

封面文章

拓扑选择性非厄米趋肤效应*

杨星¹⁾²⁾ 刘梦蛟¹⁾²⁾ 侯佳浩¹⁾²⁾ 李添悦¹⁾²⁾ 王黎明^{1)2)†}

1) (南京大学物理学院, 固体微结构国家重点实验室, 南京 210093)

2) (南京大学, 人工微结构科学与技术协同创新中心, 南京 210093)

(2025年4月22日收到; 2025年5月4日收到修改稿)

拓扑边界态因在带隙中的鲁棒性和无损耗的传输特性备受关注,但在复杂系统中实现其稳定激发仍是一个挑战.本文提出了一种利用亚对称性保护的边界态与长程非互易耦合系数,实现具有拓扑选择性的非厄米趋肤效应(non-Hermitian skin effect, NHSE)的方法.该方法能够选择性地对平庸体态施加非厄米趋肤效应,同时保持拓扑边界态不受影响,从而实现拓扑模式与体态模式在空间上的有效分离,并在能带密集的系统实现鲁棒的边界态激发.此外,本文将该模型扩展到二维体系,实现了角态与体态模式的有效分离.通过紧束缚模型进行理论预测,分析了该模型中非厄米效应对能谱和趋肤性质的调控机制,并利用有限元仿真在光学耦合环中验证了这一机制的可行性,研究了非厄米趋肤效应的本征态特性,并实现了拓扑态的鲁棒激发.该机制将非厄米物理与拓扑光子学相结合,为提升光子系统中信号的稳定性提供了新的思路与方向.

关键词: 拓扑光子学, 非厄米趋肤效应, 光学耦合环**PACS:** 42.70.Qs, 78.67.Pt, 42.25.-p, 71.20.-b**DOI:** 10.7498/aps.74.20250526**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250526

1 引言

SSH(Su-Schrieffer-Heeger)模型^[1]是一种具有手性对称性的紧束缚理论模型,在光学拓扑绝缘体^[2-11]中有着重要的地位.模型元胞内外具有相互交替的跃迁系数,当胞外耦合大于胞内耦合时,SSH模型处于拓扑非平庸态,边界上存在受拓扑保护的拓扑边界态,同时二维高阶拓展SSH模型支持高阶拓扑角态^[12-16].近年来的研究表明^[17],系统的拓扑边界态并不总是严格依赖于体边对应关系(bulk boundary correspondence, BBC),而是具有一定的容错性.即便在拓扑不变量无法表征拓扑态,或者无法良好定义时,系统只要保持部分对称性(晶格位点中的对称性,又称为亚对称性),仍然可以支持稳定的拓扑边界态.这类边界态被称为

亚对称性保护的拓扑边界态^[17],在SSH模型中,它表现为 B_n 和 B_{n+1} 位点之间的耦合不会影响 A 位点的拓扑态,其中 B_n, B_{n+1} 表示第 $n, n+1$ 个元胞的 B 位点.在SSH模型中引入非厄米耦合系数后,对应的物理性质不再能简单地通过厄米哈密顿量描述.非厄米系统的物理性质需要用非厄米的哈密顿量^[18-20]进行描述.在具有非互易耦合的非厄米系统中存在非厄米趋肤效应^[21],这些系统在周期边界条件下具有非对称的概率流,而在开放边界条件(open boundary condition, OBC)下,系统的能带与周期边界条件(periodic boundary condition, PBC)下的能带存在显著差异^[21-23].此时,非对称概率流使得所有模式都会局域化到边界的某一侧,形成趋肤效应,其方向与非互易耦合强的方向相同.该效应对系统的拓扑模式具有一定的调控作用^[24-30],不同的趋肤强度和方向可以增强或

* 国家重点基础研究发展计划(批准号:2022YFA1404300)、国家自然科学基金(批准号:12325411, 62288101, 11774162)、江苏省自然科学基金(批准号:BK20233001)和江苏省重点研发计划(批准号:BG2024029)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangshuming@nju.edu.cn

削弱拓扑模式的局域程度^[26,31,32], 或者调控体态模式的空间模式, 使其集中在一个边界^[33].

