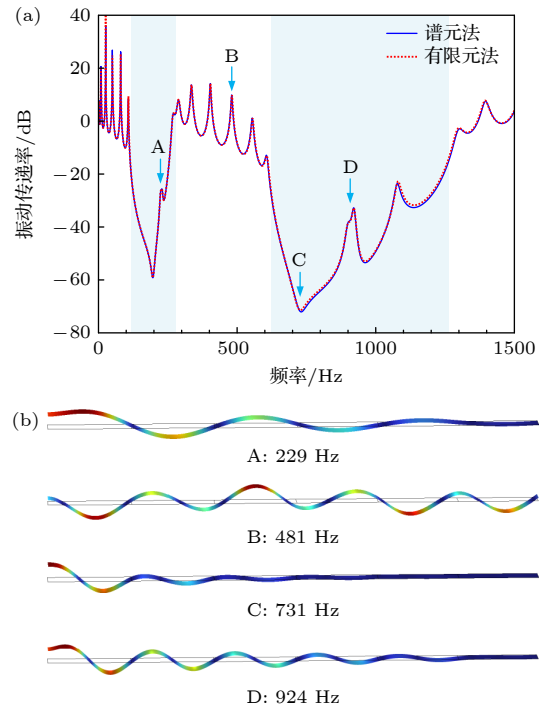


图 12 含 6 个元胞的双振子超材料梁结构的振动特性 (a) 谱元法和有限元法计算得到的振动传递率对比 (图中阴影区域为理论计算得到的带隙频率范围); (b) 图 (a) 中所选取的几个频率下基体梁的受迫振动后的形变图

Fig. 12. Vibration properties of a double-resonator metamaterial beam containing 6 unit cells: (a) Comparison of vibration transmissibility predicted by spectral element method and finite element method (the shaded area represents theoretically predicted bandgap regions); (b) deformation of the host beam under forced vibration at several frequencies selected in panel (a).

而 C 频率位于常规的带隙范围内, 该频率下结构振动从左向右传递过程中, 幅值会逐渐大幅降低, 表现出明显的衰减特性, 传至结构右端的振动响应非常微弱, 因此减振效果非常突出.

接下来, 将上述有限长双振子超材料梁结构 (具有双阶耦合带隙) 的减振特性与相同长度 ( $N = 6$ ) 的两种有限长单振子超材料梁结构 (具有第一阶耦合带隙或第二阶耦合带隙) 的减振特性进行对比, 如图 13 所示. 所考虑的两种单振子超材料梁结构分别为图 2(a), (b) 中所设计的振子附加质量比为 1 时的两种单振子超材料梁结构, 其单振子参数如表 5 所列. 同时, 设单振子均附加于元胞右边界 (即  $a_R = 0$ ), 单振子的阻尼为  $\eta = \eta_1 = \eta_2 = 0.05$ . 此外, 单振子超材料梁结构的基体梁结构参数和晶格常数同前, 如表 1 所列. 从图 13 结果可以看出, 具有第一阶耦合带隙的附加单振子 1 的超材料梁结构 (点划线) 只能在低频段实现一个宽频带的高效减振, 在高频段不具备减振性能. 具有第二阶耦合带隙的附加单振子 2 的超材料梁结构 (点线) 能在高频段实现一个宽频带的高效减振, 同时在低频段还能实现一个相对较窄频带的减振, 但其低频段减振性能相对较弱. 与单振子超材料梁不同, 双振子超材料梁由于具有双阶耦合带隙, 其在低频段和

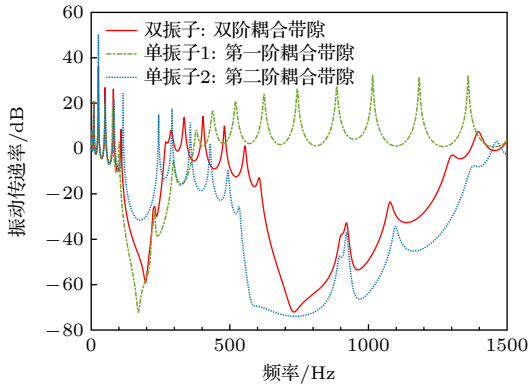


图 13 双振子超材料梁的双阶耦合带隙与单振子超材料梁的单阶耦合带隙的减振性能对比 ( $N = 6, a_R = 0$ )

Fig. 13. Comparison of vibration attenuation properties of a double-resonator metamaterial beam and two single-resonator metamaterial beams ( $N = 6, a_R = 0$ ).

