

非线性磁电层合材料的对称等效电路理论及数值仿真分析*

张小丽^{1)†} 殷秋鹏²⁾ 李果³⁾ 姚曦⁴⁾ 丁礼磊¹⁾

1) (安康学院电子与信息工程学院, 安康 725000)

2) (上海实问信息科技有限公司, 上海 201306)

3) (西安邮电大学自动化学院, 西安 710121)

4) (兰州交通大学数理学院, 兰州 730070)

(2024年7月6日收到; 2024年11月11日收到修改稿)

本文研究了长度方向磁化、厚度方向极化的3层磁电复合材料的非线性特性. 首先, 基于Z-L模型, 根据磁化强度的数值解特征, 拟合了磁化强度函数, 进一步推导了超磁致伸缩材料的动态参数, 如动态压磁系数、动态弹性柔顺系数和动态磁导率, 并分析了偏置磁场和预应力对相应参数的影响; 其次, 基于非线性磁致伸缩本构方程, 建立了磁电层合材料的对称磁-弹-电等效电路模型, 并推导了磁电系数表达式, 分析了其随偏置磁场和预应力的变化曲线, 与已报道的结果具有很好的一致性; 最后, 为了与理论结果进行比较, 采用COMSOL软件设置相同的参数, 绘制相应的磁电系数频率曲线, 二者结果符合较好, 并提取了最大峰值模态振动形状, 可以方便地观察到磁电层合材料长度方向的振动情况. 结果表明, 这种对称磁-弹-电等效电路理论模型及使用COMSOL软件数值模拟的方法是可取的, 为进一步进行磁电层合材料的非线性分析奠定了基础, 使设计高精度磁电微型器件成为可能.

关键词: 非线性, 磁电层合材料, 对称等效电路理论, 数值仿真

PACS: 75.85.+t, 77.84.Lf, 85.80.Jm, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.73.20240934

CSTR: 32037.14.aps.73.20240934

1 引言

磁电层合材料因具有独特的磁-弹-电耦合特性, 以及具有灵敏度高、体积小、成本低和功耗小等优点, 被广泛用于传感器、驱动器、能量采集器、能量转换器和微器件等领域^[1-5]. 超磁致伸缩材料的兴起为设计更优秀的磁电器件提供了新的思路, 学者们已经对如何提高磁电耦合系数进行了大量的研究. 实验结果表明, 磁电层合材料中常用的超

磁致伸缩材料, 在外磁场和预应力的作用下表现出很强的非线性磁机耦合效应^[6]. 只有当超磁致伸缩材料中的磁场和应力在工作点附近的窄范围内变化时, 线性压磁模型才适用. 此外, 所有压磁参数显著受应力和磁场的变化幅度的影响, 因此, 常见的材料常数, 如杨氏模量、弹性柔顺系数、压磁系数和磁导率, 在理论上都应该是偏置磁场和预应力的函数^[7-10]. 许多学者试图建立超磁致伸缩材料的非线性模型, 如标准方本构 (SS) 模型、双曲正切本构 (HT) 模型、筹转换密度 (DDS) 模型, 以及

* 国家自然科学基金 (批准号: 12174004, 12104369)、甘肃省自然科学基金 (批准号: 23JRRA1805) 和陕西省教育厅科学研究计划 (批准号: 20JK0475) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zxlxlzhang@163.com

Duennas 等创建的 D-H 模型等. 为了验证超磁致伸缩材料 Terfenol-D 的本构模型, Moffett 等^[11] 在 8 组不同压应力和偏置磁场的作用下, 比较实验结果, 发现先前的模型存在一些不足. SS 模型不能描述预测高场区域中磁致伸缩应变的饱和度, 也不能为低预应力提供准确的预测. HT 模型和 DDS 模型都可以预测高场区域中磁致伸缩应变的饱和度, 但当压缩预应力为 65.4 MPa 时, HT 模型高估了约 40% 的磁致伸缩应变, DDS 模型低估了约 30% 的磁致伸缩应力. D-H 模型可以准确预测不同预应力水平的低磁场和中等磁场区域的磁致伸缩应变, 然而, 无法模拟 Terfenol-D 的最大磁致伸缩应变随着压缩预应力的增大而增大的实验现象. Z-L 模型基于玻尔兹曼统计, 并且有明确的物理背景, 同时还保留了方程的高阶项, 其数值模拟表明: 预测的各种压应力下的超磁致伸缩应变曲线无论在低磁场和中等磁场区域还是在高磁场区域, 都与实验数据符合良好; 也能够更有效地描述预应力对最大磁致伸缩应变的影响^[12].

由于超磁致伸缩材料的非线性导致磁电材料工作在复杂的多场条件下, 因此分析磁电材料的磁电效应实际上是一个多场耦合的非线性问题, 需要相关的非线性理论分析模型. 磁电层合材料常用理论分析方法有迭代法、Gurtin-Murdoch 理论、能量方法、多重物理场方法和等效电路方法等^[13-18]. 其中, 等效电路法结合压电振动理论和磁致伸缩振动理论, 分析磁电材料中磁电转换的相关问题, 是一种常用的理论分析方法. 考虑到机械损耗, 卞雷祥等^[19] 对磁电层合材料进行了理论和实验研究, 包括弹性基底和高效质量因子铁磁材料; 基于等效电路法, 使用压电阵子等效电路, 提出了谐振磁电电压系数的理论表达式. 但当该表达式用于磁致伸缩/压电/磁致伸缩 (MPM) 层压板复合材料时, 预测结果几乎是实验结果的 2 倍. 这是因为他们选择了分析并联谐振频率, 但在等效串联谐振电路使用了串联谐振因子方程. Zhou 等^[8,9] 根据等效电路法, 考虑机械损耗, 选择非线性磁致伸缩本构模型, 给出了磁电层合材料共振磁电系数的显式非线性表达式, 磁性部分的简单系数 $\varphi_m H_3$, 不能深入揭示磁电耦合的原理, 特别是磁性部分的影响, 且只有当压电材料的机电耦合因子 k_{31}^p 小时, 该显式表达式可以简化为现有模型. 基于上述分析, 有必要进一步研究使用非线性磁致伸缩本构模型进行共

振磁电系数分析的等效电路方法.

事实上, 数值模拟也是一种强大的研究方法^[20]. COMSOL Multiphysics 是一种强大而有效的数值模拟软件包. 其可以研究材料性质、尺寸、边界条件和键合厚度对磁电耦合效应的影响, 以及固有频率、耦合系数、自由振动和压电层输出. 其还可以观察所研究模型的振动状态, 并分析一些分析理论无法解决的复杂结构模型^[21-24]. Han 等^[3] 基于麦克斯韦电磁方程和超磁致伸缩材料的非线性本构方程, 利用有限元法详细研究了不同磁场、温度和预应力对磁电系数的影响. 谢冰鸿等^[1] 也基于等效电路模型和二端网络理论, 实现了对谐振状态下磁电系数和等效源阻抗的完整求解. 但鲜有报道磁电层合材料谐振状态下的振动模态.

