

# 多量子比特 $W\bar{W}$ 态在白噪声环境下的 纠缠判定与分类\*

李岩<sup>1)2)3)†</sup> 任志红<sup>4)</sup>

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (太原师范学院计算与应用物理研究所, 晋中 030619)

3) (智能优化计算与区块链技术山西省重点实验室, 晋中 030619)

4) (山西师范大学物理与信息工程学院, 太原 030031)

(2025 年 2 月 24 日收到; 2025 年 8 月 16 日收到修改稿)

多体系统的纠缠判定与分类是当前量子信息领域人们研究的重点课题. 本文利用量子 Fisher 信息 (quantum Fisher information, QFI) 可以判定多体纠缠这一特性, 对多量子比特  $W\bar{W}$  态在白噪声环境下的量子纠缠进行了判定与分类研究. 在局域操作下, 结合已知量子态的信息, 给出了判定真正多体纠缠和含有量子纠缠的可见度判据. 特别地, 对于 5 比特  $W\bar{W}$  态和 6 比特  $W\bar{W}$  态, 由于拆分结构态的 QFI 最大值大于其本身的 QFI, 所以无法严格地给出判定其真正多体纠缠的判据, 但给出了判定其可能是哪种纠缠结构的范围. 另外, 研究还发现随着量子比特数目的增加, 判定  $W\bar{W}$  态真正多体纠缠的条件变得越来越严苛, 而判定其含有纠缠的条件变得相对宽松. 考虑实验上对多体系统进行局域操作时, 紧邻量子比特间容易发生串扰现象, 本文借助 Lipkin-Meshkov-Glick 模型对不同多量子比特  $W\bar{W}$  态的纠缠分类进行了研究, 发现随着相互作用强度的增加, 即使在白噪声占比较大的情况下, 不同量子比特数的  $W\bar{W}$  态也可以区分, 解决了局域操作下区分困难的问题, 且随着相互作用强度的增大, 纠缠分类越容易实现. 这一点也充分展现了非局域操作相较于局域操作在纠缠分类方面的优势.

**关键词:** 纠缠判定, 量子 Fisher 信息, 多量子比特  $W\bar{W}$  态, Lipkin-Meshkov-Glick 模型

**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ud, 42.50.Lc

**DOI:** 10.7498/aps.74.20250221

**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250221

## 1 引言

量子信息科学的快速发展极大地推动了与之相关的量子技术发展, 包括量子计算、量子模拟、量子保密通信和量子雷达等<sup>[1-4]</sup>, 同时也促进了基础科学的不断进步, 包括量子参数估计、量子频标、国际制单位的核定等<sup>[5-7]</sup>. 量子纠缠是量子力学

区别于经典物理学的特征之一, 描述的是两个或多个粒子组成的量子体系, 由于粒子彼此间的相互作用, 单个粒子的特性已经融合为整体性质, 无法得到独立的描述. 作为量子信息的核心资源, 量子纠缠在量子技术的发展中具有关键作用, 对其进行判定和量化也成为当前该领域研究的重点和难点<sup>[8-11]</sup>. 量子纠缠判定就是通过理论或实验手段, 确定一个由多粒子或子系统组成的复合系统是否为纠缠态

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12305024, 12205176, 92365116)、山西省应用基础研究计划项目 (批准号: 202203021212193, 202103021223251) 和山西省高等学校青年学术带头人项目 (批准号: 2024Q035) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: li8989971@163.com

的过程. 近年来, 人们提出了多种方法开展多体量子纠缠判定, 比如量子压缩参数、纠缠目击算符、量子 Bell 不等式、量子 Fisher 信息等<sup>[12]</sup>. 每种方法均有各自的优缺点, 这里简单描述一下, 量子压缩参数判定纠缠的核心是通过压缩参数反映子系统的非经典压缩特性, 间接衡量体系是否含有纠缠, 其计算公式是 1992 年 Wineland 等<sup>[13]</sup>提出的基于测量精度所定义的自旋压缩参数  $\xi_R^2$ , 当  $\xi_R^2 < 1$  时, 表明体系含有纠缠, 该方法的优点是计算方便, 缺点是对一些特定非高斯态判定不准确<sup>[14]</sup>. 纠缠目击算符判定纠缠则是通过计算目击算符  $\hat{W}$  的平均值来判定纠缠, 对于所有分离量子态来说, 其值  $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{W}] > 0$ , 纠缠态则  $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{W}] < 0$ <sup>[15]</sup>, 该方法的优点是计算简单, 缺点是纠缠目击算符的构造对设备具有依赖性, 容易出错. 还有就是基于量子 Bell 不等式构造的独立于设备的判据, 优点是纠缠判据与测量设备无关, 缺点是随着量子体系尺度的增大, 粒子间的串扰效应会影响其判定准确性<sup>[16]</sup>.

本文主要利用量子 Fisher 信息判定纠缠的方法<sup>[17,18]</sup>, 对近期实验上实现的多量子比特  $W\bar{W}$  态<sup>[19]</sup>, 开展在白噪声环境下的纠缠判定与分类研究. 量子 Fisher 信息是从量子态本身的性质出发, 对其在外界扰动下速度变化快慢的统计数据进行分析, 适用于任意量子态 (包括纯态和混合态), 并且还可以对体系内部的纠缠结构进行判定分析<sup>[9,11]</sup>. 在某些特定情形下, 如非高斯纠缠, 其表现要比压缩参数更好<sup>[14]</sup>. 多量子比特  $W\bar{W}$  态是在研究 3 比特量子态的量子关联单配性时提出来的<sup>[20]</sup>, 可以表示为

$$|W\bar{W}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|W_N\rangle + |\bar{W}_N\rangle), \quad (1)$$

其中,  $W$  态表示为

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( |0^{\otimes(N-1)}\rangle |1\rangle + \sqrt{N-1} |W_{N-1}\rangle |0\rangle \right), \quad (2)$$

对称态  $\bar{W}$  表示为

$$|\bar{W}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( |1^{\otimes(N-1)}\rangle |0\rangle + \sqrt{N-1} |\bar{W}_{N-1}\rangle |1\rangle \right). \quad (3)$$