然而, 由于非长程耦合的非厄米趋肤效应本身缺乏选择性, 系统中的所有模式都受到同向或者反向的趋肤效应调制^[22,34], 在 NHSE 的作用下, 拓扑模式无法与体态模式区分, 对特定的拓扑模式无精细调控的能力. 这一局限性源于非互易耦合跃迁系数的引入方式, 即直接在紧束缚耦合模型最近邻位点之间引入非互易耦合系数, 从而使得所有模式都受到趋肤效应的影响. 因此, 在实现对系统能带中特定拓扑模式的精准控制方面^[35], 普通非厄米趋肤效应仍存在不足. 受亚对称性保护的拓扑边界态启发, 我们在 SSH 紧束缚模型中巧妙地引入非厄米耦合, 保护了系统 A 点的亚对称性 (即保护 A 点处的耦合不受破坏^[17]), 构建了一个新型非厄米 SSH 模型, 第一次实现了对拓扑模式具有选择

性的非厄米趋肤效应, 我们称之为拓扑选择性非厄米趋肤效应, 同时研究了不同长程耦合系数对于拓扑选择性非厄米趋肤效应的调节作用, 并且利用此效应分离了拓扑模式与体态模式, 降低了它们的模式匹配度, 从而使得拓扑模式的激发与传播受到更小的干扰.

2 选择性非厄米趋肤效应模型

本文提出的拓扑选择性非厄米趋肤效应紧束缚模型如图 1(a) 所示, 模型中, 红色圆表示 A 位点, 黄色圆表示 B 位点, 直线表示耦合系数, 箭头方向表示耦合方向. A 和 B 两个位点组成一个元胞. 该系统的哈密顿量如下:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{ik} \\ t_1 + t_2 e^{-ik} & 2t_3 \cos(k) - 2i\gamma \sin(k) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

