

## 耦合光机械腔中的量子相变\*

张文慧<sup>1)2)3)†</sup> 赵秀琴<sup>1)2)3)</sup>

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (太原师范学院计算与应用物理研究所, 晋中 030619)

3) (太原师范学院智能优化计算与区块链技术山西省重点实验室, 晋中 030619)

(2025年1月12日收到; 2025年2月23日收到修改稿)

本文在包含两模光场、 $N$ 个原子以及机械振子的耦合光机械腔中, 从理论上探讨了光与原子以及光与机械振子的相互作用引起的量子相变. 采用 Holstein-Primakoff 变换法, 假设了新的平移玻色算符和 4 个参量, 给出了系统的基态能量泛函和 4 个参量之间的关系, 通过两个特例证明了假设的平移玻色算符的正确性. 在共振情况下有正常相到超辐射相的相变, 调控两腔光场的耦合强度可以改变相变点. 当考虑辐射压力产生的非线性光子-声子相互作用时, 系统的相图由原来的 2 个相区扩展为 3 个相区, 包括正常相和超辐射相的共存区, 双稳的超辐射相区, 以及不稳定的真空宏观相区. 同时, 还出现了一条转折点曲线, 该曲线与相变点曲线有重叠区域, 表明系统中存在多重量子相变. 这些相变现象可以通过测量平均光子数来检测. 当不考虑两模光场的耦合作用时回到旋波近似的 Dicke 模型的量子相变.

**关键词:** 耦合光机械腔, Holstein-Primakoff 变换, 光场耦合强度, 双稳超辐射相

**PACS:** 02.50.Sk, 05.90.+m, 42.65.Pc, 64.70.Tg

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250046

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250046

## 1 引言

光与物质的相互作用是量子光学和凝聚态物理领域的重要研究课题. 首先在研究光与原子的相互作用方面, Dicke 模型<sup>[1]</sup>描述了光腔中单模量子化光场与  $N$  个二能级原子的相互作用, 揭示了从正常相到超辐射相的二阶量子相变<sup>[2,3]</sup>, 这种相变是由于量子涨落导致的多体系统基态的突变<sup>[4]</sup>, 在高精细光学腔<sup>[5,6]</sup>中成功观察到了玻色-爱因斯坦凝聚体的量子相变<sup>[7,8]</sup>, 从而使光场中的冷原子系统或者光腔中的玻色-爱因斯坦凝聚称为一个理想的量子模拟平台, 成为近年来的热点研究课题. 最近的研究成果如各向异性 Dicke 模型还表现出激

发态量子相变<sup>[9]</sup>; 压缩光场下的 Dicke 模型中, 在非线性和边界处发生了超辐射相变<sup>[10]</sup>; 引入可调原子-光子非线性相互作用, 可展示量子相变的多样性<sup>[11]</sup>; 光腔内的超冷原子与两个交叉相干泵浦场相互作用时, 会出现正常超流体相和超辐射相的相边界<sup>[12]</sup>; 两模光场直接与原子相互作用时, 相变点减小, 量子相变更易发生<sup>[13,14]</sup>等, 这些研究不仅丰富了对光与原子相互作用引起的量子相变的理解, 还为实验观测提供新的方法和思路.

其次, 光与机械振子的相互作用, 体现在可移动镜的光腔中, 光通过光压可操纵机械振子的运动, 将原子耦合到光机械腔中, 形成光场、机械振子和原子的混合系统. 此系统中, 光场、机械振子和原子共同确定临界点处的物理参量, 可用于探索

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12304404) 和山西省基础研究计划 (批准号: 202203021222236) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangwh@tynu.edu.cn

新的临界现象<sup>[15]</sup>. 通过优化光场与机械腔之间的非线性耦合强度, 可以有效实现光学双稳性<sup>[16]</sup>; 通过外力作用在混合系统上, 可以控制和修改正常相和超辐射相之间的量子相变临界值<sup>[17]</sup>; 原子从激发态到基态的跃迁可以引起双光子过程<sup>[18]</sup>; 机械振子的谐振阻尼会导致超辐射相坍塌, 发生超辐射相到反转的正常相的量子相变<sup>[19,20]</sup>等. 这些现象为研究量子相变提供了丰富的实验和理论基础.

耦合光机械腔是一种特殊的系统, 由两个光腔组成, 一个光腔中包含光场与二能级原子的相互作用, 另一个光腔中包含光场与纳米机械振子的相互作用, 两个光腔通过光场耦合在一起. 该系统的特点在于原子与一腔光场有直接的相互作用, 与另一腔光场有间接的相互作用, 与机械振子间接有关. 这种结构使得系统能够在不同光腔之间实现光与原子相互作用、光与机械振子耦合, 为研究量子相变、光学双稳性以及光机械频梳等现象提供了新的平台. 目前国际上已经做了以下几方面的研究: 可动镜与原子系综之间的纠缠及纠缠转移<sup>[20]</sup>、克尔效应下的光学双稳性<sup>[21]</sup>、有限温度下超辐射相塌缩和 Dicke 相变<sup>[22]</sup>. 本文研究的耦合光机械腔系统的量子相变, 既可以体现单模光场与原子, 也可体现双模光场与原子, 还能体现有原子的光机械系统中的量子相变特点.

本文采用 Holstein-Primakoff (H-P) 变换法, 假设全新的平移玻色算符和 4 个参量, 推导出系统的基态能量泛函以及 4 个参量之间的关系. 在共振情况下, 系统表现出从正常相到超辐射相的量子相变, 且通过调控两腔耦合强度可以改变相变点. 进一步考虑辐射压力产生的非线性光子-声子相互作用, 系统的相图从原来的两个相区演变为 3 个相区, 同时出现一条与相变点曲线有重叠区域的转折点曲线, 导致多重量子相变的发生. 这些预测可以通过测量实验中的平均光子数来检测. 当不考虑两腔光场的耦合作用时, 系统回到旋波近似下的 Dicke 模型.

## 2 模型和哈密顿量

耦合光机械腔由 A 腔和 C 腔两个腔构成, 如图 1 所示. 由具有强度  $\Omega_p$  和频率  $\omega_p$  的外部单模激光场相干驱动, A 腔中有  $N$  个超冷的全同玻色二能级原子系综, 光场的腔频为  $\omega_a$ . C 光腔和机械振

子相连, 构成了光机械腔, 光场的腔频为  $\omega_c$ , 机械振子的频率为  $\omega_b$ . A 腔和 C 腔中两模光场的耦合强度为  $J$ . C 腔中的光场和 A 腔中的光场耦合, 对 A 腔中的二能级原子有间接作用.

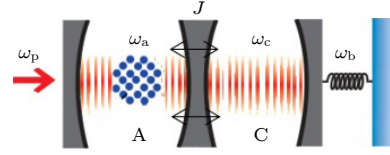


图 1 耦合光机械腔的示意图<sup>[20-22]</sup>, A 腔和 C 腔通过两模光场耦合强度  $J$  耦合, A 腔中有二能级原子系综, 由具有强度  $\Omega_p$  和频率  $\omega_p$  的外部单模激光场相干驱动, C 腔是光机械腔

Fig. 1. Schematic illustration of the coupled optomechanical cavities<sup>[20-22]</sup>, cavity A and cavity C are coupled by a two-mode optical field coupling strength  $J$ . An ensemble of two-level atoms is placed into the cavity A which is coherently driven by an external monochromatic laser field with strength  $\Omega_p$  and frequency  $\omega_p$ , cavity C is an optomechanical cavity.