一般地, 三量子比特的  $W\bar{W}$  态可以表示为

$$|W\bar{W}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle). \quad (4)$$

鉴于  $|W\bar{W}_3\rangle$  在量子纠缠方面表现较好, 同时

具备三体真正纠缠 (纠缠度为  $1/3$ ) 和两两纠缠 (丢失一个粒子)<sup>[20,21]</sup>, 故对多量子比特  $W\bar{W}$  态在量子信息领域进行研究具有一定的价值. 2023 年, 我们对其在精密测量方面的表现进行了系统研究 (包含局域操作和非局域操作), 发现当体系粒子数目  $N$  较大时, 其量子 Fisher 信息值与相同量子比特数的 GHZ 态的 QFI 接近<sup>[22]</sup>. 随后, 对其在丢失粒子数情况下的量子计量进行了研究, 发现仍然具有较强的鲁棒性<sup>[23]</sup>. 基于此, 我们想要知道多量子比特  $W\bar{W}$  态在纠缠判定及分类方面的表现如何, 这对于未来基于  $W\bar{W}$  态开展量子信息技术应用具有重要的理论价值. 考虑实验上常见的噪声为白噪声, 故本文开展白噪声环境下基于量子 Fisher 信息的多体纠缠判定与分类研究. 通常我们利用局域操作下的量子 Fisher 信息开展纠缠判定, 因为局域操作不会带来新的纠缠, 因此不会影响原有体系的量子纠缠判定. 但随着实验上研究体系的不断增大, 特别是大尺度、多粒子的量子纠缠实现<sup>[24,25]</sup>, 很难在实验上通过精确的局域操控实现纠缠判定, 因为很难保证对紧邻的两个粒子实现完美的局域操作且彼此不受影响, 即串扰效应会影响纠缠判定结果<sup>[16,26,27]</sup>. 因此, 开展非局域操控的多体纠缠判定研究很有必要<sup>[28]</sup>.

利用局域操作下的量子 Fisher 信息, 首先对多量子比特  $W\bar{W}$  态在白噪声环境下的量子纠缠进行判定研究, 分别给出了真正纠缠和包含纠缠的白噪声占比判据. 研究表明, 随着量子体系粒子数目的增大, 判定多量子比特  $W\bar{W}$  态真正纠缠所需的条件变得越来越严格, 而判定其含有纠缠的条件变得相对宽松. 特别地, 对于 5 比特  $W\bar{W}$  态和 6 比特  $W\bar{W}$  态来说, 由于它们拆分结构态的量子 Fisher 信息最大值要比其本身的 QFI 大, 故无法严格地给出判定其真正多体纠缠的判据, 但我们给出了判定其可能是哪种纠缠结构的范围. 其次, 在 Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) 模型下<sup>[29]</sup>, 对多量子比特  $W\bar{W}$  态在白噪声环境下的纠缠分类进行了研究, 结果显示, 随着相互作用强度的增大, 即使是在白噪声占比很大的情况下 (局域操作下较难实现分类), 也可以实现不同量子比特  $W\bar{W}$  态的分类, 充分展现了非局域操作在纠缠分类方面的优势. 除此之外, 还解析地给出了在无噪声情况下, 多量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 随相互作用强度变化的转折点, 其变化趋势是先增大后减小.

## 2 理论模型

### 2.1 量子 Fisher 信息判定纠缠及其在白噪声模型下的表示

量子 Fisher 信息在量子计量和纠缠判定领域充当着非常重要的角色<sup>[5,30,31]</sup>, 不仅可以借助克拉美罗下界给出量子体系的测量精度理论极限<sup>[32]</sup>, 还可以实现对体系量子纠缠的判定和分类<sup>[14,33-35]</sup>. 一般地, 量子 Fisher 信息可以表示为<sup>[36]</sup>

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = 2 \sum_{i,j=1, i \neq j}^k \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \psi_i | \hat{H} | \psi_j \rangle|^2, \quad (5)$$

其中,  $\hat{\rho}_0$  是待测量子体系的密度矩阵, 其谱分解可以表示为  $\hat{\rho}_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ ;  $\hat{H}$  代表体系的哈密顿量, 即对体系实施的量子操控, 可以是局域操作也可以是非局域操作, 分别对应哈密顿量  $\hat{H}$  是否包含两体或多体相互作用<sup>[28]</sup>. 量子态  $\hat{\rho}_0$  在算符  $\hat{H}$  下的么正演化可以表示为  $\hat{\rho}_\theta = e^{-i\theta\hat{H}} \hat{\rho}_0 e^{i\theta\hat{H}}$ . 若量子体系为纯态, 则方程 (5) 可以约化为

$$F_Q = 4\Delta^2 \hat{H}, \quad (6)$$

即量子初态在哈密顿量  $\hat{H}$  下的方差. 借助待测量子态形式, 并操控哈密顿量就可以得到体系的 QFI.

鉴于量子 Fisher 信息可以表征量子体系在受到外界干扰后的变化速度这一性质, 意大利学者 Pezzè 和 Smerzi 教授<sup>[17]</sup> 在 2009 年提出可以用 QFI 来判定纠缠, 对于  $N$  量子比特组成的量子态, 当其 QFI 大于体系的量子比特数目  $N$  时, 体系含有量子纠缠, 即

$$F_Q > N. \quad (7)$$

另外, 他们也给出了判定体系含有真正多体纠缠的判据, 即  $N$  粒子态的 QFI 大于 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态的所有拆分直积态的次最大值时 (真正纠缠态的 QFI 最大), 可以判定真正多体纠缠<sup>[18]</sup>. GHZ 态的拆分直积态可定义为

$$|\psi_{p_i}^N\rangle = \bigotimes_{k=\{p_i\}} |\text{GHZ}_k\rangle, \quad (8)$$

其中,  $N$  代表多量子比特体系所含粒子的总数;  $p_i$  代表  $N$  个量子比特的整数拆分方式, 拆分态的形式为不同量子比特 GHZ 态的直积. 例如, 整数 5 的拆分方式有 7 种, 即  $p_i \in \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}$ . 若选择  $p_3 = \{32\}$ , 则  $|\psi_{p_3}^5\rangle = |\text{GHZ}_3\rangle \otimes$

$|\text{GHZ}_2\rangle$ . 对于多量子比特 GHZ 态来说, 判定  $N$  粒子真正纠缠的判据为  $F_Q > (N-1)^2 + 1$ , 即拆分直积态为  $N-1$  粒子 GHZ 态与单粒子态的直积的量子 Fisher 信息<sup>[18]</sup>.