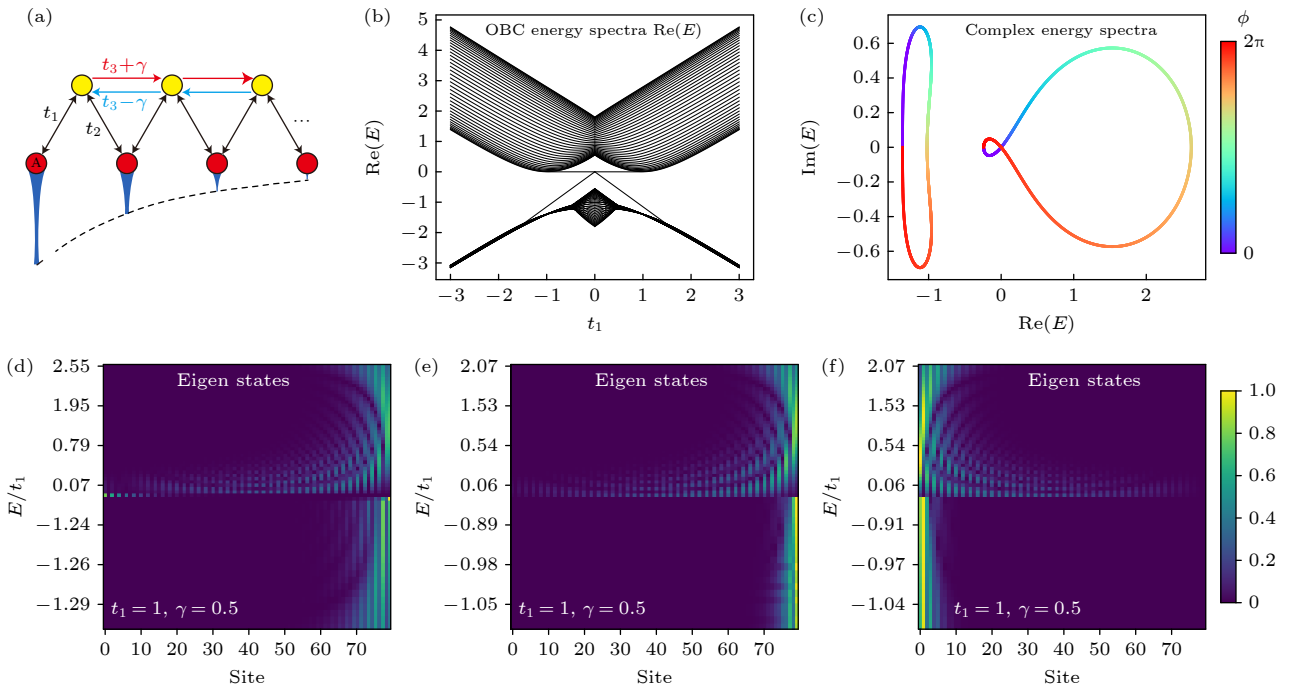


图 1 (a) 系统的紧束缚耦合示意图, 红色/黄色为 A/B 位点, 耦合系数为 t_1, t_2, t_3, γ , 箭头表示具有方向的耦合系数; (b) 系统的实能量分布随 t_1 的变化图; (c) 系统的复能量分布, 颜色的变化代表 Bloch 动量相位 (ϕ) 的变化; (d) 具有选择性非厄米趋肤效应的模式图, 横坐标为位点, 纵坐标为实能量, 白字标示了耦合参数大小; (e) 无拓扑模式非厄米趋肤效应的模式图, 横坐标为位点, 纵坐标为实能量, 白字标示了耦合参数大小; (f) 具有反方向非厄米趋肤效应的模式图, 横坐标为位点, 纵坐标为实能量, 白字标示了耦合参数大小

Fig. 1. (a) Schematic diagram of the system's tight-binding couplings. Red/yellow dots represent A/B sites, and the coupling coefficients are t_1, t_2, t_3 , and γ . Arrows indicate direction-dependent coupling. (b) Plot of the system's real energy spectrum as t_1 changes from -3 to 3 . (c) System's complex energy spectrum. The color gradient indicates the variation of the Bloch momentum phase (ϕ). (d) Mode distribution exhibiting topological selective non-Hermitian skin effect, white text denotes coupling coefficients. The horizontal axis represents site index, and the vertical axis represents real energy. (e) Mode distribution under non-Hermitian skin effect without topological modes. The horizontal axis represents site index, and the vertical axis represents real energy, white text denotes coupling coefficients. (f) Mode distribution exhibiting reverse non-Hermitian skin effect. The horizontal axis represents site index, and the vertical axis represents real energy, white text denotes coupling coefficients.

哈密顿量与 SSH 模型的区别在于不同的 B 和 B 耦合项. 跃迁系数 t_1 , t_2 , t_3 和 γ 分别表示 A 和 B 间、 B 和 A 间、 B 和 B 间的耦合强度, B 和 B 之间的长程耦合具有非互易强度 γ . 当胞内的耦合强度 (t_1) 小于胞外的耦合强度 (t_2) 时, 该模型支持一个鲁棒的边界模式 (由虚线和蓝色阴影标识, 又见附录 A1.5 节), 其仅局域在 A 位点, 并呈指数衰减形式局域于系统的左边界, 而图 1(b) 则展示了固定 $t_2 = 1$, t_1 参数不断变化的过程中系统实能量的变化情况. 可以看出, 当 $t_1 < t_2$ 时, 在能谱中出现了一条稳定的零能模式 (图 1(d)), 这表明了系统处于拓扑态, 且长程非互易耦合系数的加入并未破坏它的稳定性. 同时体模式局域在系统的右边界 (见图 1(d)). 引入非互易跃迁后, 系统的前向跃迁系数和后向跃迁系数不再相等, 打破了 \mathcal{PT} 对称性^[18,19], 导致系统的能带不再是实数, 系统的复能带发生显著变化 (图 1(c)). 由于长程非互易跃迁, 在开放边界的系统中会出现非厄米趋肤效应, 同时长程耦合破坏了 SSH 模型原本的体边对应关系^[36,37]. 值得注意的是, 尽管模型引入了非互易跃迁, 由于亚对称性的保护, A 位点上的拓扑模式仍保持稳定 (图 1(d)), 并未受到影响, 本文将这种现象称为拓扑选择性非厄米趋肤效应. 系统的复能谱如图 1(c) 所示, 展示了其本征复能量随 Bloch 动量 k (从 0 到 2π 对应颜色由蓝到红) 的变化情况, 复能带分为两个分离的绕行曲线. 系统受到了非互易耦合的影响, 图 1(e) 表示系统在 $t_1 > t_2$ 的情况下, A 位点处不再能够支撑拓扑模式, 但体态仍然具有 NHSE, 而图 1(f) 通过更改非互易耦合强度 γ 的符号将非互易的方向更改, 使得发生 NHSE 的方向发生了改变, 体态模式集中在系统的左边. 为了进一步研究系统的能谱性质并揭示耦合系数对于 NHSE 的调制作用, 需要考察系统的复能态演变.