耦合腔光力学系统在旋转频率为  $\omega_p$  的旋转框架中的哈密顿量可写成如下形式 ( $\hbar = 1$ )<sup>[20,21]</sup>:

$$\begin{aligned}
 H = & \Delta_a a^\dagger a + \Delta_0 J_z + \frac{g}{\sqrt{N}} (a J_+ + a^\dagger J_-) \\
 & + i\Omega_p (a^\dagger - a) + J (ac^\dagger + a^\dagger c) \\
 & + \Delta_c c^\dagger c + \omega_b b^\dagger b - \frac{\zeta}{\sqrt{N}} (b^\dagger + b) c^\dagger c. \quad (1)
 \end{aligned}$$

该系统为三重混合系统在两模近似下的哈密顿量. 前 3 项是旋波近似的 Dicke 模型. 其中  $a^\dagger$  和  $a$  分别代表光场 A 中光的产生和湮灭算符. A 腔中光场的腔频为  $\omega_a$ , 泵浦光的频率为  $\omega_p$ ,  $\Delta_a = \omega_a - \omega_p$  代表腔场 A 的有效频率.  $\omega_{at}$  为二能级原子的能级差,  $\Delta_0 = \omega_{at} - \omega_p$  是原子的有效频率.  $N$  个二能级原子的集体自旋算符是  $J_\pm$ ,  $J_z$ ,  $g$  为光场与二能级原子系综的耦合参量. 第 4 项是泵浦光的作用引起的. 第 5 项是两个腔中两模光场之间的耦合,  $J$  为耦合系数. 后 3 项是光与机械振子相互作用的表达式, 其中  $c^\dagger$  和  $c$  分别代表光场 C 的光子的产生和湮灭算符. C 腔中光场的腔频为  $\omega_c$ ,  $\Delta_c = \omega_c - \omega_p$  代表腔场 C 的有效频率. 机械振子用声子模描述,  $b^\dagger$  和  $b$  分别为纳米振子声子模的产生和湮灭算符,  $\omega_b$  为声子频率. 光和声子的非线性相互作用定义为  $\zeta = \sqrt{N}\omega_c \Delta x / l_0$ , 其中  $l_0$  是腔长,  $\Delta x = 1/\sqrt{2M\omega_b}$  为零点不确定性,  $M$  为纳米机械振子的质量.

### 3 H-P 变换法求解基态能量泛函

#### 3.1 H-P 变换法

H-P 变换<sup>[23-25]</sup>是角动量算符的变换方法,在处理多原子模型及相关物理系统时使用较多,该方法本质上是平均场理论.其是用单模玻色子来重新描述集体自旋算子,将基态能量按级数展开( $1/\sqrt{N}$ )并保留到二阶的结果,只有在热力学极限下( $N \rightarrow \infty$ )才成立.具体方法如下:

$$\begin{aligned} J_+ &= d^\dagger \sqrt{N - d^\dagger d}, \quad J_- = \sqrt{N - d^\dagger d} d, \\ J_z &= d^\dagger d - N/2. \end{aligned} \quad (2)$$

引入的玻色子算符服从 $[d, d^\dagger] = 1$ ,将(2)式代入(1)式,得到四模玻色算符哈密顿量:

$$\begin{aligned} H &= \Delta_a a^\dagger a + i\Omega_l(a^\dagger - a) + \Delta_0(d^\dagger d - j) \\ &+ \frac{g}{\sqrt{N}} \left[ a(d^\dagger \sqrt{N - d^\dagger d}) + a^\dagger(\sqrt{N - d^\dagger d} d) \right] \\ &+ J(ac^\dagger + a^\dagger c) + \Delta_c c^\dagger c + \omega_b b^\dagger b \\ &- \frac{\zeta}{\sqrt{N}}(b^\dagger + b)c^\dagger c. \end{aligned} \quad (3)$$

对于哈密顿量方程(3),为了确定临界相变点,进而研究基态性质,假设4个新的玻色算符 $\tilde{a}^\dagger, \tilde{b}^\dagger, \tilde{c}^\dagger, \tilde{d}^\dagger$ ,并通过4个实数 $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ 来平移原来的玻色算符 $a^\dagger, b^\dagger, c^\dagger, d^\dagger$ ,从而描述光场、原子和声子:

$$\begin{cases} a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger + \sqrt{N\alpha}, & d^\dagger \rightarrow \tilde{d}^\dagger - \sqrt{N\beta}, \\ b^\dagger \rightarrow \tilde{b}^\dagger + \sqrt{N\gamma}, & c^\dagger \rightarrow \tilde{c}^\dagger - \sqrt{N\rho}, \\ a \rightarrow \tilde{a} + \sqrt{N\alpha}, & d \rightarrow \tilde{d} - \sqrt{N\beta}, \\ b \rightarrow \tilde{b} + \sqrt{N\gamma}, & c \rightarrow \tilde{c} - \sqrt{N\rho} \end{cases} \quad (4)$$

方程(4)中若采用 $a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger - \sqrt{N\alpha}, d^\dagger \rightarrow \tilde{d}^\dagger + \sqrt{N\beta}, b^\dagger \rightarrow \tilde{b}^\dagger - \sqrt{N\gamma}, c^\dagger \rightarrow \tilde{c}^\dagger + \sqrt{N\rho}$ 等其他形式,所得的结论只是差一个“-”号,不影响结论. $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ 均为实数且都大于零.

将方程(4)中的 $d^\dagger \rightarrow \tilde{d}^\dagger - \sqrt{N\beta}, d \rightarrow \tilde{d} - \sqrt{N\beta}$ ,代入H-P变换方程(2)中得

$$\begin{aligned} J_+ &= (\tilde{d}^\dagger - \sqrt{N\beta}) \sqrt{N - (\tilde{d}^\dagger - \sqrt{N\beta})(\tilde{d} - \sqrt{N\beta})} \\ &= (\tilde{d}^\dagger - \sqrt{N\beta}) \sqrt{\xi}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{Nk} \sqrt{1 - [\tilde{d}^\dagger \tilde{d} - (\tilde{d}^\dagger + \tilde{d}) \sqrt{N\beta}] / (kN)}. \quad (6)$$

$k = 1 - \beta$ ,类似地也可以得到:

$$\begin{aligned} J_- &= \sqrt{\xi}(\tilde{d} - \sqrt{N\beta}), \\ J_z &= \tilde{d}^\dagger \tilde{d} - \sqrt{N\beta}(\tilde{d}^\dagger + \tilde{d}) + N\left(\beta - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

在热力学极限( $N \rightarrow \infty$ )的低温情况下,可将 $\sqrt{\xi}$ 按 $1/\sqrt{N}$ 展开到 $O(1/N)$ 阶:

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi} &\approx \sqrt{Nk} \sqrt{k} \left\{ 1 - \frac{\tilde{d}^\dagger \tilde{d} - (\tilde{d}^\dagger + \tilde{d}) \sqrt{N\beta}}{2kN} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{1}{8} \frac{d^\dagger d - (d^\dagger + d) \sqrt{\beta}}{2kN} \right]^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