表 5 单振子参数

Table 5. Parameters of single local resonators.

	附加质量比 $\gamma$	共振频率 $f_r/\text{Hz}$
单振子1	1	169.46
单振子2	1	576.66

考虑到将超材料梁结构双阶耦合带隙应用于实际梁结构减振设计时, 梁结构长度并非固定, 且振子阻尼大小是可以根据需要人为调控的, 因此有必要进一步分析超材料梁结构长度和振子阻尼对减振特性的影响. 图 14(a), (b) 分别比较了不同总长度及不同振子阻尼对双振子超材料梁结构减振特性的影响. 从图 14(a) 可以看出, 随着结构长度增大 (周期数增加), 双阶耦合带隙内的减振效果也会增强, 减振带宽基本不变. 从图 14(b) 可以看出, 随着振子阻尼 (设双振子阻尼相同,  $\eta = \eta_1 = \eta_2$ ) 增大, 带隙内的衰减性能随频率变化更为平缓, 带隙边界附近的振动传递峰值会得到显著抑制. 因此, 增加振子阻尼可以一定程度上拓宽减振带宽.

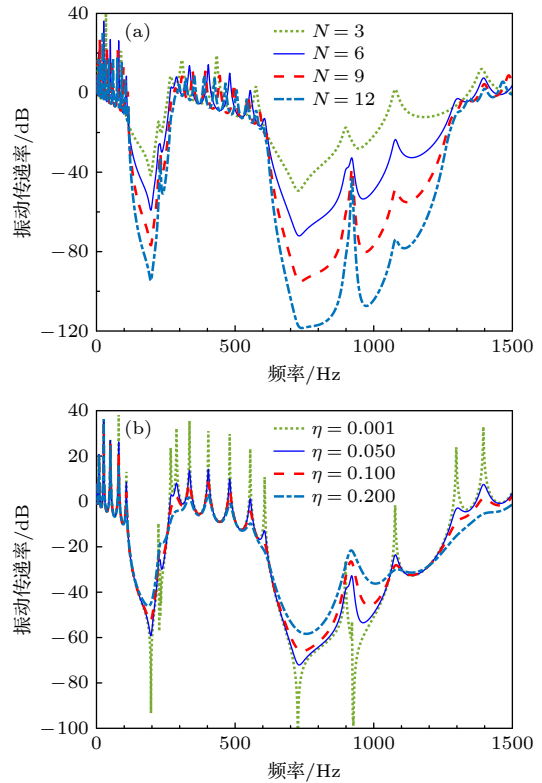


图 14 结构总长度 (用周期数表征) 及振子阻尼对双振子超材料梁减振特性的影响 (a) 结构长度的影响 ( $\eta = \eta_1 = \eta_2 = 0.05$ ); (b) 振子阻尼的影响 ( $N = 6$ )

Fig. 14. Influence of structural length (characterized by number of unit cells) and resonator damping on the vibration reduction properties of finite double-resonator metamaterial beam: (a) Influence of structural length; (b) influence of resonator damping.

以上仿真算例中都是采用理想的“弹簧-质量”振子来构建有限长双振子超材料梁结构, 为了进一步验证其可实现性, 接下来考虑一种更加贴近实际的物理模型进行仿真. 具体而言, 就是在前文所考