借助此定义, 将 GHZ 态替换为  $W\bar{W}$  态, 则  $|\psi_{p_i}^N\rangle = \bigotimes_{k=\{p_i\}} |W\bar{W}_k\rangle$ , 3.1 节研究了多量子比特  $W\bar{W}$  态在白噪声下的纠缠判定. 在下面的研究中, 含有纠缠的判据为 (7) 式; 关于真正多体纠缠判据, 这里更加关注实验上产生多量子比特  $W\bar{W}$  态的纠缠判定, 所以提前知道所测量子态的部分信息, 故本文采用相对宽松的判据 (与 GHZ 态的真正纠缠判据相比), 即当多量子比特  $W\bar{W}$  态系统的 QFI 大于其所有拆分直积态的 QFI 的次最大值时, 可以判定其含有真正多体纠缠.

白噪声模型是量子测量中一种常见的、用来描述外界环境对量子体系产生随机干扰的模型<sup>[37,38]</sup>. 量子态在白噪声模型下的密度矩阵可以表示为<sup>[39]</sup>

$$\hat{\rho} = V|\phi\rangle\langle\phi| + \frac{(1-V)}{2^N} \mathbf{1}, \quad (9)$$

其中,  $V$  代表待测量子态  $|\phi\rangle$  的可见度,  $\mathbf{1}$  代表单位矩阵. 特别地, 当体系包含粒子数目  $N$  很大时,  $V$  也可以看作是量子态的保真度<sup>[40]</sup>. 将量子态在白噪声下的密度矩阵对角化以后, 代入方程 (5), 便可得到体系的量子 Fisher 信息表示为<sup>[18]</sup>

$$F_Q^{(V)} = \frac{2^{N-1}V^2}{1 + (2^{N-1} - 1)V} \cdot F_Q, \quad (10)$$

其中,  $F_Q$  是量子纯态在哈密顿量  $\hat{H}$  下的量子 Fisher 信息. 下面对多量子比特  $W\bar{W}$  态开展的纠缠判定与分类, 将主要围绕 (10) 式进行讨论分析.

### 2.2 相互作用环境下的量子 Fisher 信息计算

考虑操控量子体系的哈密顿量为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (11)$$

其中,  $\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \sigma_n^{(i)}$  代表集体局域操作;  $\hat{H}_1 = \sum_{i,j=1}^N \frac{V_{ij}}{4} \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}$  表示含有两体相互作用的非局域操作,  $\sigma_n^{(i)} = \sigma^{(i)} \cdot \vec{n}$  表示第  $i$  个量子比特在方向矢量  $\vec{n}$  下的泡利矩阵,  $V_{ij}$  则表示两量子比特间的相互作用强度. 在该相互作用环境下, 借助量子纯态的 QFI 计算公式, 即方程 (6), 可得

$$F_Q = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2, \quad (12)$$

其中,  $v_0^2 = 4\Delta^2 \hat{H}_0$  代表量子态在局域操作  $\hat{H}_0$  下的 QFI,  $v_1^2 = 4\Delta^2 \hat{H}_1$  代表量子态在两体相互作用的

非局域操作  $\hat{H}_1$  下的 QFI,  $v_2^2 = 4(\langle \{\hat{H}_0, \hat{H}_1\} \rangle - 2\langle \hat{H}_0 \rangle \langle \hat{H}_1 \rangle)$  则代表量子态在  $\hat{H}_0$  和  $\hat{H}_1$  下的协 QFI, 具体表达式为<sup>[22]</sup>

$$v_0^2 = \sum_{i=1}^N \left(1 - \langle \sigma_n^{(i)} \rangle^2\right) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \rangle \langle \sigma_n^{(j)} \rangle\right), \quad (13)$$

$$v_1^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{V_{ij}^2}{2} \left(1 - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle^2\right) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^N V_{ij} V_{jk} \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle\right) \\ + \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \neq j \neq k \neq l}}^N \frac{V_{ij} V_{kl}}{4} \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle\right), \quad (14)$$

$$v_2^2 = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V_{ij} \left(\langle \sigma_n^{(j)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(i)} \rangle\right) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^N V_{ij} \left(\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle - \langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle \langle \sigma_n^{(k)} \rangle\right). \quad (15)$$

一般地, 上述计算过程是复杂的, 但这里因为多量子比特  $W\bar{W}$  态具有很好的粒子交换对称性, 故只需要计算其中任一单量子比特的平均值  $\langle \sigma_n^{(i)} \rangle$  和任意组合的多量子比特的平均值  $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle$ ,  $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle$ ,  $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle$ , 将计算结果代入方程 (13)–方程 (15) 便可得到体系的 QFI.

### 3 数值结果

#### 3.1 白噪声环境下多量子比特 $W\bar{W}$ 态的纠缠判定

本节对含白噪声的  $W\bar{W}$  态在局域操作下的纠缠情况进行分析, 包括真正多体纠缠和含有纠缠两部分. 考虑操控量子体系的哈密顿量为  $\hat{H}_0$ , 则不同量子比特  $W\bar{W}$  态的量子 Fisher 信息可以用方程 (13) 计算得到. 假定泡利算符表示为  $\sigma_n^{(i)} = a\sigma_x^{(i)} + b\sigma_y^{(i)} + c\sigma_z^{(i)}$ , 且  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 很容易计算得到<sup>[22]</sup>:

$$\langle \sigma_n^{(i)} \rangle = \begin{cases} 2a/3, & N = 3, \\ 0, & N \neq 3, \end{cases} \quad (16)$$

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle = \begin{cases} a^2, & N = 4, \\ \frac{2 + (N-6)c^2}{N}, & N \neq 4, \end{cases} \quad (17)$$