基于上述分析, 首先, 为方便使用 COMSOL 软件仿真磁电层合材料的非线性特性, 本文拟合了磁化强度函数; 其次, 建立了磁电对称的等效电路, 并推导出了磁电系数的非线性显性表达式; 最后利用 COMSOL 软件提取了谐振频率处的振动状态.

2 磁电对称等效电路理论

图 1 是 MPM 3 层层状磁电复合材料的结构示意图, 压电层和两个磁致伸缩层用环氧树脂粘合在一起, 其中磁致伸缩层沿长度方向磁化, 压电层沿厚度方向极化, 外部磁场 (包含交变磁场和偏置磁场) 沿着长度方向 (x 方向). 理想状态下, 压电层与磁致伸缩层的预应力为零. 该磁电层状复合材料的长度和宽度分别为 l 和 w , 磁致伸缩层和压电层的厚度分别为 t_m 和 t_p .

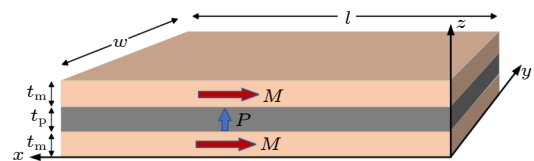


图 1 磁电层状复合材料的结构示意图

Fig. 1. Structural schematic diagram of magnetoelectric laminated composite.

2.1 超磁致伸缩材料的动态参数

2.1.1 超磁致伸缩材料的非线性动态参数构建

实验结果表明, 磁性材料在外磁场和预应力的

作用下表现出很强的非线性磁机耦合效应. 因此, 材料常数, 如杨氏模量、弹性柔顺系数、压磁系数和磁导率, 在理论上都应该是偏置磁场和预应力的函数. 目前, 在不考虑磁滞的情况下, 能够完全描

述磁致伸缩材料中非线性磁机耦合本构关系的是 Z-L 模型, 在图 1 的坐标下, 块状磁致伸缩材料沿长度方向 (x 方向) 磁化, 外部磁场 (包含交变磁场和偏置磁场) 也沿着长度方向施加, 表达式如下^[12]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_s} + \begin{cases} \lambda_s \tanh\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right) + \left[1 - \tanh\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)\right] \frac{\lambda_s}{M_s^2} M^2, & \frac{\sigma}{\sigma_s} \geq 0, \\ \frac{\lambda_s}{2} \tanh\left(\frac{2\sigma}{\sigma_s}\right) + \left[1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2\sigma}{\sigma_s}\right)\right] \frac{\lambda_s}{M_s^2} M^2, & \frac{\sigma}{\sigma_s} < 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$H = \frac{1}{\eta} f^{-1}\left(\frac{M}{M_s}\right) - \begin{cases} 2 \left\{ \sigma - \sigma_s \ln \left[\cosh\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right) \right] \right\} \frac{\lambda_s}{\mu_0 M_s^2} M, & \frac{\sigma}{\sigma_s} \geq 0, \\ 2 \left\{ \sigma - \frac{\sigma_s}{4} \ln \left[\cosh\left(\frac{2\sigma}{\sigma_s}\right) \right] \right\} \frac{\lambda_s}{\mu_0 M_s^2} M, & \frac{\sigma}{\sigma_s} < 0, \end{cases} \quad (2)$$

式中, σ 和 ε 分别是预应力和应变, E_s , λ_s , σ_s , M 和 M_s 分别为饱和杨氏模量、饱和磁致伸缩系数、饱和预应力、磁化强度和饱和磁化强度. H 是沿 x 方向施加在超磁致伸缩材料上的磁场, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m 是真空磁导率. 函数 $f(x) = \coth(x) - 1/x$, $\eta = 3\chi_m/M_s$, χ_m 为初始磁化强度系数.

(2) 式可以重新被写为

$$\frac{M}{M_s} = \begin{cases} \coth M_1 - 1/M_1, & \sigma/\sigma_s \geq 0, \\ \coth M_2 - 1/M_2, & \sigma/\sigma_s < 0, \end{cases} \quad (3)$$

式中

$$\begin{cases} M_1 = \eta H + 2\eta \left\{ \sigma - \sigma_s \ln \left[\cosh\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right) \right] \right\} \frac{\lambda_s M}{\mu_0 M_s^2}, & \frac{\sigma}{\sigma_s} \geq 0, \\ M_2 = \eta H + 2\eta \left\{ \sigma - \frac{\sigma_s}{4} \ln \left[\cosh\left(\frac{2\sigma}{\sigma_s}\right) \right] \right\} \frac{\lambda_s M}{\mu_0 M_s^2}, & \frac{\sigma}{\sigma_s} < 0. \end{cases} \quad (4)$$

为了方便建立等效电路模型, 当外部磁场沿 x 方向时, 可以建立如下的 d 型非线性本构方程:

$$\begin{cases} {}^m\varepsilon_1 = {}^m s_{11}(H_1, {}^m\sigma_1) {}^m\sigma_1 + {}^m d_{11}(H_1, {}^m\sigma_1) H_1, \\ B_1 = {}^m d_{11}(H_1, {}^m\sigma_1) {}^m\sigma_1 + {}^m \mu_{11}(H_1, {}^m\sigma_1) H_1, \end{cases} \quad (5)$$

式中, 应变 ${}^m\varepsilon_1$ 、应力 ${}^m\sigma_1$ 、磁感应强度 B_1 和磁场强度 H_1 均沿 x 方向. 为了与压电材料中应变和应力区别, 添加上角标 m . 压磁系数 ${}^m d_{11}$ 、弹性系数 ${}^m s_{11}$ 和磁导率 ${}^m \mu_{11}$ 是外部磁场 H_1 和预应力 ${}^m\sigma_1$ 的函数, 可以通过定义导出.