相应地,可以得到 $J_+, J_-$ 和 $J_z$ 的展开形式,以及将方程(4)中新的平移算符代入哈密顿量(3)式中,可以得到如下展开形式的哈密顿量<sup>[23,25]</sup>:

$$H = N^1 H_0 + N^{1/2} H_1 + N^0 H_2 + \dots, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} H_0 &= \Delta_a \alpha + \Delta_0 \left(\beta - \frac{1}{2}\right) - 2g\sqrt{k\alpha\beta} + \Delta_c \rho \\ &- 2J\sqrt{\alpha\rho} + \omega_b \gamma - 2\zeta\rho\sqrt{\gamma}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= (\Delta_a \sqrt{\alpha} - g\sqrt{k\beta} - J\sqrt{\rho})(\tilde{a}^\dagger + \tilde{a}) \\ &+ \left( \Delta_0 \sqrt{\beta} - g\sqrt{k\alpha} + \frac{\lambda\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{k}} \right) (\tilde{d}^\dagger + \tilde{d}) \\ &+ (\omega_b \sqrt{\gamma} - \zeta\rho)(\tilde{b}^\dagger + \tilde{b}) \\ &+ (\Delta_c \sqrt{\rho} - J\sqrt{\alpha} - 2\zeta\sqrt{\rho\gamma})(\tilde{c}^\dagger + \tilde{c}). \end{aligned} \quad (11)$$

其中,(10)式为系统的平均基态能量.

根据条件 $H_1$ 中线性算符前的系数为零或者变分法:

$$\frac{\partial H_0}{\partial \alpha} = \frac{\partial H_0}{\partial \beta} = \frac{\partial H_0}{\partial \gamma} = \frac{\partial H_0}{\partial \rho} = 0,$$

得到一组方程,显示4个参量之间的关系:

$$\begin{cases} \Delta_a \sqrt{\alpha} - g\sqrt{k\beta} - J\sqrt{\rho} = 0, \\ \Delta_0 \sqrt{\beta} - g\sqrt{k\alpha} + \frac{g\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{k}} = 0, \\ \Delta_c \sqrt{\rho} - J\sqrt{\alpha} - 2\zeta\sqrt{\rho\gamma} = 0, \\ \omega_b \sqrt{\gamma} - \zeta\rho = 0. \end{cases} \quad (12)$$

方程(4)中假设的平移算符如 $a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger + \sqrt{N\alpha}$ 不同于参考文献[23,25]中的假设 $a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger + \sqrt{N\alpha}$ ,也不同于文献[24]中的假设 $a^\dagger \rightarrow \tilde{a}^\dagger + \sqrt{\alpha}$ ,所以

有待验证方程 (4) 的平移算符的正确性. 此处参数  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  是表征激发的 4 个数值, 求解方程组可得出他们之间的关系和求出解. 我们这样的假设其各个参数的物理意义是 A 腔中平均光子数为  $n_{pA} = \alpha$ , 原子布居数差的分布  $\Delta n_a = \beta - 1/2$ , C 腔中平均光子数值  $n_{pC} = \rho$ , 平均声子数分布  $n_b = \gamma$ . 通过两个特例, 旋波近似的 Dicke 和考虑两模光场的旋波近似的 Dicke 模型来验证方程 (4) 中假设的平移算符的正确性.

### 3.2 特例 1: 旋波近似的 Dicke 模型

在方程 (10) 和 (12) 中, 当不考虑 C 腔中光场的作用时, 只有 A 腔中的二能级原子和光场, 回到旋波近似时 Dicke 模型, 求解 (12) 式中的前两项且  $J = 0$ , 可得有关  $\alpha, \beta$  方程组:

$$\begin{cases} \Delta_a \sqrt{\alpha} - g \sqrt{k\beta} = 0, \\ \Delta_0 \sqrt{\beta} - g \sqrt{k\alpha} + \frac{g \sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{k}} = 0. \end{cases} \quad (13a)$$

求解方程组 (13a) 得两组解:

$$\begin{cases} \alpha = \beta = 0, \\ \alpha = \frac{1}{4} \frac{\Delta_0^2 g^2}{g_c^{R4}} \left(1 - \frac{g_c^{R4}}{g^4}\right), \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{g_c^{R2}}{2g^2}. \end{cases} \quad (13b)$$

其中  $\alpha = 0$  代表平均光子数分布为零, 为正常相 NP;  $\alpha > 0$  代表平均光子数不为零, 为超辐射相 SP, 相变点  $g_c^R = \sqrt{\Delta_a \Delta_0}$ . 将方程 (13b) 所得解代入 (10) 式可得平均基态能量分布, 所得结果与对应基态物理量在正常相和超辐射相的分布见表 1. 这些结论与文献 [24] 相同, 验证了方程 (4) 的正确性.

表 1 旋波近似时 Dicke 模型基态物理量的分布情况  
Table 1. Distribution of physical quantities in the ground state of Dicke model in rotating-wave approximation.

基态物理量	$g \leq g_c^R$	$g > g_c^R$
平均光子数分布 $n_{pA} = \alpha$	0	$\frac{1}{4} \frac{g^2}{\Delta_a^2} \left(1 - \frac{g_c^{R4}}{g^4}\right)$
布居数差分布 $\Delta n_a = \beta - 1/2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{g_c^{R2}}{2g^2}$
平均基态能量 $H_0/\Delta_0$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{g^2}{4\Delta_a \Delta_0} \left(1 + \frac{g_c^{R4}}{g^4}\right)$

### 3.3 特例 2: 考虑两模光场的旋波近似的 Dicke 模型

考虑与第二模光场有耦合  $J \neq 0$ , 第二模光场

通过耦合对 A 腔中的光场和原子有相互作用. 不考虑机械振子的作用  $\zeta = 0$  的情况, 求解 (12) 式中的前 3 项且  $\zeta = 0$  可得有关  $\alpha, \beta, \rho$  方程组:

$$\begin{cases} \Delta_a \sqrt{\alpha} - g \sqrt{k\beta} - J \sqrt{\rho} = 0, \\ \Delta_0 \sqrt{\beta} - g \sqrt{k\alpha} + \frac{g \sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{k}} = 0, \\ \Delta_c \sqrt{\rho} - J \sqrt{\alpha} = 0. \end{cases} \quad (14a)$$

求解方程组 (14a) 得两组解:

$$\begin{cases} \alpha = \beta = \rho = 0, \\ \alpha = \frac{1}{4} \frac{g^2}{\Delta_a^2} \left(1 - \frac{g_c^{J4}}{g^4}\right), \\ \beta = \frac{1}{2} - \frac{g_c^{J2}}{2g^2}, \quad \rho = \frac{J^2}{\Delta_c^2} \alpha. \end{cases} \quad (14b)$$

其中  $\alpha = 0, \rho = 0$  代表平均光子数分布为零, 为正常相 NP,  $\alpha > 0, \rho > 0$  代表平均光子数不为零, 为超辐射相 SP, 相变点  $g_c^J = \sqrt{\Delta_a \Delta_0 - (\Delta_0/\Delta_c) J^2} < g_c^R$ , 相变点减小, 更易发生相变 [13,14]. 与 C 腔中光场的值相加, 基本的形式没有变. 将方程 (14b) 所得解代入 (10) 式可得平均基态能量分布, 所得结果与对应基态物理量在正常相和超辐射相的分布 [13,14] 在表 2 列出.