这样,  $N$  量子比特  $W\bar{W}$  态 (除  $N = 4$  以外) 的 QFI

可以表示为

$$F_Q^{(N)} = 3N - 2 + (N-1)(N-6)c^2. \quad (18)$$

容易发现, 当粒子数目  $N < 7$  时, 最大 QFI 为  $F_Q^{(N)} = 3N - 2$ , 即  $c = 0$ ; 反之, 最大 QFI 为  $F_Q^{(N)} = (N-2)^2$ , 即  $c = 1$ . 而 4 量子比特  $W\bar{W}$  态的量子 Fisher 信息比较特殊, 其表示为

$$F_Q^{(4)} = 4 + 12a^2. \quad (19)$$

(19) 式可通过将 (16) 式和 (17) 式代入 (13) 式得到. 其最大值  $F_Q^{(4)} = 16$  亦可在条件  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  下得到, 这与 4 量子比特 GHZ 态的 QFI 一致. 借助白噪声下的 QFI 计算公式 (10), 可以得到含白噪声后多量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 为

$$F_Q^{(V)} = \begin{cases} \frac{2^{N-1}V^2}{1 + (2^{N-1} - 1)V} \cdot (3N - 2), & N < 7, \\ \frac{2^{N-1}V^2}{1 + (2^{N-1} - 1)V} \cdot 16, & N = 4, \\ \frac{2^{N-1}V^2}{1 + (2^{N-1} - 1)V} \cdot (N - 2)^2, & N \geq 7. \end{cases} \quad (20)$$

根据多体系统含有量子纠缠的判据表达式, 即方程 (7), 可以得到判定多量子比特  $W\bar{W}$  态在白噪声环境下含有纠缠的可见度判据为  $V > V_N^{\text{low}}$ ,  $V_N^{\text{low}}$  的表达式为

$$V_N^{\text{low}} = \begin{cases} \frac{2^N N - 2N + \sqrt{(2N - 2^N N)^2 + 8N(-2^{1+N} + 3 \cdot 2^N N)}}{2(-2^{1+N} + 3 \cdot 2^N N)}, & N < 7, \\ \frac{2^{-(N+1)}(2^N - 2 + \sqrt{(2 - 2^N)^2 + 2^{3+N} N})}{N}, & N = 4, \\ \frac{2^N N - 2N + \sqrt{(2N - 2^N N)^2 + 8N(2^{2+N} - 2^{2+N} N + 2^N N^2)}}{2(2^{2+N} - 2^{2+N} N + 2^N N^2)}, & N \geq 7. \end{cases} \quad (21)$$

对于3量子比特情况来说,其拆分直积态包含  $|W\bar{W}_3\rangle$ ,  $|W\bar{W}_2\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ ,  $|W\bar{W}_1\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$  三种情况,量子 Fisher 信息的次最大值为  $|W\bar{W}_2\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$  的 QFI, 根据直积态量子 Fisher 信息在局域操作下具有可加性,可以得到其 QFI 为  $F_Q^{\text{sub}3} = (3 \times 2 - 2) + 1 = 5$ , 当  $F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}3}$  时,便可判定体系含有真正多体纠缠,进一步得到可见度判据为  $V > V_3^{\text{high}}$ ,

$$V_3^{\text{high}} = \frac{1}{56}(15 + \sqrt{785}). \quad (22)$$

同理,对于4量子比特来说,其次最大 QFI 的拆分直积态为  $|W\bar{W}_3\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ ,  $F_Q^{\text{sub}4} = (3 \times 3 - 2) + 1$ , 得到4量子比特  $W\bar{W}$  态的真正多体纠缠判据为

$$V_4^{\text{high}} = \frac{1}{32}(7 + \sqrt{113}). \quad (23)$$

5, 6 量子比特  $W\bar{W}$  态的情况比较特殊,因为它们的拆分直积态包含4量子比特  $W\bar{W}$  态 ( $F_Q^{(4)} = 16$ ), 所以拆分直积态  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$  的 QFI 为 17, 大于真正多体纠缠态的值 ( $F_Q^{(5)} = 13$ ). 相较于真正多体纠缠态来说,其 QFI 的次最大拆分直积态为  $|W\bar{W}_3\rangle \otimes |W\bar{W}_2\rangle$ , 其 QFI 为  $F_Q^{\text{sub}5} = 11$ . 所以,当待测5量子比特  $W\bar{W}$  态体系的  $F_Q^{(V)} > F_Q^{(5)}$  时,体系包含纠缠态为  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ , 而当待测体系 QFI 介于二者之间,即  $F_Q^{(5)} > F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}5}$  时,我们无法确定所含纠缠态具体为哪一种,但缩小其范围为5量子比特  $W\bar{W}$  态,或拆分直积态  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ , 或二者混合. 图1中,空心圆点代表利用  $F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}5}$  给出的判据,

$$V_5^{\text{high}} = \frac{1}{416}(165 + \sqrt{36377}). \quad (24)$$

对于6量子比特来说,亦是如此,真正多体纠缠态的 QFI 为  $F_Q^{(6)} = 16$ , 而拆分直积态  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_2\rangle$  的 QFI 为 20, 拆分直积态  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$  的 QFI 为 18, 均大于真正多体纠缠态的 QFI. 所以,当待测体系的  $F_Q^{(V)} > 18$  时,可以判定

体系含有拆分直积态  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_2\rangle$ ; 而当  $20 > F_Q^{(V)} > 18$  时,无法确定含有哪一种,但缩小了可能的范围. 同样,以真正多体纠缠的 QFI 为准,则次最大 QFI 的拆分直积态为  $|W\bar{W}_5\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ , 其 QFI 为  $F_Q^{\text{sub}6} = 14$ . 利用  $16 > F_Q^{(V)} > 14$ , 我们无法确定体系含有的纠缠是哪一种,但缩小了范围,有可能是真正多体纠缠,或拆分直积态  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_2\rangle$ , 或  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ , 或者它们的混合. 图1中,第二个空心圆点代表利用  $F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}6}$  给出的判据,

$$V_6^{\text{high}} = \frac{1}{512}(217 + \sqrt{54257}). \quad (25)$$

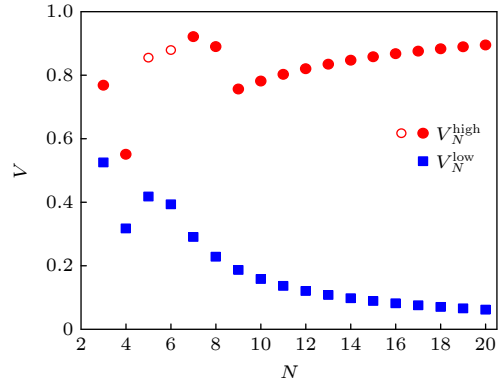


图1 在局域操作下,判定含白噪声的多量子比特  $W\bar{W}$  态是真正多体纠缠的判据与含有纠缠的判据随粒子数目  $N$  的变化情况. 红色圆点代表真正多体纠缠的可见度判据,其中5,6量子比特属于特殊情况,用空心圆点表示,代表无法确定真正多体纠缠判定,但缩小了可能的范围,详见文中叙述. 蓝色实心圆点代表含有纠缠的可见度判据

Fig. 1. The criteria for witnessing genuine multipartite entanglement and the presence of entanglement with respect to the number of qubits under local operations for multi-qubit  $W\bar{W}$  states in the white noise environment. Red solid dots represent the visibility criterion for genuine multipartite entanglement. The 5-qubit case and 6-qubit case are the special ones and represented by hollow red dots. For the both, it is impossible to witness the genuine multipartite entanglement, but the possible scope has been narrowed down, and the details can be found in the main context. Blue solid dots represent the visibility criterion for the presence of entanglement.