根据 (2) 式, 由压磁系数的定义式 ${}^m d_{11} = \frac{\partial {}^m\varepsilon_1({}^m\sigma_1, H_1)}{\partial H_1} = \frac{\partial {}^m\varepsilon_1}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial H_1}$, 可得

$${}^m d_{11} = \begin{cases} \frac{2\eta\lambda_s M \left[1 - \tanh\left(\frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right]}{M_s / \left(-\csc h^2 M_1 + \frac{1}{M_1^2} \right) - \frac{2\eta\lambda_s}{\mu_0} \left\{ {}^m\sigma_1 - \sigma_s \ln \left[\cosh\left(\frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right] \right\}}, & \frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s} \geq 0, \\ \frac{2\eta\lambda_s M \left[1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right]}{M_s / \left(-\csc h^2 M_2 + \frac{1}{M_2^2} \right) - \frac{2\eta\lambda_s}{\mu_0} \left\{ {}^m\sigma_1 - \frac{\sigma_s}{4} \ln \left[\cosh\left(\frac{2{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right] \right\}}, & \frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s} < 0. \end{cases} \quad (6)$$

根据 (1) 式, 由弹性系数的定义 ${}^m s_{11} = \frac{\partial {}^m\varepsilon_1({}^m\sigma_1, H_1)}{\partial {}^m\sigma_1} = \frac{\partial {}^m\varepsilon_1}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial {}^m\sigma_1}$, 可得

$${}^m s_{11} = 1/E_s +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\eta\lambda_s^2 \left[1 - \tanh\left(\frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right]^2 M^2}{\mu_0 M_s / \left(-\operatorname{csch}^2 M_1 + \frac{1}{M_1^2} \right) - 2\eta\lambda_s \left\{ {}^m\sigma_1 - \sigma_s \ln \left[\cosh\left(\frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right] \right\}} + \frac{\lambda_s}{\sigma_s} \operatorname{sech}^2\left(\frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \left(1 - \frac{M^2}{M_s^2} \right), \quad \frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s} \geq 0, \\ \frac{4\eta\lambda_s^2 \left[1 - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{2{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right]^2 M^2}{\mu_0 M_s / \left(-\operatorname{csch}^2 M_2 + \frac{1}{M_2^2} \right) - 2\eta\lambda_s \left\{ {}^m\sigma_1 - \frac{\sigma_s}{4} \ln \left[\cosh\left(\frac{2{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right] \right\}} + \frac{\lambda_s}{\sigma_s} \operatorname{sech}^2\left(\frac{2\sigma}{\sigma_s}\right) \left(1 - \frac{M^2}{M_s^2} \right), \quad \frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s} < 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

通过 (2) 式求出 $\frac{\partial M}{\partial H_1}$, 利用相对磁导率的定义式 $\mu_r = 1 + \frac{\partial M}{\partial H_1}$, 可得磁导率 ${}^m\mu_{11}$ 的公式为

$${}^m\mu_{11} = \mu_r \mu_0 = \mu_0 + \mu_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\frac{1}{M_s (-\operatorname{csc}^2 M_1 + 1/M_1^2)} - 2\eta \left\{ {}^m\sigma_1 - \sigma_s \ln \left[\cosh\left(\frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right] \right\} \frac{\lambda_s}{\mu_0 M_s^2}}, \quad \frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s} \geq 0, \\ \frac{\eta}{\frac{1}{M_s (-\operatorname{csc}^2 M_2 + 1/M_2^2)} - 2\eta \left\{ {}^m\sigma_1 - \frac{\sigma_s}{4} \ln \left[\cosh\left(\frac{2{}^m\sigma_1}{\sigma_s}\right) \right] \right\} \frac{\lambda_s}{\mu_0 M_s^2}}, \quad \frac{{}^m\sigma_1}{\sigma_s} < 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

2.1.2 磁化强度的数值求解和拟合函数

模型中, 取超磁致伸缩材料 Terfenol-D 的饱和磁致伸缩系数 $\lambda_s = 0.001$, 饱和磁化强度 $M_s = 0.8/\mu_0$, 初始磁化强度系数 $\chi_m = 20$, 饱和预应力 $\sigma_s = 200$ MPa, 饱和杨氏模量 $E_s = 110$ GPa.

根据 (3) 式和 (4) 式, 利用牛顿迭代法可以求出磁化强度 M 的数值解, 图 2 所示为随偏置磁场 H 和预应力 σ 的变化曲线. 从图 2 可以发现, 在不同预应力水平下, 磁化强度值随着施加场的增大而增大, 并且在高场区域将达到常数. 这意味着受到不同预应力的 Terfenol-D, 其磁化强度将饱和到相同的水平, 即饱和磁化强度 M_s , 这表明饱和磁化强度与预应力无关.

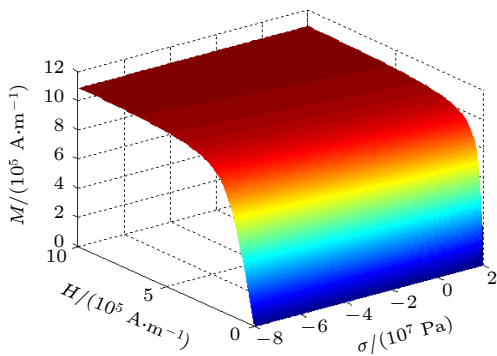


图 2 磁化强度随偏置磁场和预应力的变化曲线

Fig. 2. Curves of magnetization intensity versus bias magnetic field and prestress.

由于 (3) 式和 (4) 式求解 M 是超越方程, 不能求出其解析解, 只能求其数值解, 进而才能画出非线性参数压磁系数、弹性柔顺系数和磁导率的曲线. 但在利用 COMSOL 软件进行磁电材料仿真时, 数值解极其不便, 因此, 根据 M 数值解的特征, 找出 M 的拟合函数, 表达式如下:

$$M = A \left\{ \tanh \left[(a_1 e^{b_1 \sigma} + c_1 e^{d_1 \sigma}) H \right] + \tanh \left[(a_2 e^{b_2 \sigma} + c_2 e^{d_2 \sigma}) H \right] \right\}, \quad (9)$$

其中, $A = 0.523 \times 10^6$, $a_1 = 0.04899 \times 10^{-5}$, $b_1 = -0.03272 \times 10^{-6}$, $c_1 = 0.8705 \times 10^{-5}$, $d_1 = 0.01313 \times 10^{-6}$, $a_2 = 2.779 \times 10^{-5}$, $b_2 = 0.0218 \times 10^{-6}$, $c_2 = 0.2917 \times 10^{-5}$, $d_2 = 0.0964 \times 10^{-6}$, 根据 (3) 式和 (4) 式求 M 数值解表达式时常数的取值不同, 这些系数也会稍作变化.

根据 (9) 式, M 的拟合函数随偏置磁场和预应力变化曲线如图 3 所示. 与数值解的误差最大为 0.2%, 为后续利用 COMSOL 软件对磁电材料进行非线性仿真提供了极大的便利.

2.1.3 动态参数随磁场和预应力的变化曲线

将 M 的拟合函数代入 (6) 式—(8) 式即可得出压磁系数 d_{11} 、弹性柔顺系数 s_{11} 和磁导率 μ_{11} 随偏置磁场 H 和预应力 σ 的变化曲线, 如图 4—图 6 所示, 此结果与文献 [8] 中的图 5 和图 6 具有很好的一致性. 预应力的负值代表压应力、正值代表拉应力.