表 2 考虑与 C 腔中光场有相互作用时基态物理量的分布情况

Table 2. Distribution of physical quantities in the ground state interacting with the light field in the cavity C is considered.

基态物理量	$g \leq g_c^J$	$g > g_c^J$
平均光子数分布 $\begin{cases} n_{pA} = \alpha \\ n_{pC} = \rho \end{cases}$	0	$\begin{cases} \alpha = \frac{g^2}{4\Delta_a^2} \left(1 - \frac{g_c^{J4}}{g^4}\right) \\ \rho = \frac{J^2}{4\Delta_c^2} \frac{g^2}{\Delta_a^2} \left(1 - \frac{g_c^{J4}}{g^4}\right) \end{cases}$
布居数差分布 $\Delta n_a = \beta - 1/2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{g_c^{J2}}{2g^2}$
平均基态能量 $H_0/\Delta_0$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{g^2}{4\Delta_a \Delta_0} \left(1 + \frac{g_c^{J4}}{g^4}\right)$

通过以上两个特例, 证明了方程 (4) 中假设的平移算符的正确性.

## 4 耦合光机械腔中的量子相变

参考有关实验参数, 将  $N$  个超冷原子  $^{87}\text{Rb}$  原子放在纳米振子超精细腔 A 中, 泵浦激光器的频率  $\omega_p$  来调节空腔频率  $\omega_a$ ,  $\omega_c$  和原子共振频率  $\omega_{at}$ ,

可以使他们的频率在同样的数量级上, 另外机械振子的频率  $\omega_b$ , 光与机械振子的耦合强度  $\zeta$ , 这些频率都在一个数量级上, 为简单起见, 能量均以机械振子的频率  $\omega_b$  为单位<sup>[26]</sup>.

#### 4.1 分析解和解的稳定性

由 (12) 式的第 4 式得  $\sqrt{\gamma} = \zeta\rho/\omega_b$ , 可得 3 个参量  $\alpha, \beta, \rho$  的方程组:

$$\begin{cases} \Delta_a\sqrt{\alpha} - \lambda\sqrt{k\beta} - J\sqrt{\rho} = 0, \\ \Delta_0\sqrt{\beta} - \lambda\sqrt{k\alpha} + \frac{\lambda\sqrt{\alpha}\beta}{\sqrt{k}} = 0, \\ \Delta_c\sqrt{\rho} - J\sqrt{\alpha} - \frac{2\zeta^2\rho\sqrt{\rho}}{\omega_b} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

方程组 (15) 总有一组零解  $\alpha = \beta = \rho = 0$ , 平均光子数等于零小于相变点的区域, 称为正常相, 用 NP 表示. 平均光子数大于零的解对应超辐射相的区域, 用 SP 表示. 可得相变点为

$$g_c^\zeta = g_c^J = \sqrt{\Delta_a\Delta_0 - (\Delta_0/\Delta_c)J^2},$$

机械振子不影响相变点<sup>[14,19,23]</sup>. 在  $g/\omega_b - J/\omega_b$  平面内, 选择恰当的参数代入, 求解方程组, 以表格的形式列出  $\alpha, \beta, \rho$  的解.

选取参数  $\omega_b$  为单位, 共振时频率相等  $\Delta_a/\omega_b = \Delta_c/\omega_b = \Delta_0/\omega_b = 20$ , 其他参量如  $J/\omega_b, g/\omega_b, \zeta/\omega_b$  变化. 将这些具体数据代入方程组 (15) 变成如下方程组:

表 3 4 个红点 A—D 在  $\zeta/\omega_b = 0, 1.0, 2.0$  时, 3 个参量  $\alpha, \beta, \rho$  的具体数值

Table 3. When the four red dots are at  $\zeta/\omega_b = 0, 1.0, 2.0$ , the specific values of the solutions of the three parameters  $\alpha, \beta, \rho$ .

正常相区点 A 点			正常相区点 B 点		
$\zeta/\omega_b = 0$	$\zeta/\omega_b = 1.0$	$\zeta/\omega_b = 2.0$	$\zeta/\omega_b = 0$	$\zeta/\omega_b = 1.0$	$\zeta/\omega_b = 2.0$
0	$\begin{cases} \alpha = 2.380 \\ \beta = 0.228 \\ \rho = 7.107 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha = 0.663 \\ \beta = 0.112 \\ \rho = 1.725 \end{cases}$	0	$\begin{cases} \alpha = 2.739 \\ \beta = 0.313 \\ \rho = 6.835 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha = 0.868 \\ \beta = 0.209 \\ \rho = 1.571 \end{cases}$
超辐射区相点 C 点			超辐射区相点 D 点		
$\zeta/\omega_b = 0$	$\zeta/\omega_b = 1.0$	$\zeta/\omega_b = 2.0$	$\zeta/\omega_b = 0$	$\zeta/\omega_b = 1.0$	$\zeta/\omega_b = 2.0$
$\begin{cases} \alpha = 0.534 \\ \beta = 0.260 \\ \rho = 0.134 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha_1 = 0.541 \\ \beta_1 = 0.261 \\ \rho_1 = 0.139 \\ \alpha_2 = 3.474 \\ \beta_2 = 0.395 \\ \rho_2 = 6.280 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha_1 = 0.568 \\ \beta_1 = 0.262 \\ \rho_1 = 0.162 \\ \alpha_2 = 1.295 \\ \beta_2 = 0.334 \\ \rho_2 = 1.203 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha = 0.889 \\ \beta = 0.333 \\ \rho = 0.222 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha_1 = 0.905 \\ \beta_1 = 0.335 \\ \rho_1 = 0.237 \\ \alpha_2 = 3.853 \\ \beta_2 = 0.416 \\ \rho_2 = 5.989 \end{cases}$	$\begin{cases} \alpha_1 = 1.000 \\ \beta_1 = 0.342 \\ \rho_1 = 0.332 \\ \alpha_2 = 1.462 \\ \beta_2 = 0.367 \\ \rho_2 = 0.946 \end{cases}$

$$\begin{cases} 20\sqrt{\alpha} - g\sqrt{k\beta} - J\sqrt{\rho} = 0, \\ 20\sqrt{\beta} - g\sqrt{k\alpha} + \frac{g\sqrt{\alpha}\beta}{\sqrt{k}} = 0, \\ 20\sqrt{\rho} - J\sqrt{\alpha} - \frac{2\zeta^2\rho\sqrt{\rho}}{\omega_b} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

为方便计算, 在  $g/\omega_b - J/\omega_b$  的相图中选取一些点, 如图 2 所示, 其中 NP 代表正常相区域 (灰色区域), SP 代表超辐射区域 (空白区域), 选取正常相区域中的 A, B 两个点, 超辐射相区域中的 C, D 两个点, 计算  $\alpha, \beta, \rho$  的数据, 如表 3 所示. 4 个红色点的纵坐标  $J/\omega_b = 10$ , 横坐标变化, 点的坐标分别为 A(10, 10), B(15, 10), C(25, 10), D(30, 10). 对应的相变点根据本节中相变点的表达式计算得相变点为

$$\frac{g_c^\zeta}{\omega_b} = \frac{1}{\omega_b} \sqrt{\Delta_a\Delta_0 - \frac{\Delta_0}{\Delta_c}J^2} = 17.32.$$

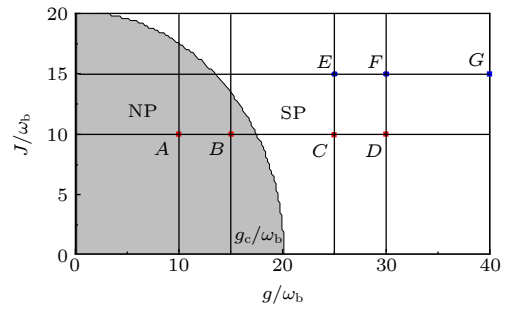


图 2  $g/\omega_b - J/\omega_b$  的相图

Fig. 2. Phase diagram of  $g/\omega_b - J/\omega_b$ .