当待测体系的粒子数目  $N = 7$  时, 真正多体纠缠态的 QFI 为  $F_Q^{(7)} = 25$ , 而次最大 QFI 的拆分直积态为  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_3\rangle$ , QFI 为  $F_Q^{\text{sub}7} = 23$ . 利用  $F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}7}$ , 可以得到判据

$$V_7^{\text{high}} = \frac{1449 + \sqrt{2246801}}{3200}. \quad (26)$$

对于待测体系的粒子数目为  $N = 8$  时, 其真正纠缠态的 QFI 为  $F_Q^{(7)} = 36$ , 次最大 QFI 的拆分直

积态为  $|W\bar{W}_4\rangle \otimes |W\bar{W}_4\rangle$ , QFI 为  $F_Q^{\text{sub}8} = 32$ . 采用同样的办法,  $F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}8}$ , 得到判据

$$V_8^{\text{high}} = \frac{1}{288}(127 + \sqrt{16705}). \quad (27)$$

当待测体系的粒子数目  $N \geq 9$  时, 真正多体纠缠态的 QFI 为  $F_Q^{(N)} = (N - 2)^2$ , 而次最大 QFI 的拆分直积态形式均是  $|W\bar{W}_{N-1}\rangle \otimes |W\bar{W}_1\rangle$ , QFI 表示为  $F_Q^{\text{sub}N} = (N - 3)^2 + 1$ , 利用  $F_Q^{(V)} > F_Q^{\text{sub}N}$ , 可得

$$V_N^{\text{high}} = \frac{4}{2 - 2^N + \frac{\sqrt{(N^2 - 6N + 10)[4N^2 - 24N + 40 + 4^N(N^2 - 6N + 10) + 2^{2+N}(N^2 - 2N - 2)]}}{N^2 - 6N + 10}}. \quad (28)$$

为了更加直观地展示判定真正多量子比特  $W\bar{W}$  态纠缠和含有纠缠的可见度判据, 图 1 中用红色实心点代表真正多体纠缠判据, 即不同量子比特下的  $V_N^{\text{high}}$ ; 而蓝色实心点代表含有纠缠的判据, 即  $V_N^{\text{low}}$ . 需要注意的是, 对于 5, 6 量子比特的情况, 用红色空心点进行表示, 其仅仅给出了可能判定的纠缠态范围, 无法给出真正多体纠缠判据, 原因在本节前面的分析中已具体阐述, 这里不再赘述. 通过图示很容易发现, 随着待测体系粒子数目的增加, 想要判定真正多体纠缠的可见度判据变得更严苛, 即  $V$  越来越大, 而检测含有纠缠的条件变得相对宽松. 这也从侧面印证了实验上实现真正多体纠缠的要求越高, 对白噪声的占比要求越少.

### 3.2 含白噪声的多量子比特 $W\bar{W}$ 态在 LMG 模型下的纠缠分类

在含白噪声的环境下, 随着噪声占比的增加, 不同量子比特数目  $W\bar{W}$  态在局域操作下的量子 Fisher 信息会变小, 导致彼此之间的差值很小, 变得难以区分, 不利于进一步的科学研究, 而非局域操作通过相互作用强度调控会扩大彼此间的差值, 有益于纠缠分类研究<sup>[28]</sup>. 本节采用 LMG 模型对含噪声的多量子比特  $W\bar{W}$  态进行纠缠分类研究.

与前面局域操作类似, 假定泡利算符表示为  $\sigma_n^{(i)} = a\sigma_x^{(i)} + b\sigma_y^{(i)} + c\sigma_z^{(i)}$ , 且  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 考虑体系的哈密顿量为  $\hat{H}_0 + \hat{H}_1$ ,  $V_{ij} = \gamma$ , 利用 (12) 式, 计算得到 3 量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 表示为

$$F_{\text{img}}^{(3)} = \max_{a,b,c} [3 + 4b^2 - 2c^2 + (6a - 6ac^2)\gamma + (3 + 6c^2 - 9c^4)\gamma^2], \quad (29)$$

同理, 4 量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 可以表示为

$$F_{\text{img}}^{(4)} = \max_{b,c} [16 - 12b^2 - 12c^2 - 4(9b^4 - 9c^2 + 9c^4 + b^2(-9 + 6c^2))\gamma^2], \quad (30)$$

采用同样的方式, 分别得到了 5, 6 量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 表示为

$$F_{\text{img}}^{(5)} = \max_{a,b,c} [13 - 4c^2 - 24a(-1 + 4b^2 + c^2)\gamma + 2(9 + 38c^2 - 47c^4)\gamma^2], \quad (31)$$

$$F_{\text{img}}^{(6)} = \max_{b,c} [16 + 60[1 + 4b^4 + 2c^2 - 3c^4 + 4b^2(-1 + c^2)]\gamma^2]. \quad (32)$$

当粒子数目  $N \geq 7$  时, 单量子比特的平均值  $\langle \sigma_n^{(i)} \rangle$  和组合的多量子比特的平均值  $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle$ ,  $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle$ ,  $\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)} \rangle$  均可以找到一般的公式进行表示, 即

$$\langle \sigma_n^{(i)} \rangle = 0, i \in 1, \dots, N,$$

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \rangle = \frac{2}{N}(1 - c^2) + \frac{N - 4}{N}c^2, i \neq j,$$

$$i, j \in 1, \dots, N,$$

$$\langle \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \rangle = 0, i \neq j \neq k, i, j, k \in 1, \dots, 4,$$

$$\langle \sigma_n^{(1)} \sigma_n^{(2)} \sigma_n^{(3)} \sigma_n^{(4)} \rangle = \frac{12}{N}(1 - c^2)c^2 + \frac{N - 8}{N}c^4,$$