在固定跃迁系数 t_1, t_2 和 γ 的数值不变的条件下, 考察了在 $t_3 = 0.4, 0.59, 0.8$ 时位点个数为 40 的有限边界系统的复能带及本征态分布. 它们分别对应三种不同的非厄米趋肤相. 具体来看, 当 $t_3 = 0.4$ 时, 系统的本征态分布显示出明显的非厄米趋肤效应. 系统复能带呈现出双圆 (图 2(a)), 同时伴有局域于左侧开放边界的零能模式 (图 2(d)); 而当能量较高时, 由于 B_n 和 B_{n+1} 之间的长程非互易耦合, 实能量为正的本征态趋向于集中于系统右侧, 形成明显的向右趋肤效应 (图 2(d)). 同时,

零能态以外的其他体态模式则受 B_n 和 B_{n+1} 长程非互易耦合影响而主要局域于系统左侧, 从而在整体上形成左右相反的模式趋肤, 即拓扑选择性非厄米趋肤效应. 图 2(a) 中, 左侧圆圈随 Bloch 动量变化呈现逆时针旋转, 而右侧圆圈则表现为向左旋转, 两者在零能点处分界 (对应的能级分别成为上能级与下能级), 分别对应于向右和向左的趋肤效应; $t_3 = 0.59$ 附近, 系统进入模式转换的临界状态. 原本左侧呈逆时针旋转的圆发生了自身穿越 (图 2(b)), 逐渐缩减为一条几乎没有面积的圆弧, 失去了清晰的旋向定义; 与此同时, 左侧对应的本征态如图 2(e) 显示, 上部仍保持向右的趋肤, 而低于零能态的体态趋肤效应几乎完全消失, 原本向左趋肤的特征不再明显, 系统呈现出较为均匀的空间分布. 这表明, 在 t_3 调控下, 零能以下的模式 (下能级) 经历了从左侧 NHSE 到无 NHSE 的相变过程, 而由于右侧圆弧仍保有固定的旋向, 系统上能级保持稳定的向右非厄米趋肤效应, 与能带分布图 (图 2(b)) 形成了对应; $t_3 = 0.8$ 时, t_3 超过了相变点, 系统的能带图开始恢复到原始形态 (图 2(c)), 但左侧圆圈在 Bloch 动量空间中绕出的轨迹发生了旋向反转, 从而改变了系统的非厄米趋肤方向. 与此同时, 右侧圆圈的旋向保持不变, 增加了少量向另外一个方向旋转的小圆. 整体来看, 系统上部本征态始终保持向右的非厄米趋肤效应 (图 2(f)), 而下部趋肤效应方向则经历了由左局域向无局域再向右局域的变化, 这充分展示了 t_3 控制下的非厄米相变过程对能带和本征态分布的调控能力. 为了理解 NHSE 以及其受到的 t_3 的调节现象, 本文应用非厄米趋肤效应的广义布里渊区 (generalized Brillouin zone, GBZ) 理论^[21,38,39] 来分析其本征态, 该理论通过将 Bloch 动量扩展到复域, 使用 $\beta = re^{ik}$ 的方式描述非厄米趋肤效应, 其中 r 为一个实数, 三种不同参数的 GBZ 展示在图 2(g), 图 2(h), 图 2(i) 中, 其中的红色圆圈为单位圆. 文中 GBZ 的计算方式是通过结式 (resultant)^[39] 的计算方法实现的, GBZ 上面的每一点 (β) 为开放边界系统的一个本征态, 其上对应的 β 的物理意义为每个本征态以 β^z 的趋势在有限晶格上收缩或者扩张, 其中 z 为位点的标号, 所有开放边界本征态的 β 值组成了 GBZ. 当 $|\beta| = 1$, 即一个系统的 GBZ 为一个简单的单位圆的时候, 系统每个模式将不会具有非厄米趋肤效应, 在 β 为其他值的时候, 系统