从表 3 可知, 当不考虑光与机械振子的非线性相互作用时, 即  $\zeta/\omega_b = 0$ , 在正常相 NP 区域的 A,

$B$  两个点只有零解, 在超辐射区域的  $C, D$  两个点只有一组解. 当考虑光与机械振子的非线性相互作用时, 即  $\zeta/\omega_b = 1.0, 2.0$ , 在正常相 NP 区域  $A, B$  两个点都只有一组解, 在超辐射 SP 区域  $C, D$  两个点都有两组解. 解的个数和稳定性见图 3 和图 4.

考虑机械振子的作用, 以  $\rho$  为变量, 由 (16) 式可得变量之间的关系:

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{\rho}}{J} \left( \Delta_c - \frac{2\zeta^2\rho}{\omega_b} \right) = \mu(\rho) \\ \beta = \frac{1}{2} - \frac{f(\rho)}{2}, \\ f(\rho) = \frac{\Delta_0 \left[ \Delta_a \left( \Delta_c - \frac{2\zeta^2\rho}{\omega_b} \right) - J^2 \right]}{\left( \Delta_c - \frac{2\zeta^2\rho}{\omega_b} \right) g^2}, \end{cases} \quad (17)$$

将 (16) 式代入 (10) 式化简可得平均基态能量:

$$\begin{aligned} H_0(\rho) = & \Delta_a \mu^2(\rho) - \frac{1}{2} \Delta_0 f(\rho) - g\mu(\rho) \sqrt{1 - f^2(\rho)} \\ & - \Delta_c \rho + 3 \frac{\zeta^2 \rho^2}{\omega_b}. \end{aligned} \quad (18)$$

根据求极值的方法, 令方程 (18) 中平均基态能量  $H_0(\rho)$  对  $\rho$  求一阶偏导数, 即  $p = \partial H_0(\rho)/(\omega_b \partial \rho)$ , 偏导数为零可得方程解的具体值和个数. 对应的平均基态能量  $\varepsilon = H_0(\rho)/\omega_b$  的形状不同, 如果是凹点为能量极小值点, 是稳定的; 如果是凸点为能量极大值点, 是不稳定的, 用图示法求解和判断.

选取正常相区域的两个点  $A(10, 10)$  和  $B(15, 10)$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$ , 其他参量与表 3 方程组的取值一致, 验证解的个数和稳定性. 如图 3 所示, 以变量  $\rho$

(表示  $C$  腔中光场的平均光子数) 为横坐标, 一阶偏导数  $p = \partial H_0(\rho)/(\omega_b \partial \rho)$  和平均基态能量  $\varepsilon = H_0(\rho)/\omega_b$  分别为纵坐标画图.

从图 3 可知, 在正常相 NP 区域中  $A, B$  两个点, 在考虑机械振子的作用时除零解外, 还有非零解 (图 3(a1), (a2)), 平均基态能量  $\varepsilon$  都是凹陷的 (图 3(b1), (b2)), 所以在正常相 NP 区域中存在稳定的非零解, 即存在正常相和超辐射相的共存相.

选取超辐射相 SP 区的点  $D(30, 10)$ ,  $\zeta/\omega_b = 0.0, 1.0, 2.0$ , 以变量  $\rho$  (表示  $C$  腔中光场的平均光子数) 为横坐标, 一阶偏导数  $p = \partial H_0(\rho)/(\omega_b \partial \rho)$  和平均基态能量  $\varepsilon = H_0(\rho)/\omega_b$  分别为纵坐标画图, 如图 4 所示.

从图 4(a1) 可以看出, 当不考虑光和声子的非线性相互作用 (即  $\zeta/\omega_b = 0$ ) 时, 系统只有一个解, 此时  $\rho$  的取值较小, 对应的能量处于最低状态图 4(b1), 表现为稳定的解. 然而, 当考虑光和声子的非线性相互作用时, 如图 4(a2), (a3) 所示, 图示法中出现了 3 个解, 其中两个解与通过解方程得到的结果一致. 因此, 我们选取这两个解进行分析. 如图 4(b2), (b3) 所示, 这两个解的能量均处于最低状态, 均为稳定解, 即存在双稳的非零解, 对应存在双稳的超辐射相. 此外, 在图 4(a2) 中, 两个解之间的差值较大, 但随着  $\zeta/\omega_b$  的增大, 两个解之间的距离逐渐减小, 如图 4(a3) 所示.

## 4.2 平均光子数分布和原子布居数差分布

由于机械振子可以诱导超辐射相的塌缩<sup>[14,19,22]</sup>,

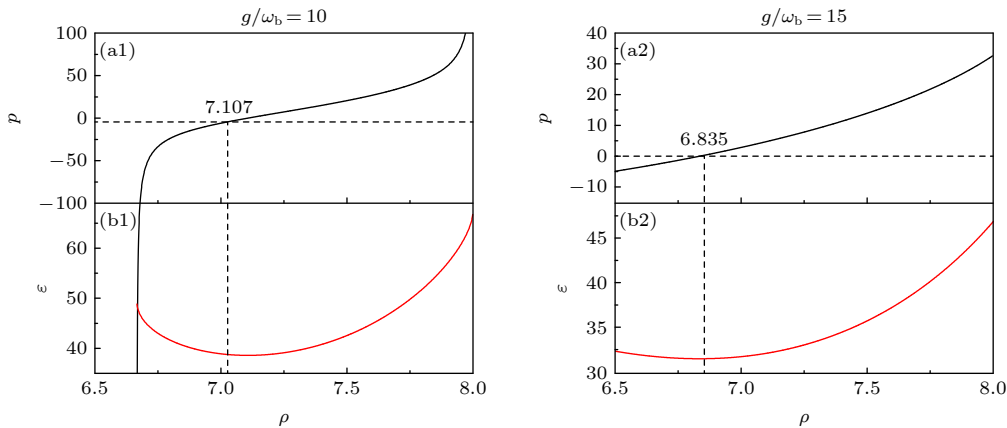


图 3 选择  $A, B$  两个点, 参量为  $J = 10\omega_b$ ,  $g/\omega_b = 10, 15$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$  (a1), (a2) 对应的一阶偏导数  $p$ ; (b1), (b2) 对应的平均基态能量  $\varepsilon$

Fig. 3. Select points  $A$  and  $B$ , parameters  $J = 10\omega_b$ ,  $g/\omega_b = 10, 15$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$ : (a1), (a2) The corresponding first partial derivatives  $p$ ; (b1), (b2) the corresponding average ground state energies  $\varepsilon$ .