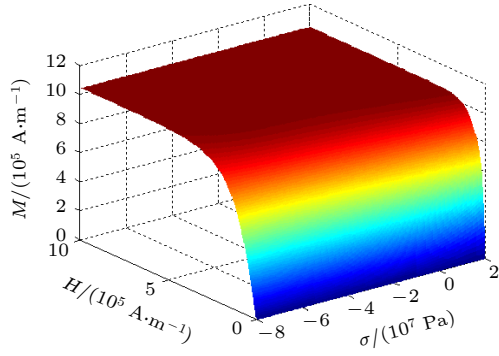


图3 磁化强度拟合函数随偏置磁场和预应力的变化曲线
Fig. 3. Curves of magnetization intensity fitting function versus bias magnetic field and prestress.

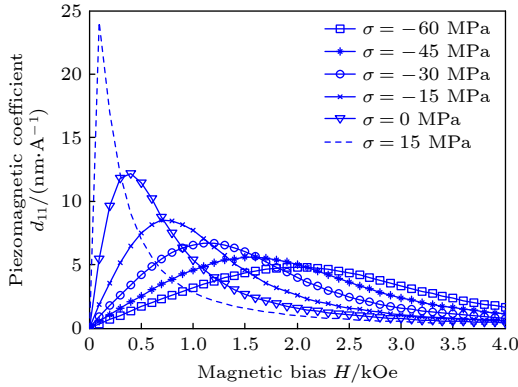


图4 不同预应力下, 压磁系数随偏置磁场的变化曲线
Fig. 4. Curves of piezomagnetic coefficient versus bias magnetic field under different prestress.

从图4可以看出, 当预应力固定后, 压磁系数先增大, 然后随着磁偏置场的增大而减小. 同时, 随着拉伸预应力的增大, 压磁系数的最大值增大, 压磁系数曲线向左. 然而, 当压缩预应力增大时, 压磁系数的最大值减小, 压磁系数曲线变得平坦, 偏置磁场曲线也向右. 不过, 该模型预应力超过 25 MPa 时, 会出现畸变.

从图5可以看出, 弹性柔顺系数不同的偏置磁场中有相同的趋势, 随着压应力变成拉应力, 先增大后减小. 当偏置磁场增大, 柔顺系数曲线向右移动, 最大值也随之增大.

从图6可以看出, 当预应力固定后, 磁导率随着偏置磁场的增大而减小. 同时, 随着拉伸预应力的增大, 磁导率的最大值增大, 且曲线左侧更加陡峭. 然而, 当压缩预应力增大时, 磁导率的最大值减小, 且随着偏置磁场的增大曲线变得更加平坦. 总体来说, 磁导率随着磁场强度的增大而减小, 当磁场强度达到一定值, 磁感应强度达到饱和, 此时磁导率达到最小值.

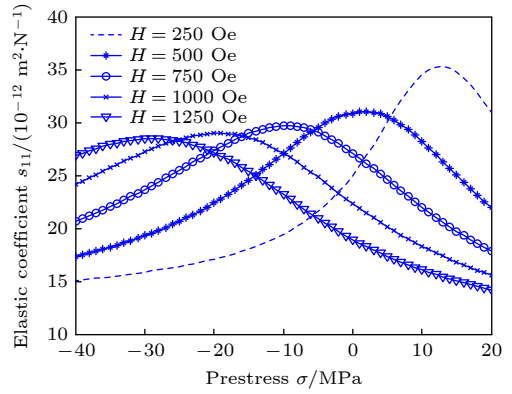


图5 不同偏置磁场下, 弹性柔顺系数随预应力的变化曲线
Fig. 5. Curves of elastic compliance coefficient versus prestress under different bias magnetic field.

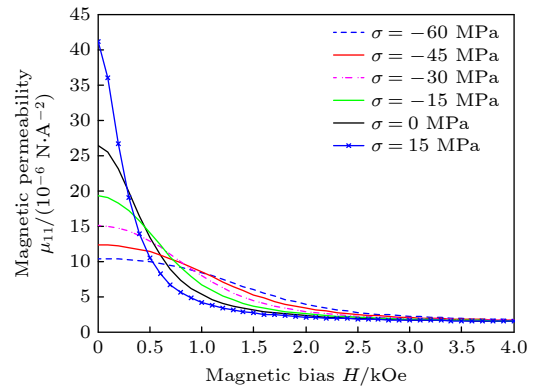


图6 不同预应力下, 磁导率随偏置磁场的变化曲线
Fig. 6. Curves of piezomagnetic coefficient versus bias magnetic field under different prestress.

2.2 层状磁电材料的非线性磁电耦合分析

2.2.1 对称等效电路模型

根据图1, 压电相的 d 型线性本构方程可写为

$$\begin{cases} p\varepsilon_1 = p s_{11} p \sigma_1 + p d_{31} E_3, \\ D_3 = p d_{31} p \sigma_1 + p \varepsilon_{33} E_3, \end{cases} \quad (10)$$

式中, $p\varepsilon_1$ 和 $p\sigma_1$ 分别是应变和应力, E_3 和 D_3 分别是压电层中沿厚度方向 (z 方向) 的电场和电位移. $p d_{31}$, $p s_{11}$ 和 $p \varepsilon_{33}$ 分别是压电材料的压电系数、弹性系数和介电常数.

根据牛顿第二定律, 可以写出磁电层状材料的运动方程:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r_m \frac{\partial^m \sigma_1}{\partial x} + r_p \frac{\partial^p \sigma_1}{\partial x}, \quad (11)$$

式中, u 是磁电层状复合材料沿 x 方向的位移; $r_m = 2t_m/(2t_m + t_p)$, $r_p = t_p/(2t_m + t_p)$, $\bar{\rho} = r_m \rho_m + r_p \rho_p$, r_m 和 ρ_m 是磁致伸缩层的相对厚度比和质量

密度, r_p 和 ρ_p 是压电层的相对厚度比和质量密度.

由于不同 x 处压电层的场强 E_3 和磁致伸缩层的磁感应强度 B_1 相同, 故有 $\frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial D_1}{\partial x} = 0$. 利用 (5) 式、(10) 式及 $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, 可把运动方程 (11) 式变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{v}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12)$$

式中, $\bar{v}^2 = \left(\frac{r_p}{p_{s11}} + \frac{r_m}{m_{s11}} \right) / \bar{\rho}$, $\bar{m}_{s11} = m_{s11} \left(1 - \frac{m d_{11}^2}{m \mu_{11} m_{s11}} \right)$, \bar{v} 是磁电层状材料的平均声速.