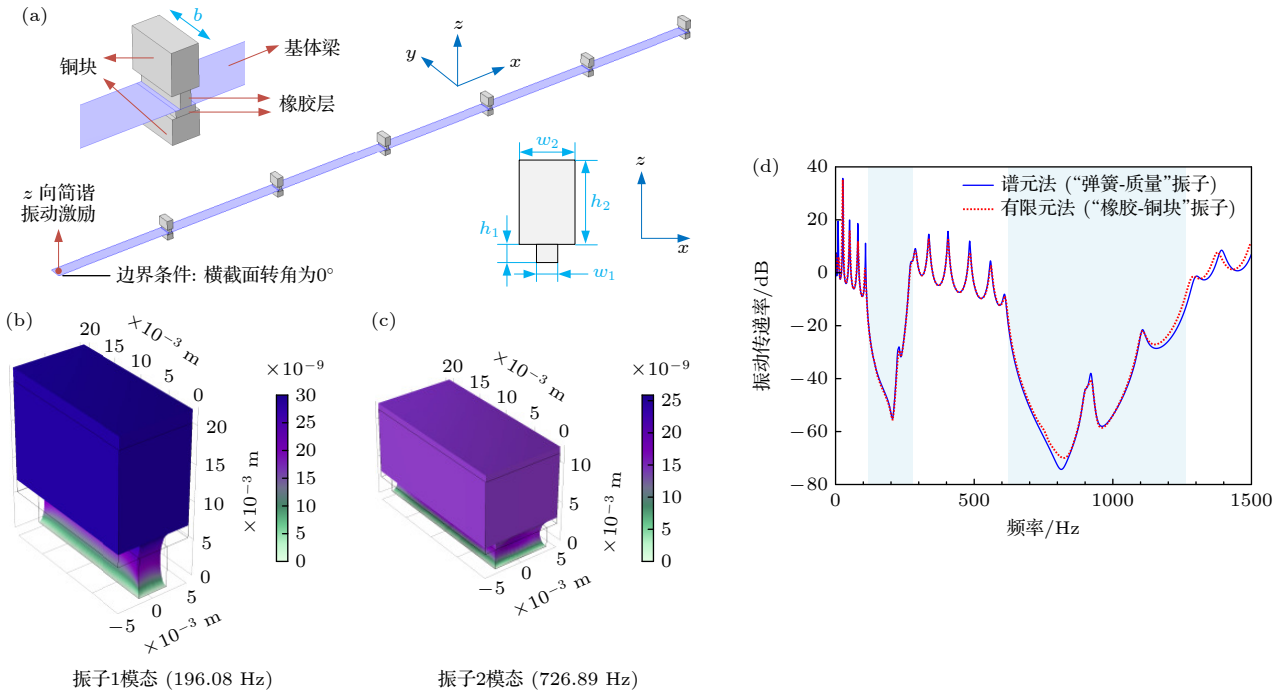


图 15 采用“橡胶-铜块”振子构建的双振子超材料梁结构及其减振性能 (a) 结构示意图; (b) 振子 1 的模式; (c) 振子 2 的模式; (d) 谱元法与有限元法计算得到的减振性能对比

Fig. 15. A realizable metamaterial beam with “rubber-copper” resonators and its vibration attenuation performance: (a) Schematic of the construction; (b) vibration mode of the resonator 1; (c) vibration mode of the resonator 2; (d) comparison of vibration reduction properties calculated by spectral element method and finite element method.

考虑的薄层基体梁的上下表面分别贴敷“橡胶层和铜块”来构建一种有限长的双振子超材料梁结构实际物理模型, 如图 15(a) 所示. 其中橡胶层模拟振子的弹簧, 铜块模拟振子的质量, 两种材料的参数列于表 6 中.

表 6 振子材料参数

Table 6. Properties of materials used for resonators.

	密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	杨氏模量 $E/\text{Pa}$	泊松比	损耗因子
橡胶	1300	$2\times 10^6$	0.49	0.05
铜	8960	$110\times 10^9$	0.35	0.05

为了实现表 4 中所给出的振子附加质量比和共振频率, 对两个振子的结构参数进行了精细化设计, 结果列于表 7 中. 基于上述材料参数和结构参数, 对两个振子分别采用 COMSOL 三维固体模型仿真得到其共振频率分别为 196.08 Hz 和 726.89 Hz (参见图 15(b), (c)), 与期望的振子共振频率基本一致. 进一步, 在 COMSOL 中, 采用有限元法对图 15(a) 所示三维结构模型进行振动仿真, 计算了其减振性能并与谱元法 (模型中采用“弹簧-质量”振子) 计算结果进行对比, 如图 15(d) 所示. 可以看

出, 两种模型计算得到的结果基本吻合, 再次验证了本文设计方法的可行性.

表 7 基于橡胶层与铜块构成的双振子参数

Table 7. Parameters of local resonators made by rubber and copper layers.

	$b/\text{mm}$	$w_1/\text{mm}$	$h_1/\text{mm}$	$w_2/\text{mm}$	$h_2/\text{mm}$	$f_r/\text{Hz}$
振子1	20	4	5.5	10	15.1	196.08
振子2	20	7.2	2.5	10	9	726.89

## 5 结论

本文以双振子超材料梁结构为研究对象, 基于其弯曲波色散关系解析模型开展了双阶耦合带隙的调控设计与分析研究, 并进一步采用谱元法和有限元法研究了基于双阶耦合带隙设计的双振子超材料梁的减振特性, 得到以下主要结论:

1) 提出了一种在双振子超材料梁结构中实现双阶耦合宽带隙的设计方法, 利用该方法, 在给定基体梁参数、晶格常数和双振子附加质量比的条件下, 可以较快捷地设计出实现双阶耦合宽带隙所需的双振子共振频率.