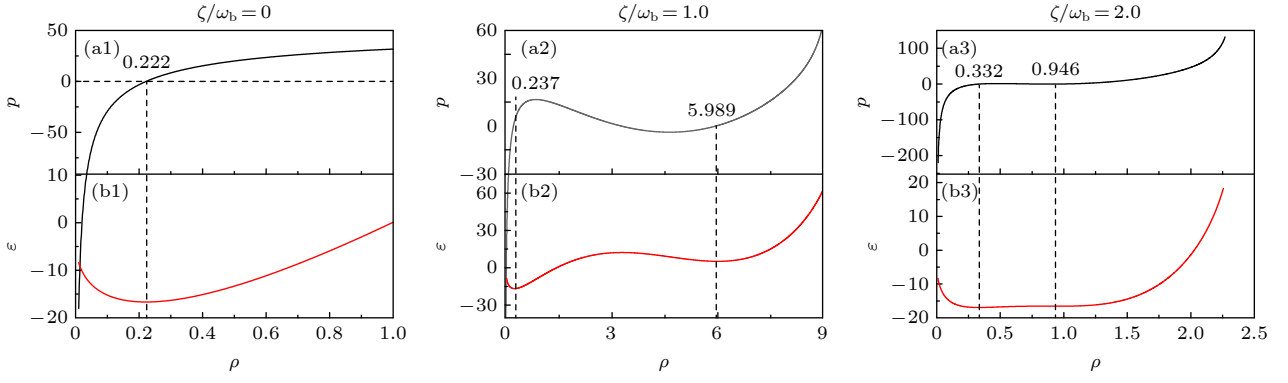


图 4 选择  $D$  点, 参量为  $J = 10\omega_b$ ,  $g/\omega_b = 30$ ,  $\zeta/\omega_b = 0, 1.0, 2.0$  (a1)–(a3) 对应的一阶偏导数  $p$ ; (b1)–(b3) 对应的平均基态能量  $\varepsilon$

Fig. 4. Select  $D$  point, parameters  $J = 10\omega_b$ ,  $g/\omega_b = 30$ ,  $\zeta/\omega_b = 0, 1.0, 2.0$ : (a1)–(a3) Corresponding first partial derivatives  $p$ ; (b1)–(b3) the corresponding average ground state energies  $\varepsilon$ .

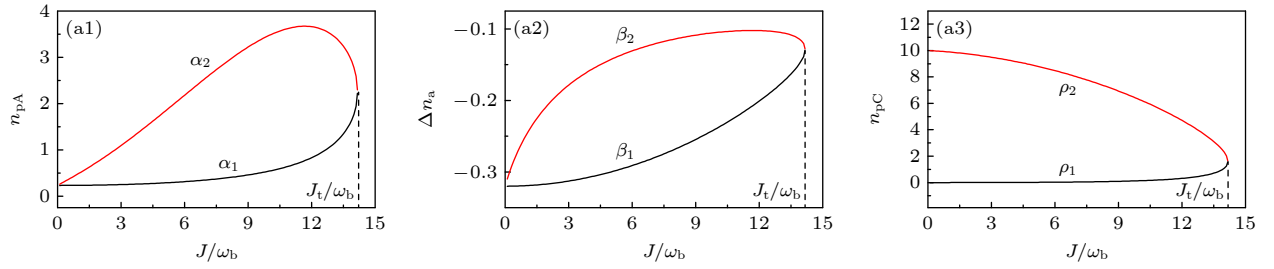


图 5 取参量  $g/\omega_b = 25$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$ ,  $J/\omega_b = 0 \rightarrow 20$ , A 腔和 C 腔的平均光子数分布  $n_{pA}$  (a1) 和  $n_{pC}$  (a3), A 腔中原子布居差的分布  $\Delta n_a$  (a2) 随两模光场的耦合参量  $J$  变化曲线,  $J_t/\omega_b$  是转折点

Fig. 5. Take parameters  $g/\omega_b = 25$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$ ,  $J/\omega_b = 0 \rightarrow 20$ : The changing curves of average photon number distribution  $n_{pA}$  (a1) and  $n_{pC}$  (a3) in cavity A and cavity C, and the distribution of atomic population difference  $\Delta n_a$  (a2) in cavity A, with the coupling parameter  $J$  of the two-mode optical field,  $J_t/\omega_b$  is a turning point.

因此研究光子数和平均布居数的分布情况对于理解系统的量子相变具有重要意义. 取参量  $g/\omega_b = 25$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$ ,  $J/\omega_b = 0 \rightarrow 20$ , 画出平均光子数分布  $n_{pA}$ ,  $n_{pC}$  和原子的平均布居数差分布  $\Delta n_a$  随两模光场的耦合参量  $J$  的变化曲线, 如图 5 所示.

图 5 中黑线和红线分别对应两个解, 图 5(a1) 中标记的是  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , 图 5(a2) 中是  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , 图 5(a3) 中是  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  的数值, 类似于表 3 中的数据. 从图 5 可知, 在超辐射区域存在双稳态的超辐射相. 当  $g/\omega_b = 25$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$  时,  $J/\omega_b$  的取值范围为  $0 \rightarrow 20$ , 而  $\alpha, \beta, \rho$  的分布仅能到转折点  $J_t/\omega_b = 14.167$ , 由于光与机械振子的作用, 会出现一个转折点  $J_t/\omega_b$ , 类似于超辐射相的塌缩 [14,19,22,27], 对应产生一个光与原子相互作用参量的转折点  $g_t/\omega_b = \frac{1}{\omega_b} \sqrt{\Delta_a \Delta_0 - \frac{\Delta_0}{\Delta_c} J_t^2}$ , 经过转折点后,  $\alpha, \beta, \rho$  的解变为零, 也就意味着平均光子数分布为零, 原子没有被激发, 声子数分布也为零.

### 4.3 $g/\omega_b \sim J/\omega_b$ 相图

在图 2 共振平面  $g/\omega_b \sim J/\omega_b$  中, 分析转折点后的情况. 由 (12) 式的第 4 式得  $\sqrt{\gamma} = \zeta\rho/\omega_b$ , 代入方程 (10) 可得

$$\begin{aligned} \frac{H_0}{\omega_b} &= \frac{\Delta_a \alpha}{\omega_b} + \frac{\Delta_0(\beta - \frac{1}{2})}{\omega_b} - 2 \frac{g\sqrt{k\alpha\beta}}{\omega_b} \\ &+ \frac{\Delta_c \rho}{\omega_b} - 2 \frac{J\sqrt{\alpha\rho}}{\omega_b} - \frac{\zeta^2 \rho^2}{\omega_b^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

对 3 个变量  $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\rho}$  组成三维矩阵, 并令  $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\rho}$  都等于零, 在共振  $\Delta_a/\omega_b = \Delta_c/\omega_b = \Delta_0/\omega_b = 20$ ,  $\zeta/\omega_b = 1.0$  情况下可得三阶的 Hessian 矩阵为

$$\begin{vmatrix} 40/\omega_b & -2g/\omega_b & -2J/\omega_b \\ -2g/\omega_b & 40/\omega_b & 0 \\ -2J/\omega_b & 0 & 40/\omega_b \end{vmatrix},$$

稳定性的判定方法是 Hessian 矩阵的一切顺序主子式均为正, 是稳定的. 第 1 个主子式  $40/\omega_b > 0$ ;