将会明显地出现趋肤的趋势, 并且趋肤强度也会随着 $|\beta|$ 的大小变化而变化. β 的物理意义为趋肤强度的大小与方向, 对于图 2(g), 系统能级上不同的 β 计算出来的系统 GBZ 有两个不同的圆圈, 分别对应于 SSH 系统中的上能级与下能级, 两个圆圈与单位圆的相对大小预示着不同方向的趋肤效应, 图 2(g) 中, 一个 GBZ 处于单位圆之下, 而另外一个 GBZ 处于单位圆之上, 由此, 将会出现一部分能带趋肤效应向左, 一部分能带趋肤效应向右的情况, 而这样的情况在图 2(d) 中有对应, 在图 2(h) 中, 原本小于单位圆的 GBZ 逐渐靠拢并趋近单位圆,

从而使得下能级的系统本征态的非厄米趋肤效应丢失. 图 2(i) 中, 两个能级的 GBZ 都表现出了大于单位圆的情况, 这表示所有能级都具有向右非厄米趋肤效应, 同时在三个 GBZ 图中都可以看到, GBZ 处有一点 $|\beta| = 1$ (在图 2(g), 图 2(h) 和图 2(i) 中标记为红星), 这一点来自于系统的零能态. 在整个调节过程中, 它都稳定地存在, 也正如本征态 (图 2(d), 图 2(e), 图 2(f)) 局域的模式所示, 展示出了非厄米趋肤效应的选择性, 非厄米趋肤效应将不会对零能态产生影响, 但会对其他模式产生影响. 需要指出的是, 零能态与非厄米趋肤效应的