将上述代入 (12) 式, 可以得到  $N$  量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 为

$$F_{\text{lmg}}^{(N)} = \max_c [3N - 2 + (N - 6)(N - 1)c^2 + \frac{1}{2}(1 - c^2)(N - 1)\{3N - 6 + c^2[42 + N(-29 + 6N)]\}\gamma^2]. \quad (33)$$

进一步对 (33) 式进行分析可得,

$$F_{\text{lmg}}^{(N)} = \begin{cases} (N - 2)^2, & \gamma \leq \gamma_t, \\ \frac{60 + N\{N[55 + N(3N - 19)] - 80\}}{42 + N(6N - 29)} + \frac{(N - 6)^2(N - 1)}{2[42 + N(6N - 29)]\gamma^2} \\ + \frac{(N - 1)[18 + N(3N - 13)]^2\gamma^2}{2[42 + N(6N - 29)]}, & \gamma \geq \gamma_t. \end{cases} \quad (34)$$

这里, 转折点  $\gamma_t$  可以表示为

$$\gamma_t^{(N)} = \frac{\sqrt{N - 6}}{\sqrt{3N^2 - 13N + 18}}, \quad (35)$$

特别地, 当粒子数目较大时,  $\gamma_t \simeq 1/\sqrt{3N}$ .

为了方便与随后含噪声情况下不同量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 对比, 图 2 给出了不含噪声情况下  $W\bar{W}$  态的 QFI 随相互作用强度  $\gamma$  的变化情况. 如图 2(a) 所示, 当相互作用强度较小时, 4 量子比特  $W\bar{W}$  态和 5 量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 有交叉, 但随着相互作用强度的增大, 二者变得可以区分. 另外, 当粒子数目较大时, 不同量子比特数目的 QFI 随相互作用强度的变化均出现了平台区域, 这也意味着较小的相互作用强度不会影响体系 QFI 的变化, 这一点与文献 [22] 中给出的结果一致. 图 2(b) 给出了转折点  $\gamma_t$  随粒子数目  $N$  的变化情况 (蓝色圆点), 发现当粒子数  $N = 10$  时, 其值出现了最大值  $\gamma_t^{(10)} = 1/\sqrt{47}$ , 随后变得越来越小, 趋近于  $1/\sqrt{3N}$ , 如红色实线所示.

借助白噪声下量子态 Fisher 信息的计算公式 ((10) 式), 可以得到含噪声多量子比特  $W\bar{W}$  态在 LMG 模型下的量子 Fisher 信息表示为

$$F_{\text{lmg}}^{(V_N)} = \frac{2^{N-1}V^2}{1 + (2^{N-1} - 1)V} \cdot F_{\text{lmg}}^{(N)}. \quad (36)$$

图 3 给出了多量子比特  $W\bar{W}$  态在不同噪声环境情况下随相互作用强度  $\gamma$  的变化情况. 图 3(a) 展示的结果表示不同多量子比特态 ( $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ) 在噪声环境较差 ( $V = 0.1$ ) 时的 QFI 随相互作用强度  $\gamma$  的变化. 容易看出, 当相互作用强度较小, 或无相互作用 ( $\gamma = 0$ ) 时, 不同量子比特的 QFI 差值很小, 很难进行区分. 但通过调控相互作用强度  $\gamma$  变大, 比如  $\gamma = 2$  时, 不同量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 可以实现纠缠区分. 随着噪声环境变好,  $V = 0.3, 0.6, 0.9$  (图 3(b)—(d)) 时, 可以在较小的相互作用强度下实现不同量子比特  $W\bar{W}$  态的区分. 这一点也充分展示了非局域操作在实现多量子比特纠缠态在噪声环境下纠缠分类的优势.

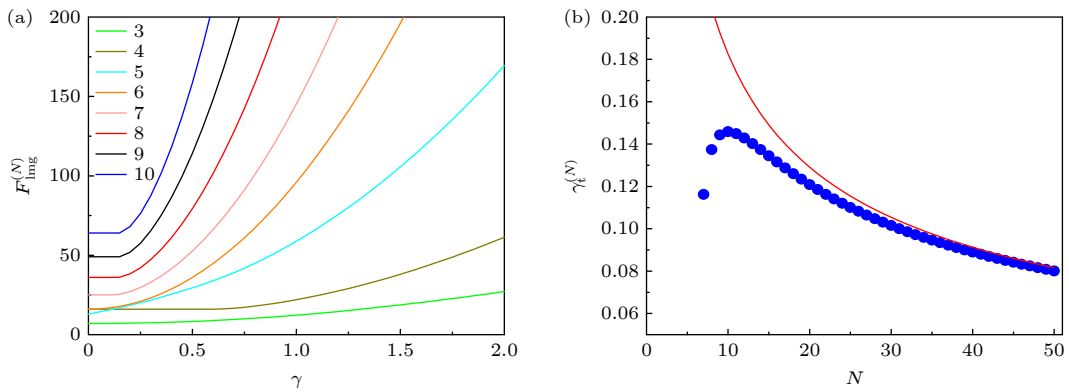


图 2 (a) 不同颜色的实线 (绿色到蓝色) 从下到上依次表示 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 量子比特  $W\bar{W}$  态的量子 Fisher 信息  $F_{\text{lmg}}^{(N)}$  在无噪声情况下随相互作用强度  $\gamma$  的变化情况; (b) 蓝色实心圆点表示转折点  $\gamma_t^{(N)}$  随粒子数目  $N$  的变化情况, 红色实线代表  $\gamma_t \simeq 1/\sqrt{3N}$

Fig. 2. (a) The colorful solid lines (from green to blue) respectively represent the variations of the QFI of the  $W\bar{W}$  state with 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 qubits, with respect to the interaction strength  $\gamma$  in the absence of noise; (b) the blue dots represent the variation of the turning point  $\gamma_t^{(N)}$  with respect to the number of qubits, and the red line represents  $\gamma_t \simeq 1/\sqrt{3N}$ .