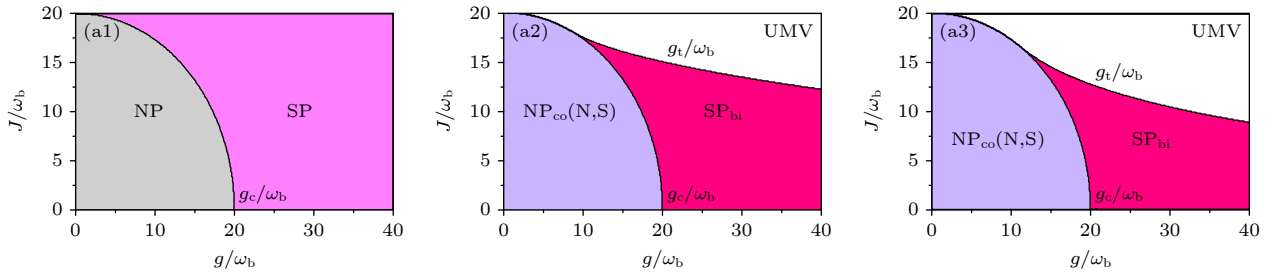

 图 6  $g/\omega_b \sim J/\omega_b$  平面相图 (a1)  $\zeta/\omega_b = 0.0$ ; (a2)  $\zeta/\omega_b = 1.0$ ; (a3)  $\zeta/\omega_b = 2.0$ 

 Fig. 6. Phase diagram in a plane  $g/\omega_b \sim J/\omega_b$ : (a1)  $\zeta/\omega_b = 0.0$ ; (a2)  $\zeta/\omega_b = 1.0$ ; (a3)  $\zeta/\omega_b = 2.0$ .

第 2 个主子式为

$$\begin{vmatrix} 40/\omega_b & -2g/\omega_b \\ -2g/\omega_b & 40/\omega_b \end{vmatrix} > 0, (20\omega_b)^2 - (g/\omega_b)^2 > 0,$$

可得  $g/\omega_b < 20$ ; 第 3 个主子式为

$$\begin{vmatrix} 40/\omega_b & -2g/\omega_b & -2J/\omega_b \\ -2g/\omega_b & 40/\omega_b & 0 \\ 2J/\omega_b & 0 & 40/\omega_b \end{vmatrix} > 0,$$

$$(g/\omega_b)^2 + (J/\omega_b)^2 < (20/\omega_b)^2,$$

由此可得在图 2 正常相 NP 的零解是稳定的, 原来的正常相 NP 重新定义为正常相和超辐射相的共存相, 用  $\text{NP}_{\text{co}}(\text{N,S})$  [13,22,27] 表示. 在正常相以外的区域光子数为零的区域都是不稳定的, 定义为不稳定的真空宏观相, 用  $\text{UMV}$  [13,22,27] 表示, 如图 2 中的 3 个蓝点的位置  $E(25, 15)$ ,  $F(30, 15)$ ,  $G(40, 15)$ .

$g/\omega_b$  的取值范围为 0—40,  $J/\omega_b$  的取值范围为 0—20,  $\zeta/\omega_b = 0.0, 1.0, 2.0$ , 画出  $g/\omega_b \sim J/\omega_b$  相图, 如图 6 所示. 在图 6(a1) 中, 考虑两模光场的耦合强度  $J$ , 不考虑光与机械振子的非线性耦合  $\zeta/\omega_b = 0.0$ , 只有正常相 NP (灰色区域) 和单独的超辐射相 SP (粉色区域), 相变点随耦合强度  $J$  的不同而变化. 图 6(a2)  $\zeta/\omega_b = 1.0$  和图 6(a3)  $\zeta/\omega_b = 2.0$  考虑了光场与机械振子的耦合, 产生了正常相和超辐射相的共存相  $\text{NP}_{\text{co}}(\text{N,S})$  [13,27] (淡紫色区域), 双稳的超辐射相  $\text{SP}_{\text{bi}}$  [16] (玫红色区域), 不稳定的真空宏观相  $\text{UMV}$  [13,22,27] (白色区域). 有相变点  $g_c/\omega_b$  曲线和转折点  $g_t/\omega_b$  曲线, 这两条线会有重叠的区域.  $g_t/\omega_b$  的物理意义是从不稳定的真空宏观相  $\text{UMV}$  转到双稳态的超辐射相. 随着光场与机械振子耦合强度的增大, 双稳超辐射相区域  $\text{SP}_{\text{bi}}$  会较小, 两条线重叠的区域增大. 从相变的角度看,

会有共存相  $\text{NP}_{\text{co}}(\text{N,S})$  经过相变点  $g_c/\omega_b$  到双稳的超辐射相  $\text{SP}_{\text{bi}}$  的量子相变, 共存相  $\text{NP}_{\text{co}}(\text{N,S})$  经过两条线重叠的区域到不稳定的真空宏观相  $\text{UMV}$ , 以及双稳的超辐射相  $\text{SP}_{\text{bi}}$  经过转折点  $g_t/\omega_b$  曲线到不稳定的真空宏观相  $\text{UMV}$  的量子相变.

## 5 结论

本文首先分析了耦合光力学系统和相应的哈密顿量. 应用 H-P 变换法, 假设了全新的平移玻色算符和 4 个参量, 给出了系统的基态能量泛函和 4 个参量之间的关系. 通过从简单的旋转波近似 Dicke 模型和考虑两模光场的旋波近似 Dicke 模型出发, 验证了假设的平移玻色算符的正确性. 其次, 通过解方程组和图示法判定了非零解的个数和稳定性, 用三阶 Hessian 矩阵法判定了零解的稳定性. 最后, 在量子相变特性方面, 旋波近似下的 Dicke 模型表现出从正常相经过相变点到超辐射相的转变, 且通过调控两腔耦合强度可以改变相变点. 进一步考虑辐射压力产生的非线性光子-声子相互作用后, 原有的相区发生了显著变化: 正常相变为正常相与超辐射相的共存相, 而超辐射相则进一步区分为双稳的超辐射相区和不稳定的真空宏观相区. 系统中出现了一条转折点曲线, 与相变点曲线存在重叠区域, 导致多重量子相变的发生. 其中, 双稳的超辐射相区域与光学双稳态现象类似, 表现出光学系统的多值性 [22,26,28]. 具体而言, 存在 3 种相变形式: 从正常相和超辐射相的共存相经过相变点到双稳的超辐射相, 经过两条线的重叠区域到不稳定真空宏观相, 以及双稳的超辐射相经过转折点到不稳定真空宏观相. 这些预测可以通过测量平均光子数来检测. 本文研究的耦合光机械腔, 当考虑机械振子、两模光场和原子系综时, 体现了光场与原子以及光场与机械振子都有相互作用, 得到了多重性

的量子相变; 当不考虑机械振子, 考虑两模光场的耦合和原子系综时, 体现了两模光场与原子的相互作用, 得到了相变点可变小和使量子相变更容易发生的结论; 当不考虑机械振子和两模光场的耦合作用时, 体现了单模光场与原子的相互作用, 回到了旋波近似的 Dicke 模型的量子相变.