(12) 式的解是简谐振荡, 其形式为 $u = u(x)e^{i\omega t} = (A \cos kx + B \sin kx) e^{i\omega t}$. 定义 $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u(x)e^{i\omega t}$, 那么磁电层状复合材料两端面 (\dot{u}_1 和 \dot{u}_2) 的速度可分别写为 $\dot{u}_1 = i\omega u(0)$ 和 $\dot{u}_2 = i\omega u(l)$. (12) 式的位移解则可表达为

$$u(x) = \frac{\dot{u}_1}{i\omega} \cos(kx) + \frac{\dot{u}_2 - \dot{u}_1 \cos(kl)}{i\omega \sin(kl)} \sin(kx). \quad (13)$$

厚度极化的压电层两端电压 $V_p = E_3 \cdot t_p$, 一端面积电荷 $Q = \int_0^l \int_0^w D_3 dx dy$, 电流与电荷的关系 $I_p = \frac{dQ}{dt}$, 再利用 (10) 式和 (13) 式, 可求得压电层的电流, 其表达式为

$$I_p = i\omega C_0 V_p + \varphi_p (\dot{u}_2 - \dot{u}_1), \quad (14)$$

式中, $C_0 = \frac{w l^p \varepsilon_{33}}{t_p}$, 是静态电容; $\varphi_p = w \cdot \frac{p d_{31}}{p_{s11}}$, 是机电耦合因数; $\bar{p}_{\varepsilon_{33}} = p_{\varepsilon_{33}} \left(1 - \frac{p d_{33}^2}{p_{s11} p_{\varepsilon_{33}}} \right)$.

磁电复合材料 N 匝线圈的磁通量为 $\Phi = 2w \cdot t_m \cdot B_1$, 平均电压 $V_m = -N \frac{d\Phi}{dt}$. 根据安培环路定律, $\oint H_1 dx = \int_0^l H_1 dx = N I_m$, 利用 (5) 式和 (13) 式, 可获得线圈中电流的表达式如下:

$$I_m = -\frac{1}{i\omega L_0} V_m - \varphi_m (\dot{u}_2 - \dot{u}_1), \quad (15)$$

式中, $L_0 = \bar{m}_{\mu_{11}} N^2 \frac{2wt_m}{l}$, 是磁致伸缩层的静态电感; $\varphi_m = \frac{m d_{11}}{i\omega N m_{s11} \bar{m}_{\mu_{11}}}$, 是磁耦合因数; $\bar{m}_{\mu_{11}} = m_{\mu_{11}} \left(1 - \frac{m d_{11}^2}{m_{s11}} \right)$, 是平均磁导率.

根据磁电层状复合材料边界处的力平衡条件, 边界外力方程可写为

$$\begin{cases} -F_1 = wt_p^p \sigma_1|_{x=0} + 2wt_m wt_p^m \sigma_1|_{x=0}, \\ -F_2 = wt_p^p \sigma_1|_{x=l} + 2wt_m wt_p^m \sigma_1|_{x=l}. \end{cases} \quad (16)$$

将 (5) 式、(10) 式、(14) 式和 (15) 式的适当形式代入 (16) 式, 可得

$$F_1 = Z_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + Z_2 \dot{u}_1 + \varphi_p V_p - \varphi_m V_m, \quad (17)$$

$$F_2 = Z_1 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - Z_2 \dot{u}_2 + \varphi_p V_p - \varphi_m V_m. \quad (18)$$

式中, $Z_1 = \frac{w}{i\bar{v}} \left(\frac{t_p}{p_{s11}} + \frac{2t_m}{m_{s11}} \right) \frac{1}{\sin(kl)}$, $Z_2 = i \frac{w}{\bar{v}} \times \left(\frac{t_p}{p_{s11}} + \frac{2t_m}{m_{s11}} \right) \tan \left(\frac{kl}{2} \right)$.

外力 F_1 和 F_2 等效于机械电压, 速度 \dot{u}_1 和 \dot{u}_2 等效于机械电流. 根据方程 (14) 式、(15) 式、(17) 式和 (18) 式, 可以推导出磁电层复合材料的对称磁-弹-电等效电路, 如图 7(a) 所示. 当磁电复合材料自由振动时, 两端没有外力, 相当于短路, 如图 7(b) 所示, 机械阻抗可化简为 $Z = Z_1 + Z_2 // Z_2 = Z_1 + Z_2/2$. 可以发现, 磁性部分和压电部分对称存在于磁弹电等效电路中. 谐振时, 固有谐振频率 $\omega_r = \frac{\pi \bar{v}}{l}$, 阻抗 Z 可以用具有机械耗散的串联 RLC 电路表示, $Z = R_m + i\omega L_m + \frac{1}{i\omega C_0}$, R_m , L_m 和 C_m 分别为磁电层状复合材料的有效机械电阻、电感和电容, 其值为

$$L_m = \frac{\pi Z_0}{8\omega_r}, C_m = \frac{8}{\pi \omega_r Z_0}, R_m = \frac{\omega_r L_m}{Q_{\text{mech}}} = \frac{\pi Z_0}{8Q_{\text{mech}}},$$

$$Q_{\text{mech}}^2 = r_m Q_{\text{mm}}^2 + r_p Q_{\text{mp}}^2, Z_0 = \frac{w}{\bar{v}} \left(\frac{t_p}{p_{s11}} + \frac{2t_m}{m_{s11}} \right),$$

式中, Q_{mech} , Q_{mm} 和 Q_{mp} 分别为磁电复合材料的平均品质因数、压磁材料的品质因数和压电材料的品质因数.

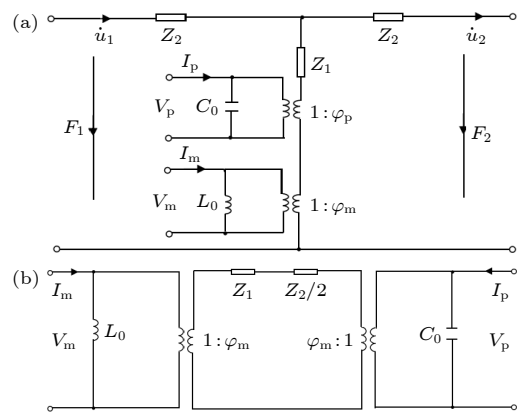


图 7 磁电层状复合材料 (a) 对称磁-弹-电等效电路; (b) 在自由边界条件下的对称等效电路

Fig. 7. (a) Symmetric magneto-elastic-electric equivalent circuit and (b) symmetric equivalent circuit under free boundary conditions of magnetoelectric laminated composite.

当磁性端口作为输入端, 压电端口作为输出端, 根据变压器原理和欧姆定律, 磁电系数可写为

$$\alpha_E = \frac{1}{t_p} \cdot \frac{dV_p}{dH} = \frac{1}{t_p} \cdot \frac{dV_p}{(N/l)dI_m}$$

$$= \frac{l}{t_p \cdot N} \cdot Z' \cdot \frac{dV_p}{\phi_m^2 dV_m} = \frac{l}{t_p \cdot N} \cdot \frac{L_0}{C_0}$$

$$\times \frac{\varphi_m \varphi_p}{i\omega L_0 \varphi_m^2 + R_m + i\omega L_m + \frac{1}{i\omega C_m} + \frac{\varphi_p^2}{i\omega C_0}}, \quad (19)$$

式中, $Z' = \frac{i\omega L_0 \varphi_m^2 \left(R_m + i\omega L_m + \frac{1}{i\omega C_m} + \frac{\varphi_p^2}{i\omega C_0} \right)}{i\omega L_0 \varphi_m^2 + R_m + i\omega L_m + \frac{1}{i\omega C_m} + \frac{\varphi_p^2}{i\omega C_0}}$.