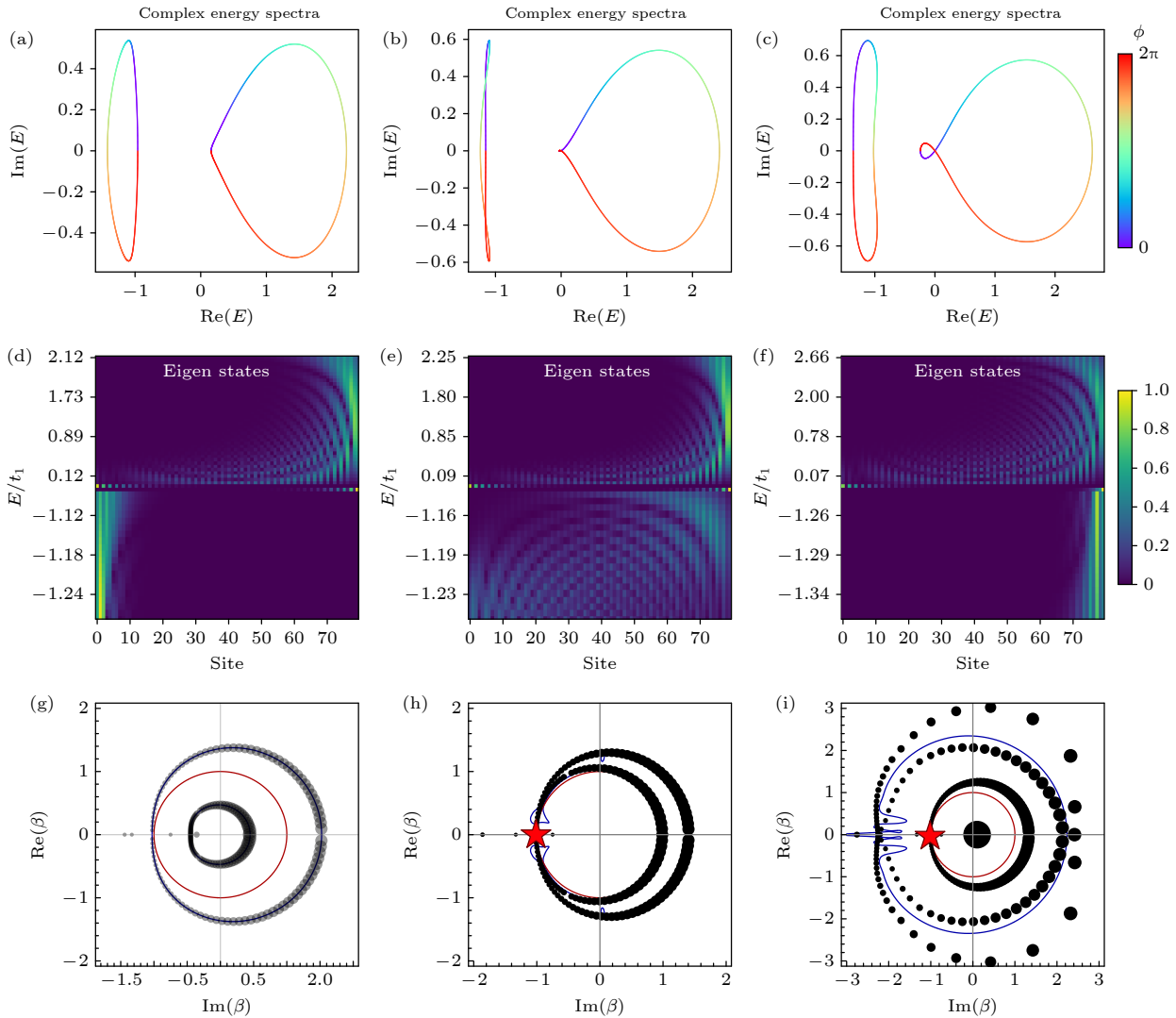


图 2 (a), (d), (g) $t_3 = 0.4$ 时的能带, 本征态分布和 GBZ, (a) 横坐标/纵坐标分别为实/虚能量, 颜色图标代表 Bloch 动量的相位 ϕ , (d) 横坐标/纵坐标为位点/能量, 颜色图标代表模式振幅, (g) 横坐标/纵坐标为虚/实 β , 灰色小球代表有限模型 ($n = 100$) 计算出的 GBZ, 红星处 $\beta = 1$; (b), (e), (h) $t_3 = 0.59$ 时的能带, 本征态分布和 GBZ; (c), (f), (i) $t_3 = 0.8$ 时的能带, 本征态分布和 GBZ
 Fig. 2. (a), (d), (g) Energy bands, eigenstate and GBZ at $t_3 = 0.4$. In (a), the horizontal(vertical) axes is real (imaginary) parts of eigen energy, color bar indicates the phase of the Bloch momentum. In (d), the horizontal axis is the site index, the vertical axis is the energy, and the color bar represents the mode amplitude. In (g), the horizontal (vertical) axes is real (imaginary) parts of β , gray dots means GBZ calculated from finite model ($n = 100$), the red star means where $\beta = 1$. (b), (e), (h) Energy bands, eigenstate distribution and GBZ at $t_3 = 0.59$. (c), (f), (i) Energy bands, eigenstate distribution and GBZ at $t_3 = 0.8$.

本征态都具有指数局域在系统边界的特性,但是他们局域的物理根源分别来自拓扑边界态与非厄米趋肤效应.也正是利用这两种不同的机制,我们得以实现拓扑选择性的非厄米趋肤效应.