2) 对比分析了双振子超材料梁结构的双阶耦

合带隙特性与传统单振子超材料梁结构的单阶耦合带隙特性,发现通过合理设计可使前者的带隙总归一化宽度明显优于后者,因此更有利于宽带减振应用.

3) 研究发现在给定双振子总附加质量比的情况下,需要优化设计双振子的质量分配比才能实现双阶耦合带隙总归一化宽度最大化,并进一步建立了设计双振子最优质量分配比的近似公式.

4) 采用谱元法研究了基于双阶耦合带隙设计的双振子超材料梁的减振特性,通过与有限元法进行对比,验证了谱元法的准确性,结果表明基于双阶耦合带隙设计可以实现两个频带的超宽带高效减振;进一步分析了结构周期数和双振子阻尼对减振特性的影响,研究表明周期数增加可增强带隙内的减振效果,而振子阻尼增大可有效拓宽减振频带.

## 参考文献

- [1] Wen Q H, Zuo S G, Wei H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 034301 (in Chinese) [文岐华, 左曙光, 魏欢 2012 物理学报 **61** 034301]
- [2] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *J. Phy. D: Appl. Phys.* **45** 195401
- [3] Xiao Y, Mace B R, Wen J H, Wen X S 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1485
- [4] Zhang S W, Wu J H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 134301 (in Chinese) [张思文, 吴九汇 2013 物理学报 **62** 134301]
- [5] Liu J, Hou Z L, Fu X J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 154302 (in Chinese) [刘娇, 侯志林, 傅秀军 2015 物理学报 **64** 154302]
- [6] Ding C L, Dong Y B, Zhao X P 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 194301 (in Chinese) [丁昌林, 董仪宝, 赵晓鹏 2018 物理学报 **67** 194301]
- [7] Xiao Y, Wang Y, Zhao H G, Yu D L, Wen J H 2023 *J. Mech. Eng.* **59** 277 (in Chinese) [肖勇, 王洋, 赵宏刚, 郁殿龙, 温激鸿 2023 机械工程学报 **59** 277]
- [8] Xu Q R, Shen C, Han F, Lu T J 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 244302 (in Chinese) [胥强荣, 沈承, 韩峰, 卢天健 2021 物理学报 **70** 244302]
- [9] Zhu X X, Xiao Y, Wen J H, Yu D L 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 176202 (in Chinese) [朱席席, 肖勇, 温激鸿, 郁殿龙 2016 物理学报 **65** 176202]
- [10] Lin G C, Sun H W, Tan H F, Du X W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 034302 (in Chinese) [林国昌, 孙宏伟, 谭惠丰, 杜星文 2011 物理学报 **60** 034302]
- [11] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *New J. Phys.* **14** 33042
- [12] Xiao Y, Wen J H, Yu D L, Wen X S 2013 *J. Sound Vibr.* **332** 867
- [13] Zhou J X, Wang K, Xu D L, Ouyang H J 2017 *Phys. Lett. A* **381** 3141
- [14] Xiao Y, Wen J H, Wen X S 2012 *Phys. Lett. A* **376** 1384
- [15] Frandsen N M M, Bilal O R, Jensen J S, Hussein M I 2016 *J. Appl. Phys.* **119** 124902
- [16] Taniker S, Yilmaz C 2015 *Int. J. Solids Struct.* **72** 88
- [17] Acar G, Yilmaz C 2013 *J. Sound Vibr.* **332** 6389
- [18] Fang X, Wen J H, Bonello B, Yin J F, Yu D L 2017 *Nat. Commun.* **8** 1288
- [19] Zhang X D, Yu H Y, He Z C, Huang G L, Chen Y Y, Wang G 2021 *Mech. Syst. Signal Proc.* **159** 107826
- [20] Krushynska A O, Miniaci M, Bosia F, Pugno N M 2017 *Extreme Mech. Lett.* **12** 30
- [21] Li Y, Xiao Y, Guo J J, Zhu Z, Wen J H 2022 *Int. J. Mech. Sci.* **234** 107683
- [22] Guo J J, Li Y Q, Xiao Y, Fan Y L, Yu D L, Wen J H 2022 *Compos. Struct.* **289** 115463
- [23] Xiao Y 2012 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [肖勇 2012 博士学位论文 (长沙: 国防科学技术大学)]

# Double-order coupling bandgap design of metamaterial beams and broadband vibration reduction properties<sup>\*</sup>

Liu Quan-Xing   He Zhe-Xing   Li Yong-Qiang   Wen Ji-Hong   Xiao Yong<sup>†</sup>

(Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, College of Intelligence Science and Technology,  
National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

( Received 14 May 2024; revised manuscript received 18 June 2024 )

## Abstract

Local-resonance bandgap and Bragg bandgap can coexist in a metamaterial beam, and their coupling effect can be used to realize ultra-wide bandgap, which has great potential applications in the field of wide-band vibration reduction. Previous studies usually considered the single-order coupling between the local-resonance bandgap and Bragg bandgap in metamaterial beams with a single array of local resonators, which can only achieve the single-order ultra-wide coupling bandgap and cannot meet the wide-band vibration reduction requirements of double/multiple target frequency bands. In this paper, metamaterial beams with double arrays of local resonators are considered, and the regulation design and analysis of double-order coupling of local-resonance and Bragg bandgaps are carried out based on an analytical model of bending wave dispersion relation. Moreover, the vibration reduction characteristics of the double-frequency-resonator metamaterial beams with double-order coupling bandgaps are studied by using spectral element method and the finite element method. The main conclusions are as follows.

1) A design method is proposed for realizing double-order coupling wide bandgap in a metamaterial beam with double arrays of local resonators. By using this method, the resonance frequencies of the local resonators can be quickly designed on conditions that host beam parameters, lattice constant and added mass ratio of the local resonators are given.

2) The double-order coupling bandgaps in a metamaterial beam carrying double arrays of local resonators are compared with the single-order coupling bandgaps in metamaterial beams with a single array of local resonators. It is found that through proper design, the total normalized width of the double-order coupling bandgap can be much broader than that of the single-order coupling bandgap, so the double-order coupling bandgap is more beneficial to wide-band vibration reduction.

3) It is found that for a given total added mass ratio of the double arrays of local resonators, it is necessary to optimize the mass distribution ratio of the double resonators to maximize the total normalized width of double-order coupling bandgap. An approximate formula for designing the optimal mass distribution ratio of the double resonators is further established.

4) The spectral element method is used to study the vibration reduction characteristics of the metamaterial beams carrying double arrays of local resonators designed based on double-order bandgap coupling. The accuracy of the spectral element method is verified by comparing with the finite element method. The results show that significant vibration reduction can be achieved in two wide frequency bands corresponding to the double-order coupling bandgaps. The influences of number of unit cells and resonator damping on the vibration reduction characteristics of the metamaterial beam are further analyzed. It is shown that the increase of number of unit cells can enhance the vibration reduction performance in the bandgap, and the increase of resonator damping can effectively broaden the vibration reduction frequency band.

**Keywords:** metamaterial beam, flexural wave bandgap, coupled bandgap, broadband vibration reduction

**PACS:** 46.40.-f, 62.30.+d, 63.20.-e

**DOI:** [10.7498/aps.73.20240689](https://doi.org/10.7498/aps.73.20240689)

<sup>\*</sup> Project supported by the Major Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11991032) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51875569).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [xiaoy@vip.sina.com](mailto:xiaoy@vip.sina.com)

## 超材料梁的双阶耦合带隙调控设计与宽带减振特性

刘权兴 何哲星 李永强 温激鸿 肖勇

## Double-order coupling bandgap design of metamaterial beams and broadband vibration reduction properties

Liu Quan-Xing He Zhe-Xing Li Yong-Qiang Wen Ji-Hong Xiao Yong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 154601 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240689

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240689>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

含双曲超构材料的复合周期结构的带隙调控及应用

Band gap engineering and applications in compound periodic structure containing hyperbolic metamaterials

物理学报. 2020, 69(15): 154205 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200084>

基于柔性超构材料宽带调控太赫兹波的偏振态

Broadband modulation of terahertz wave polarization states with flexible metamaterial

物理学报. 2022, 71(18): 187802 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220801>

基于遗传算法的宽带渐变电阻膜超材料吸波器设计

Design of broadband gradient resistive film metamaterial absorber based on genetic algorithm

物理学报. 2024, 73(7): 074101 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231781>

宽带隙钙钛矿材料及太阳能电池的研究进展

Research progress of wide bandgap perovskite materials and solar cells

物理学报. 2020, 69(20): 207401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200822>

漏斗型完全光子带隙光波导单向传输

Unidirectional transmission of funnel-shaped waveguide with complete bandgap

物理学报. 2022, 71(3): 038501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211299>

球形复合柱表面波声子晶体的带隙特性仿真

Numerical simulation study on band gap characteristics of surface phononic crystal with spherical composite column

物理学报. 2021, 70(14): 144301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210165>