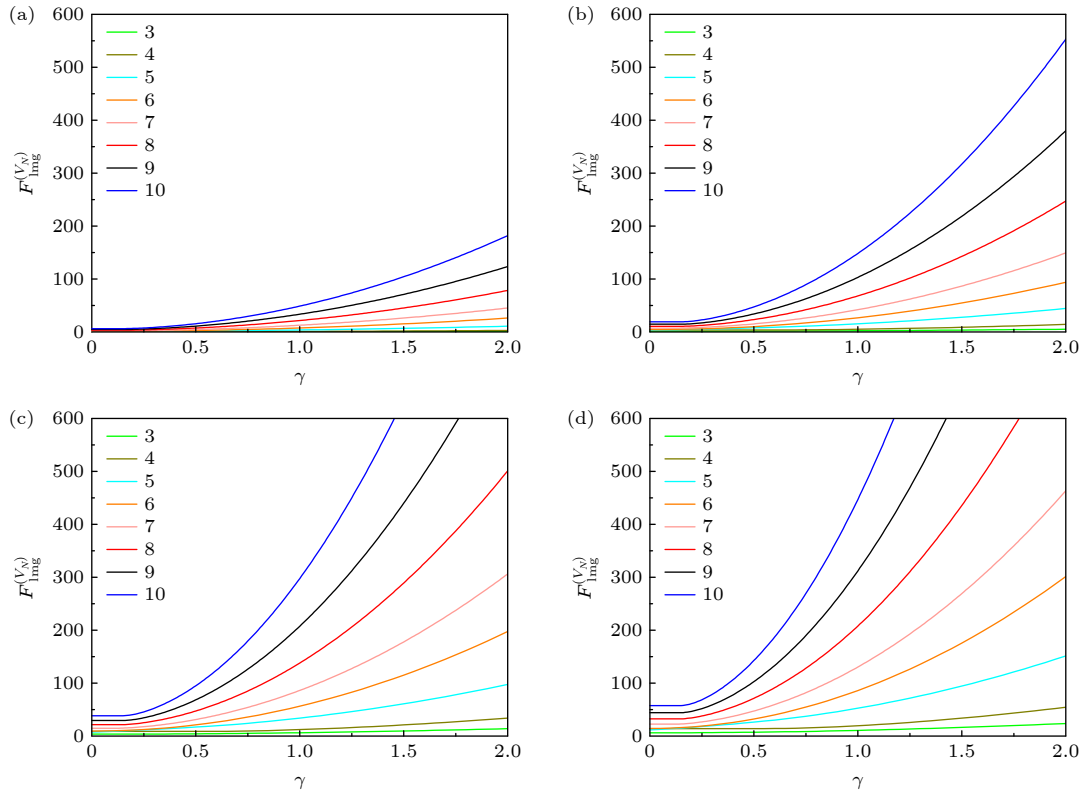


图 3 (a), (b), (c), (d) 分别表示多量子比特  $W\bar{W}$  态在噪声环境  $V = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$  下的量子 Fisher 信息随相互作用强度  $\gamma$  的变化. 以 (d) 为例, 不同颜色的实线 (绿色到蓝色) 从下到上依次代表 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 的变化情况. Fig. 3. (a), (b), (c), (d) Quantum Fisher information of an  $N$ -qubit  $W\bar{W}$  state with respect to  $\gamma$  under the white noise situation  $V = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$ , respectively. Taking panel (d) as an example, the colorful solid lines (green to blue) from bottom to top respectively denote the variation trends of QFI from 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10-qubit  $W\bar{W}$  state.

## 4 结论

本文利用量子 Fisher 信息可以判定多体纠缠的性质, 对多量子比特  $W\bar{W}$  态在白噪声环境下的纠缠特性进行了判定和分类研究. 在局域操作下, 通过计算含噪声多量子比特  $W\bar{W}$  态的 QFI, 给出了真正多体纠缠和含有纠缠的可见度判据, 发现随着待测体系所含量子比特数目的增大, 判定其真正多体纠缠的可见度判据要求越来越高, 即  $V$  越大, 换句话说, 保真度要求越来越高, 而判定其含有纠缠的判据变得相对宽松. 特别地, 对于 5 量子比特和 6 量子比特来说, 由于其拆分量子态的 QFI 比真正多体纠缠态的 QFI 还大, 所以没有找到真正的多体纠缠判据, 但缩小了可能的范围. 在 LMG 非局域操作下, 对不同量子比特含白噪声的  $W\bar{W}$  态开展了纠缠分类研究, 通过对相互作用强度的调控, 解决了其在局域操作下无法区分或区分难度较大的问题, 展现了非局域操作在纠缠分类方面的优势. 此外, 在无噪声情况下, 解析地找到了多量子

比特  $W\bar{W}$  态的 QFI 随相互作用强度变化的转折点, 其变化特点是先增大后减小, 这一点或许对开展量子信息研究的其他方面有一定的帮助.

## 参考文献

- [1] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Fan H 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 060302 (in Chinese) [范桁 2018 物理学报 **67** 060302]
- [3] Sheng Y B, Zhou L, Long G L 2022 *Sci. Bull.* **67** 367
- [4] Athena K, Alasdair F, Gaetana S, Stefano P 2024 *Rep. Prog. Phys.* **87** 094001
- [5] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [6] Pezzè L, Smerzi A 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 210503
- [7] Göel E O, Siegner U 2015 *Quantum Metrology: Foundation of Units and Measurements* (Weinheim: Wiley-VCH)
- [8] Gühne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
- [9] Pezzè L, Li Y, Li W D, Smerzi A 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **113** 11459
- [10] Lu H, Zhao Q, Li Z D, Yin X F, Yuan X, Hung J C, Chen L K, Li L, Liu N L, Peng C Z, Liang Y C, Ma X F, Chen Y A, Pan J W 2018 *Phys. Rev. X* **8** 021072
- [11] Ren Z H, Li W D, Smerzi A, Gessner M 2021 *Phys. Rev. Lett.*