2.2.2 磁电系数曲线

为了和已有文献 [8,9] 的结论对比, 磁致伸缩材料材料常数与 2.1.2 节的常数值相同, 压电材料材料常数为 $p_{s11} = 14.8 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$, $p_{d31} = 280 \times 10^{-12} \text{ C/N}$ 和 $p_{\varepsilon 33} = 14.77 \times \varepsilon_0$. 缠绕匝数 $N = 20$ 的磁电层合材料的尺寸为 $l = 12 \text{ mm}$, $w = 6 \text{ mm}$, $t_p = 1 \text{ mm}$ 和 $t_m = 1 \text{ mm}$. 磁致伸缩材料和压电材料的品质因数分别设为 $Q_{mm} = 35$ 和 $Q_{mp} = 70$. 根据 (19) 式, 分别画出了低频 1 kHz 处和共振频率处, 不同预应力时磁电系数随偏置磁场的变化曲线, 如图 8 和图 9 所示.

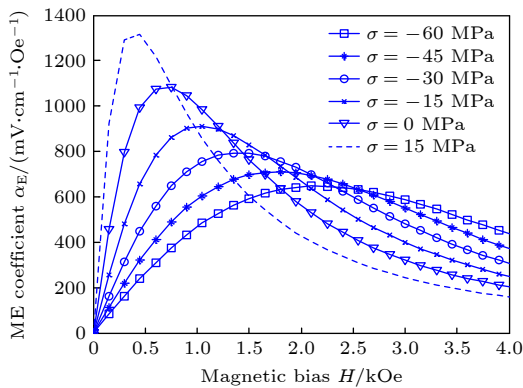


图 8 频率 1 kHz 处不同预应力时磁电系数随偏置磁场的变化曲线

Fig. 8. The variation curve of magnetoelectric coefficient with bias magnetic field under different prestress at frequency of 1 kHz.

从图 8 和图 9 可以看到, 共振频率处的磁电系数是低频处磁电系数的十几倍. 当拉应力逐渐变为压应力时, 磁电系数的峰值单调减小, 曲线向右漂移; 当偏置磁场相对较小时, 可以通过减小拉应力

或增大压应力来降低磁电系数; 当偏置磁场相对较大时, 磁电系数将通过减小拉伸应力或增大压缩应力而增大. 因此, 随着偏置磁场的增大, 磁电系数的曲线将逐渐反转; 拉伸应力可以增大磁电系数的最大值, 当达到最大值时, 所需的偏置磁场会更小, 但对于压缩应力来说, 情况完全相反. 图 8 的结果与文献 [8] 中的图 8 具有很好的一致性, 图 9 中预应力为 0 MPa 的曲线与文献 [9] 图 6 中组分比 $n=2/3$ 的曲线具有很好的一致性. 从方程 (19) 也可以看出, 磁电系数与磁致伸缩材料的压磁系数、柔弹性柔顺系数和磁导率都相关, 换言之, 磁电耦合特性主要由磁致伸缩材料的复杂磁机械耦合特性决定, 分析复杂磁机械耦合下的磁电系数将有助于高性能磁电器件的设计.

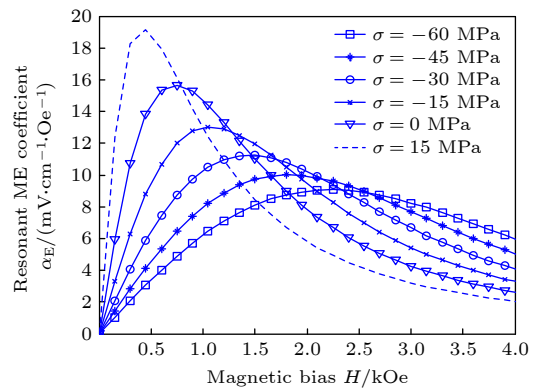


图 9 共振频率处不同预应力时磁电系数随偏置磁场的变化曲线

Fig. 9. The variation curve of magnetoelectric coefficient with bias magnetic field under different prestress at resonance frequency.

3 磁电层合材料的数值模拟

作为验证分析结果的补充手段, 通常使用数值方法通过模拟软件模拟磁电层合材料的振动. 为了比较 2.2 节的理论结果, 使用 COMSOL 软件设置了相同的参数. 该模拟所涉及的物理场包括固体力学场、磁场和静电场. 压电材料的运动方程由固体力学模块和静电场模块描述. 将固体力学模块与磁场模块相结合, 描述了磁致伸缩材料的运动方程. 这两种材料以叠层的形式相结合, 通过机械特性将压电层和磁致伸缩层耦合在一起.

磁电层合复合材料的二维模拟模型如图 10(a) 所示, 黄色部分表示压电层, 压电层旁边的红色部分是两个磁致伸缩层. 通过静电模块和磁场模块设

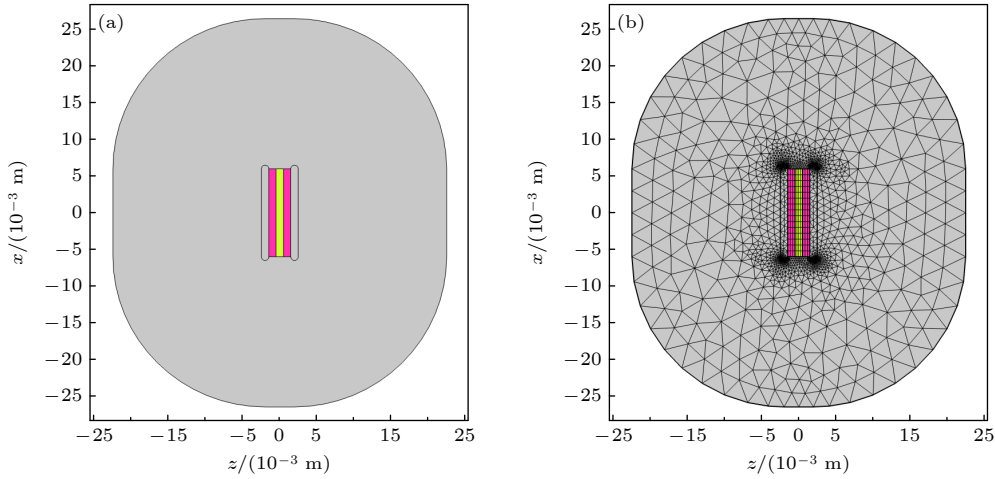


图 10 磁电层合材料的 (a) 仿真模型和 (b) 网格划分

Fig. 10. (a) Simulation model and (b) grid division of magnetolectric laminated composite.