## 参考文献

- [1] Dicke R H 1954 *Phys. Rev.* **93** 99
- [2] Wang Y K, Hioe F T 1973 *Phys. Rev. A* **7** 831
- [3] Hioe F T 1973 *Phys. Rev. A* **8** 1440
- [4] Vojta M 2003 *Rep. Prog. Phys.* **66** 2069
- [5] Brennecke F, Donner T, Ritter S, Bourdel T, Köhl M, Esslinger T 2007 *Nature* **450** 268
- [6] Colombe Y, Steinmetz T, Dubois G, Linke F, Hunger D, Reichel J 2007 *Nature* **450** 272
- [7] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [8] Baumann K, Mottl R, Brennecke F, Esslinger T 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 140402
- [9] Das P, Bhakuni D S, Sharma A 2023 *Phys. Rev. A* **107** 043706
- [10] Shen L T, Pei X T, Shi Z C, Yang Z B 2024 *Eur. Phys. J. D* **78** 91
- [11] Luo Y Q, Liu N, Liang J Q 2024 *Phys. Rev. A* **110** 063320
- [12] Qin W, Zheng D C, Wu Z D, Chen Y H, Liao R Y 2024 *Phys. Rev. A* **109** 013310
- [13] Zhao X Q, Zhang W H, Wang H M 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 160302 (in Chinese) [赵秀琴, 张文慧, 王红梅 2024 物理学报 **73** 160302]
- [14] Zhao X Q, Zhang W H 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 240301 (in Chinese) [赵秀琴, 张文慧 2024 物理学报 **73** 240301]
- [15] Wang B, Nori F, Xiang Z L 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 053601
- [16] Samanta A, Jana P C 2023 *Journal of Optics* **52** 494
- [17] Li L C, Zhang J Q 2021 *Photonics* **8** 588
- [18] Lan Z L, Chen Y W, Cheng L Y, Chen L, Ye S Y, Zhong Z R 2024 *Quantum Inf. Process.* **23** 72
- [19] Zhao X Q, Liu N, Bai X M, Liang J Q 2017 *Ann. Phys.* **378** 448
- [20] Bai C H, Wang D Y, Wang H F, Zhu A D, Zhang S 2016 *Sci. Rep.* **6** 33404
- [21] Nejad A A, Askari H R, Baghshahi H R 2017 *Appl. Opt.* **56** 2816
- [22] Huang S, Liu N, Liang J Q, Li H B 2021 *Phys. Scr.* **96** 095801
- [23] Lian J L, Liu N, Liang J Q, Chen G, Jia S T 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043820
- [24] Clive E, Tobias B 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066203
- [25] Chen G, Li J Q, Liang J Q 2006 *Phys. Rev. A* **74** 054101
- [26] Huang B, Yu J L, Wang W R, Wang J, Xue J Q, Yu Y, Jia S, Yang E Z 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 044204 (in Chinese) [黄标, 于晋龙, 王文睿, 王菊, 薛纪强, 于洋, 贾石, 杨恩泽 2015 物理学报 **64** 044204]
- [27] Wang Z M, Lian J L, Liang J Q, Yu Y M, Liu W M 2016 *Phys. Rev. A* **93** 033630
- [28] Liu Y W, Zhao H, Wang Y H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 198 (in Chinese) [刘要稳, 赵鸿, 汪映海 1999 物理学报 **48** 198]

# Quantum phase transitions in coupled optomechanical cavities\*

ZHANG Wenhui<sup>1)2)3)†</sup> ZHAO Xiuqin<sup>1)2)3)</sup>

1) (*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)

2) (*Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)

3) (*Shanxi Key Laboratory for Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Jinzhong 030619, China*)

( Received 12 January 2025; revised manuscript received 23 February 2025 )

## Abstract

In this paper, the quantum phase transitions caused by the interactions between light and atoms, as well as between light and mechanical oscillators, are discussed theoretically in a coupled optomechanical cavity containing two optical field modes ( $N$  atoms and mechanical oscillator). By using Holstein-Primak off transformation method, new translational boson operators and four parameters are assumed. The ground state energy functional of the system and a set of equations composed of four parameters are given. The correctness of the assumed translation boson operators is proved by two special cases. In the case of resonance, the characteristics of the obtained solutions are shown by solving the equations, graphical method and Hessian matrix judgment. The stable zero solution is called the normal phase, the unstable zero solution is named the unstable vacuum macroscopic phase, and the stable non-zero solution is referred to as the superradiation phase. The phase can transition from normal phase to superradiation phase, and the point of phase transition can be changed by adjusting the coupling intensity of the two cavity light fields. When the nonlinear photon-phonon interaction caused by radiation pressure is considered, the phase diagram of the system is expanded from the original two phase regions to three phase regions, including the coexistent normal phase and superradiation phase, the bistable superradiation phase, and the unstable vacuum macroscopic phase region, where the bistable superradiation phase is similar to the optical bistable phenomenon. At the same time, there is also a turning point curve, which overlaps with the phase transition point curve, indicating the existence of multiple quantum phase transitions in the system. These predictions can be detected by measuring the average number of photons. The coupled optomechanical cavity that we studied, when considering the coupling of the two-mode optical field and the atomic ensemble but no mechanical oscillator, reflects the interaction between the two-mode optical field and the atom, thus concluding that the transformation point is small and the quantum phase transition is easy to occur. When the coupling between the mechanical oscillator and the two-mode optical field is not considered, the interaction between the single-mode optical field and the atom is reflected, returning to the quantum phase transition of the Dicke model under rotating wave approximation.

**Keywords:** coupled optomechanical cavity, Holstein-Primak off transformation, coupling intensity of the light fields, bistable superradiation phase

**PACS:** 02.50.Sk, 05.90.+m, 42.65.Pc, 64.70.Tg

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250046](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250046)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250046](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250046)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12304404) and the Basic Research Project of Shanxi Province, China (Grant No. 20220302122236).

† Corresponding author. E-mail: [zhangwh@tynu.edu.cn](mailto:zhangwh@tynu.edu.cn)

## 耦合光机械腔中的量子相变

张文慧 赵秀琴

### Quantum phase transitions in coupled optomechanical cavities

ZHANG Wenhui ZHAO Xiuqin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 100202 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250046

CSTR: 32037.14.aps.74.20250046

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250046>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

双模光机械腔中冷原子的量子相变和超辐射相塌缩

Quantum phase transitions and superradiation phase collapse of cold atoms in a two-mode photomechanical cavity

物理学报. 2024, 73(24): 240301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241103>

双光腔光机械系统的动力学相变和选择性能量交换

Dynamical phase transition and selective energy exchange in dual-cavity optomechanical systems

物理学报. 2021, 70(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210178>

一维耦合腔晶格中磁子-光子拓扑相变和拓扑量子态的调制

Modulation of topological phase transition and topological quantum state of magnon-photon in one-dimensional coupled cavity lattices

物理学报. 2024, 73(4): 044203 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231519>

双腔双光力系统中的光非互易传输特性

Nonreciprocal transmission characteristics in double-cavity double-optomechanical system

物理学报. 2023, 72(6): 060702 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222246>

一维超导传输线腔晶格中的拓扑相变和拓扑量子态的调制

Modulation of topological phase transitions and topological quantum states in one-dimensional superconducting transmission line cavities lattice

物理学报. 2022, 71(19): 194203 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220675>

不同缺陷态下具有高光力耦合率的新型一维光力晶体纳米梁

Novel one-dimensional optomechanical crystal nanobeam with high optomechanical coupling rate under different defect states

物理学报. 2021, 70(22): 224210 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210925>