126 080502

- [12] Friis N, Vitagliano G, Malik M, Huber M 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 72
- [13] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Moore F L, Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6797
- [14] Strobel H, Muessel W, Linnemann D, Zibold T, Hume D B, Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K 2014 *Science* **345** 424
- [15] Sperling J, Vogel W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 110503
- [16] Barreiro J T, Bancal J D, Schindler P, Nigg D, Hennrich M, Monz T, Gisin N, Blatt R 2013 *Nat. Phys.* **9** 559
- [17] Pezzè L, Smerzi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100401
- [18] Hyllus P, Laskowski W, Krischek R, Schwemmer C, Wiecek W, Weinfurter H, Pezzè L, Smerzi A 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022321
- [19] Das D, Dogra S, Dorai K, Arvind 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022307
- [20] Sudha, Usha Devi A R, Rajagopal A K, 2012 *Phys. Rev. A* **85** 012103
- [21] Usha Devi A R, Sudha, Rajagopal A K 2011 *Quantum Inf. Process.* **11** 685
- [22] Li Y, Ren Z H 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012403
- [23] Ren Z H, Li Y 2023 *Results in Physics* **53** 106954
- [24] Zou Y Q, Wu L N, Liu Q, Luo X Y, Guo S F, Cao J H, Tey M K, You L 2018 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **115** 6381
- [25] Manoj K J, Christian K, Rick V B, Florian K, Torsten V Z, Rainer B, Christian F R, Peter Z 2023 *Nature* **624** 539
- [26] Pratt J S, Eberly J H 2001 *Phys. Rev. B* **64** 195314
- [27] Parrado-Rodríguez P, Ryan-Anderson C, Bermudez A, Müller M 2021 *Quantum* **5** 487
- [28] Li Y, Ren Z H 2022 *Physica A* **596** 127137
- [29] Lipkin H J, Meshkov N, Glick A 1965 *Nucl. Phys.* **62** 188
- [30] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta. Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [31] Huang J H, Zhuang M, Lee C H 2024 *Appl. Phys. Rev.* **11** 031302
- [32] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland)
- [33] Bohnet J G, Sawyer B C, Britton J W, Wall M L, Rey A M, Foss-Feig M, Bollinger J J 2016 *Science* **352** 1297
- [34] Hauke P, Heyl M, Tagliacozzo L, Zoller P 2016 *Nat. Phys.* **12** 778
- [35] Liu R, Wu Z, Li Y C, Chen Y Q, Peng X H 2023 *Acta. Phys. Sin.* **72** 110305 (in Chinese) [刘然, 吴泽, 李宇晨, 陈昱全, 彭新华 2023 物理学报 **72** 110305]
- [36] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [37] Werner R F 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4277
- [38] Wiesław L, Tamás V, Marcin W 2015 *J. Phys. A* **48** 465301
- [39] Li Y, Li P F 2020 *Phys. Lett. A* **384** 126413
- [40] Dorner U 2012 *New J. Phys.* **14** 043011

# Quantum entanglement detection and classification of multipartite $W\bar{W}$ state under the white noise environment\*

LI Yan<sup>1)2)3)†</sup> REN Zhihong<sup>4)</sup>

1) (*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)

2) (*Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)

3) (*Shanxi Key Laboratory of Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Jinzhong 030619, China*)

4) (*School of Physics and Information Engineering, Shanxi Normal University, Taiyuan 030031, China*)

( Received 24 February 2025; revised manuscript received 16 August 2025 )

## Abstract

Entanglement detection and classification of multipartite systems remain the key topics in the field of quantum information and science. In this work, we take advantage of the nature that quantum Fisher information (QFI) can witness multipartite entanglement to comprehensively investigate the entanglement detection and classification of multi-qubit  $W\bar{W}$  states immersed in a white noise environment. In the situation of local operation, by combining the information of the known quantum state, we have presented a criterion with visibility for witnessing the genuine multipartite entanglement and another for identifying the presence of quantum entanglement. Specifically, with respect to the 5-qubit  $W\bar{W}$  state and 6-qubit  $W\bar{W}$  state, due to the fact that the maximum QFI of their splitting-structure states exceeds that of the original states, it is infeasible to strictly establish a criterion for detecting the genuine multipartite entanglement. However, we delineate the scope for inferring the possible entanglement structures. Furthermore, it is found that as the number of qubits increases, the conditions for witnessing the genuine multipartite entanglement become increasingly strict, while those for detecting the existence of entanglement grow relatively more relaxed. Taking into account the likelihood of the crosstalk between neighboring qubits during the local operations on the multipartite systems in experiments, we employ the Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) model to explore the entanglement classification of diverse multi-qubit multipartite states. It is found that with the increasing interaction strength, even for the strong white noise, the  $W\bar{W}$  states can still be distinguished, thereby resolving the challenge of managing the entanglement classification under local operation. Besides, as the interaction strength continues to increase, the task of entanglement classification becomes more straightforward. This fully shows the superiority of nonlocal operations over local operations in the aspect of entanglement classification.

**Keywords:** entanglement detection, quantum Fisher information, multi-qubit  $W\bar{W}$  state, Lipkin-Meshkov-Glick model

**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ud, 42.50.Lc

**DOI:** [10.7498/aps.74.20250221](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250221)

**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250221](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250221)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12305024, 12205176, 92365116), the Applied Basic Research Program of Shanxi Province, China (Grant Nos. 202203021212193, 202103021223251), and the Young Academic Leaders of Higher Learning Institutions of Shanxi Province, China (Grant No. 2024Q035).

† Corresponding author. E-mail: [li8989971@163.com](mailto:li8989971@163.com)



多量子比特 $W\bar{W}$ 态在白噪声环境下的纠缠判定与分类

李岩 任志红

Quantum entanglement detection and classification of multipartite  $W\bar{W}$  state under the white noise environment

LI Yan REN Zhihong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 190301 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250221

CSTR: 32037.14.aps.74.20250221

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250221>

当期内容 View table of contents: <https://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

多量子比特 $WV$ 纠缠态在Lipkin–Meshkov–Glick模型下的量子Fisher信息

Quantum Fisher information of multi-qubit  $WV$  entangled state under Lipkin–Meshkov–Glick model

物理学报. 2023, 72(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231179>

低横动量介子在强子气体中的分布

Distribution of low- in hadron gas

物理学报. 2023, 72(19): 192501 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230990>

反应量子波包动力学研究

Quantum dynamics studies of the reaction

物理学报. 2022, 71(22): 228201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221155>

分子离子,  $\text{和态的不透明度}$

Molecular opacities of ,  $A^2\Pi_u$  and states of nitrogen cation

物理学报. 2022, 71(19): 193101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220734>

含自旋-轨道耦合的光谱常数计算

Calculation of spectroscopic constants with spin-orbit coupling

物理学报. 2025, 74(2): 023101 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241435>

低能高电荷态离子与Al表面作用产生的X射线

X-ray emission produced by interaction of slow highly charged ions with Al surfaces

物理学报. 2021, 70(19): 193201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210757>