置边界条件, 磁场以线圈的形式施加在磁场模块中, 电场通过接地和端子施加在静态模块中. 在两个磁致伸缩层的外侧是线圈, 线圈从右侧的灰色部分进入, 从左侧的灰色部分退出. 最外面的灰色部分是空气域. 压电材料的上端设置为终端端子, 下端设置为接地端子.

压电材料和磁致伸缩材料分别在固体力学模块中设置, 压电材料沿厚度方向极化, 磁致伸缩材料沿长度方向磁化. 仿真模型的网格划分如图 10(b)所示, 层合材料通过映射划分为网格, 自由三角形网格用于层合材料外的部分. 该磁电层合材料在长度方向振动, 所以网格在长度方向上划分得更紧密.

在求解过程中, 当激励磁能作用在磁致伸缩材料上时, 磁致伸缩材料会将磁能转化为材料的机械能, 由于压电材料和磁致伸缩材料粘在一起, 磁致伸缩材料的机械能必须转移到压电材料上, 压电材料将机械能转换为电能. 在某种磁激发的连续作用下, 当该频率与由压电和磁致伸缩材料组成的层合材料共振频率一致时, 就会发生共振. 当偏置磁场为 750 Oe, 预应力为 0 MPa 时, 利用 (19) 式, 绘制了磁电系数的频率曲线如图 11 所示. 由图 11 可得, 共振频率为 110.10 kHz, 此时磁电系数为 $15.75 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{Oe}^{-1}$, 与图 9 中预应力 0 MPa 时曲线的峰值结果一致, 此时偏置磁场也恰好是 750 Oe.

为了方便观察磁电层合材料的振动分布, 从磁电系数的频率曲线中提取了最大峰值模态形状. 此时, 共振频率为 110.10 kHz, 偏置磁场为 750 Oe,

预应力为 0 MPa, 模拟了相应的振动分布, 如图 12 所示. 黑线部分是变形前的模型, 彩色部分是变形后的. 从图 12 可以看出, 磁电层合材料是沿长度方向振动.

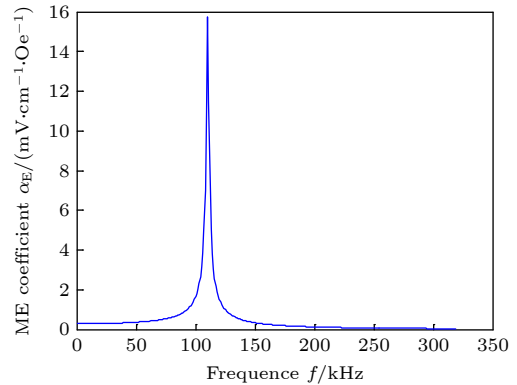


图 11 偏置磁场 750 Oe 预应力 0 MPa 处磁电系数的频率曲线

Fig. 11. Frequency curve of magnetolectric coefficient at bias magnetic field of 750 Oe and prestress of 0 MPa.

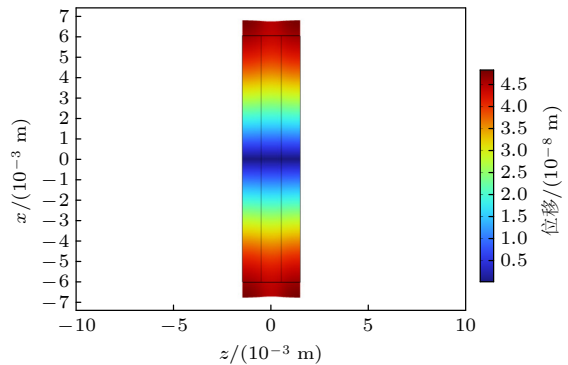


图 12 磁电层合材料共振频率处的振动模态

Fig. 12. Vibration mode at the resonance frequency of magnetolectric laminated composite.

4 结 论

本文详细研究了长度方向磁化、厚度方向极化的 3 层磁电复合材料的非线性特性。

首先, 基于 Z-L 模型, 根据磁化强度的数值解特征, 拟合了磁化强度函数, 进一步推导了超磁致伸缩材料的动态参数, 并分析了偏置磁场和预应力对相应参数的影响。1) 动态压磁系数. 当预应力固定后, 压磁系数先增大, 然后随着偏置磁场的增大而减小. 随着拉伸预应力的增大, 压磁系数的最大值增大, 压磁系数曲线向左. 当压缩预应力增大时, 压磁系数的最大值减小, 压磁系数曲线变得平坦, 偏置磁场曲线也向右。2) 动态弹性柔顺系数. 不同的偏置磁场曲线趋势相近, 随着压应力变成拉应力, 动态弹性柔顺系数先增大后减小. 当偏置磁场增大, 柔顺系数曲线向右移动, 最大值也随之增大。3) 动态磁导率. 磁导率随着磁场强度的增大而减小, 当磁场强度达到一定的值, 磁感应强度达到饱和, 此时磁导率达到最小值. 当拉应力变成压应力时, 磁导率的最大值减小, 且随着偏置磁场的增大曲线变得更加平坦。

其次, 基于非线性磁致伸缩本构方程建立了磁电层合材料的对称磁-弹-电等效电路模型, 并推导了磁电系数表达式, 与已有文献 [8,9] 的结论一致. 在相同的偏置磁场和预应力情况下, 共振频率处的磁电系数是低频处磁电系数的十几倍. 当拉应力逐渐变为压应力时, 磁电系数的峰值单调减小, 曲线向右漂移; 当偏置磁场相对较小时, 可以通过降低拉应力或增大压应力来降低磁电系, 然而, 当偏置磁场相对较大时, 磁电系数将通过减小拉伸应力或增大压缩应力而增大。

最后, 为了与理论结果比较, 使用 COMSOL 软件设置了相同的参数, 绘制了相应的磁电系数曲线, 二者结果符合较好, 并提取最大峰值模态振动形状, 可以很好地观察到磁电层合材料长度方向振

动情况. 结果表明, 这种对称磁-弹-电等效电路理论模型及使用 COMSOL 软件数值模拟的方法是可取的, 为进一步进行非线性理论分析奠定了基础。

参考文献

- [1] Xie B H, Xu G K, Xiao S Q, Yu Z J, Zhu D L 2023 *Acta Phys. Sin.* **72** 117501 (in Chinese) [谢冰鸿, 徐国凯, 肖绍球, 喻忠军, 朱大立 2023 *物理学报* **72** 117501]
- [2] Truong B D 2020 *IEEE Sens. J.* **20** 2967808
- [3] Han J, Zhang J J, Gao Y W 2018 *J. Magn. Magn. Mater.* **466** 200
- [4] Yang N N, Chen X, Wang Y J 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 157508 (in Chinese) [杨娜娜, 陈轩, 汪尧进 2018 *物理学报* **67** 157508]
- [5] Zhang X L, Zhou J P, Yao X, Yang Z P, Zhang G B 2020 *J. Magn. Magn. Mater.* **501** 166411
- [6] Zheng X J, Sun L 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 063906
- [7] Lin L Z, Wan Y P, Li F X 2012 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **7** 1568
- [8] Zhou H M, Ou X W, Xiao Y, Qu S X, Wu H P 2013 *Smart Mater. Struct.* **22** 035018
- [9] Zhou H M, Li C, Xuan L M, Wei J 2011 *Smart Mater. Struct.* **20** 035001
- [10] Liang Y R, Zheng X J 2007 *Acta Mech. Solida Sin.* **20** 283
- [11] Moffett M B, Limberg J, Mclaughlin E A 1991 *J. Acoust. Soc. Am.* **89** 1448
- [12] Zheng X J, Liu X E 2005 *J. Appl. Phys.* **97** 053901
- [13] Zhou H M, Cui X L 2014 *Smart Mater. Struct.* **23** 105104
- [14] Shi Y, 2018 *Compos. Struct.* **185** 474
- [15] Li J Z, Wen Y M, Li P, Yang J 2017 *IEEE Trans. Power Electr.* **53** 2500406
- [16] Muchenik T I, Barbero E J 2015 *Smart Mater. Struct.* **24** 025039
- [17] Zhou J P, Yang Y, Zhang G B, Peng J H, Liu P 2016 *Compos. Struct.* **155** 107
- [18] Zhang X L, Zhou J P, Yao X, Yang Z P, Zhang G B 2019 *AIP Adv.* **9** 105315
- [19] Bian L X, Wen Y M, Li P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4205 (in Chinese) [卜雷祥, 文玉梅, 李平 2009 *物理学报* **58** 4205]
- [20] Zhou H M, Xuan L M, Li C, Wei J 2011 *J. Magn. Magn. Mater.* **323** 2802
- [21] Boukazouha F, Poulin-Vittrant G, Tran-Huu-Hue L P, Bavencoffe M, Boubenider F 2015 *Ultrasonics* **60** 41
- [22] Malleron K, Talleb H, Gensbittel A, Ren Z 2017 *IEEE Trans. Magn.* **53** 8102104
- [23] Fu X, Gou Y 2022 *Appl. Acoust.* **193** 108752
- [24] Zhang X L, Yin Q P, Li G, Yao X 2022 *J. Magn. Magn. Mater.* **564** 170112

Symmetric equivalent circuit theory and numerical simulation analysis of nonlinear magnetoelectric laminated composite*

Zhang Xiao-Li^{1)†} Yin Qiu-Peng²⁾ Li Guo³⁾ Yao Xi⁴⁾ Ding Li-Lei¹⁾

1) (*School of Electronic and Information Engineering, Ankang University, Ankang 725000, China*)

2) (*Shanghai Shiwen Information Technology Limited Company, Shanghai 201306, China*)

3) (*School of Automation, Xi'an University of Posts & Telecommunications, Xi'an 710121, China*)

4) (*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China*)

(Received 6 July 2024; revised manuscript received 11 November 2024)

Abstract

In order to further study the nonlinear characteristics of the resonance magnetoelectric coefficient and vibration mode at the resonance frequency, three-layer magnetoelectric composite with length direction magnetization and thickness direction polarization is investigated in the article. Firstly, based on the Z-L model and the numerical solution characteristics of magnetization intensity, the magnetization intensity function is fitted, and the dynamic parameters of the giant magnetostrictive material, including dynamic piezomagnetic coefficient, dynamic elastic compliance coefficient, and dynamic magnetic permeability, are further derived. The effects of bias magnetic field and prestress on the corresponding composite are analyzed. Secondly, based on the nonlinear magnetostrictive constitutive equation, a symmetric magneto-elastic-electric equivalent circuit model of magnetoelectric laminate composite is established, and the expression of magnetoelectric coefficient is derived. The variation curve with bias magnetic field and prestress is analyzed, which is consistent with the conclusions of existing literature [Zhou H M, Ou X W, Xiao Y, Qu S X, Wu H P 2013 *Smart Mater. Struct.* **22** 035018; Zhou H M, Li C, Xuan L M, Wei J 2011 *Smart Mater. Struct.* **20** 035001]. Finally, in order to compare with the theoretical results, the same parameters are set by using COMSOL software, and the corresponding magnetoelectric coefficient frequency curve is plotted. The two results are in good agreement with each other, and the maximum peak modal vibration shape is extracted, making it easy to observe the vibration of the magneto electric laminated composite in the length direction. The results indicate that the theoretical model of this symmetric magneto-elastic-electric equivalent circuit and the numerical simulation method using COMSOL software are feasible, thereby laying the foundation for further nonlinear analysis of magnetoelectric laminate composite and making it possible to design high-precision magnetoelectric micro devices.

Keywords: nonlinear, magnetoelectric laminated composite, symmetric equivalent circuit theory, numerical simulation

PACS: 75.85.+t, 77.84.Lf, 85.80.Jm, 02.60.Cb

DOI: [10.7498/aps.73.20240934](https://doi.org/10.7498/aps.73.20240934)

CSTR: [32037.14.aps.73.20240934](https://cstr.cn/32037.14.aps.73.20240934)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12174004, 12104369), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant No. 23JRRA1805), and the Scientific Research Program of Shaanxi Provincial Department of Education, China (Grant No. 20JK0475).

† Corresponding author. E-mail: zxlxzhang@163.com



非线性磁电层合材料的对称等效电路理论及数值仿真分析

张小丽 殷秋鹏 李果 姚曦 丁礼磊

Symmetric equivalent circuit theory and numerical simulation analysis of nonlinear magnetoelectric laminated composite

Zhang Xiao-Li Yin Qiu-Peng Li Guo Yao Xi Ding Li-Lei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 73, 237501 (2024) DOI: 10.7498/aps.73.20240934

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.73.20240934>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非线性磁电换能器模型的谐振磁电效应分析及其输出功率优化

Resonance magnetoelectric effect analysis and output power optimization of nonlinear magnetoelectric transducer model

物理学报. 2023, 72(11): 117501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222277>

双孤子非线性干涉中的狄拉克磁单极势

Dirac magnetic monopoles potential in the nonlinear double-soliton interference

物理学报. 2023, 72(10): 100501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222416>

非线性超声射频信号熵对乳腺结节良恶性的定征

Classification of benign and malignant breast masses using entropy from nonlinear ultrasound radiofrequency signal

物理学报. 2021, 70(8): 084302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201919>

基于等效电路模型的钙钛矿太阳能电池效率损失机理分析

Loss mechanism analyses of perovskite solar cells with equivalent circuit model

物理学报. 2021, 70(9): 098801 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201975>

基于生物阻抗谱的细胞电学特性研究

Electrical characteristics of cells with electrical impedance spectroscopy

物理学报. 2020, 69(16): 163301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200601>

非线性造影超声成像数值仿真方法

Numerical simulation method of nonlinear contrast-enhanced ultrasound imaging

物理学报. 2023, 72(15): 154302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230323>