3 亚对称性趋肤效应耦合环仿真

在有限元仿真软件中,利用光学耦合环的回音壁模式^[40,41]的耦合模拟紧束缚模型.在光学系统中仿真实现拓扑选择性非厄米趋肤效应,其中光学耦合环分为位点环和耦合环.由于回音壁模式的旋向具有左旋向以及右旋向,环上的模式通过倏逝波进行模式之间的耦合,其耦合强度与耦合环与位点环之间的距离成反比.系统耦合示意图如图3(a)所示,不同的大小的耦合环互相交替组合,较大的环为位点环,他们上面能支撑具有自旋自由度的耦合回音壁模式^[3,5,42],并且两个位点环之间的模式通过较小的耦合环之间相互作用.由于倏逝波进行模式耦合的机制,场强越强的模式耦合越强,因此距离越近的耦合环之间的耦合强度越强,耦合系数越大.红色的位点环代表着系统的 A 位点,黄色的位点环代表着系统的 B 位点,其中灰色的耦合环表示平凡的耦合系数,他们具有不同的大小. $A \rightarrow B$ 之间的耦合环的半径要大于 $B \rightarrow A$ 之间的耦合环的半径,因此 $A \rightarrow B$ 之间位点的耦合要小于 $B \rightarrow A$ 之间的耦合,即 $t_1 < t_2$,那么此时的耦合环系统处于常见的 SSH 模型中的拓扑平庸态.同时 B 位点之间存在耦合环用来实现长程非互易耦合作用,此耦合环引入了 B_n 和 B_{n+1} 之间的长程耦合,加入了非互易跃迁系数的调制.具体实现过程如下:如图3(a),耦合环被分为上下两个部分,其中上半部分(标记为紫色区域)掺杂了增益介质,使得复折射率的虚部为正,而下半部分(标记为蓝色部分)掺杂了损耗介质,使得复折射率虚部为负.系统的回音壁模式在耦合过程中受到上下增益与损耗介质的调控,模式的振幅增强或者减弱,导致不同方向上的耦合系数大小不同,从而产生耦合系数的非互易性.以左旋模式为例,假设在 B 位点处激发了左旋模式(图3(a)中蓝色箭头),左旋回音壁模式由于模式传播特性,只能通过耦合环的上半部分传播,而由于该部分是增益介质,左旋模式通过耦合环向右传播时会受到增益影响,使耦合场强增大,耦合系数增大.在第二个 B 位点处,左旋模式向右传播时只能通过耦合环的下半部分(蓝色部

分),其中掺杂了损耗介质,从而导致耦合系数减小.因此,对于左旋模式, B_n 和 B_{n+1} 耦合环的增益与损耗配置导致了它们之间的非互易耦合系数,并在系统中引入了向右的非厄米趋肤效应.需要注意,对于右旋模式,增益与损耗的效果将会反向,导致趋肤方向相反.左旋与右旋模式在相同增益/损耗配置下体验到反方向的非互易耦合系数.此模型有限元仿真中的复能带如图3(b)所示,其中 x 轴为实频率, y 轴为复频率.随着 Bloch 动量的变化在复平面上形成了一个双圆的分布,与理论模型图1(c)符合.有限开放边界($n = 10$)模型的能带如图3(c)所示:红星代表了具有拓扑保护的零能态,由于回音壁模式存在左旋和右旋的旋向,所以具有两个红星.拓扑模式(图3(f))的模式强度主要局域在 A 位点,虽然由于系统的有限尺寸,部分模式泄漏到 B 位点,但与 A 位点的模式强度相比,可以忽略不计.为了验证系统模式的体态受到的非厄米趋肤调制,以及所激发拓扑模式的鲁棒性,本文进行了拓扑模式的激发仿真:通过外部入射频率处于体态频率的导模,可以有效激发体态模式.由于系统的非厄米调控作用产生的趋肤效应,该模式在边界处发生局域化,图3(d)和图3(e)展示了系统中左旋模式的趋肤效应,由于图3(d)中的系统与图3(e)中的系统具有相反的增益-损耗分布,使得左旋模式在两个系统中的非厄米趋肤方向相反.因此当反转非互易设计方向时,左旋模式局域方向也随之反转.而外部入射频率处于拓扑模式的频率时,在 A 位点入射耦合的外部导模会激发系统的拓扑态,局域在 A 位点(图3(g)),在空间上与图3(e)中受到趋肤效应拉到系统右侧的体态模式呈现出分离的趋势.

选择性非厄米趋肤效应不仅适用于一维拓扑系统,在更高维的拓扑系统中,也同样可以通过非厄米调制实现拓扑模式的选择性分离.本文构建了一个如图4(a)所示的二维 SSH 模型,其中位点环之间同样通过耦合环连接,并且耦合强度在不同方向上呈现交替变化.定义耦合系数 t_1, t_2 (见图4(d)),一个元胞内部包含四个位点,这四个位点之间分别具有 $t_{1x}, t_{2x}, t_{1y}, t_{2y}$ 的耦合系数,其中 x 和 y 分别表示 x 轴和 y 轴上的耦合方向,而下标 1, 2 表示不同大小的耦合系数.当边界耦合强度小于二维 SSH 模型内部耦合强度时($t_{1x(y)} < t_{2x(y)}$),这种二维 SSH 模型能支撑受拓扑保护的稳定零能角态(见图4(b)).为了实现选择性的二维非厄米趋肤效

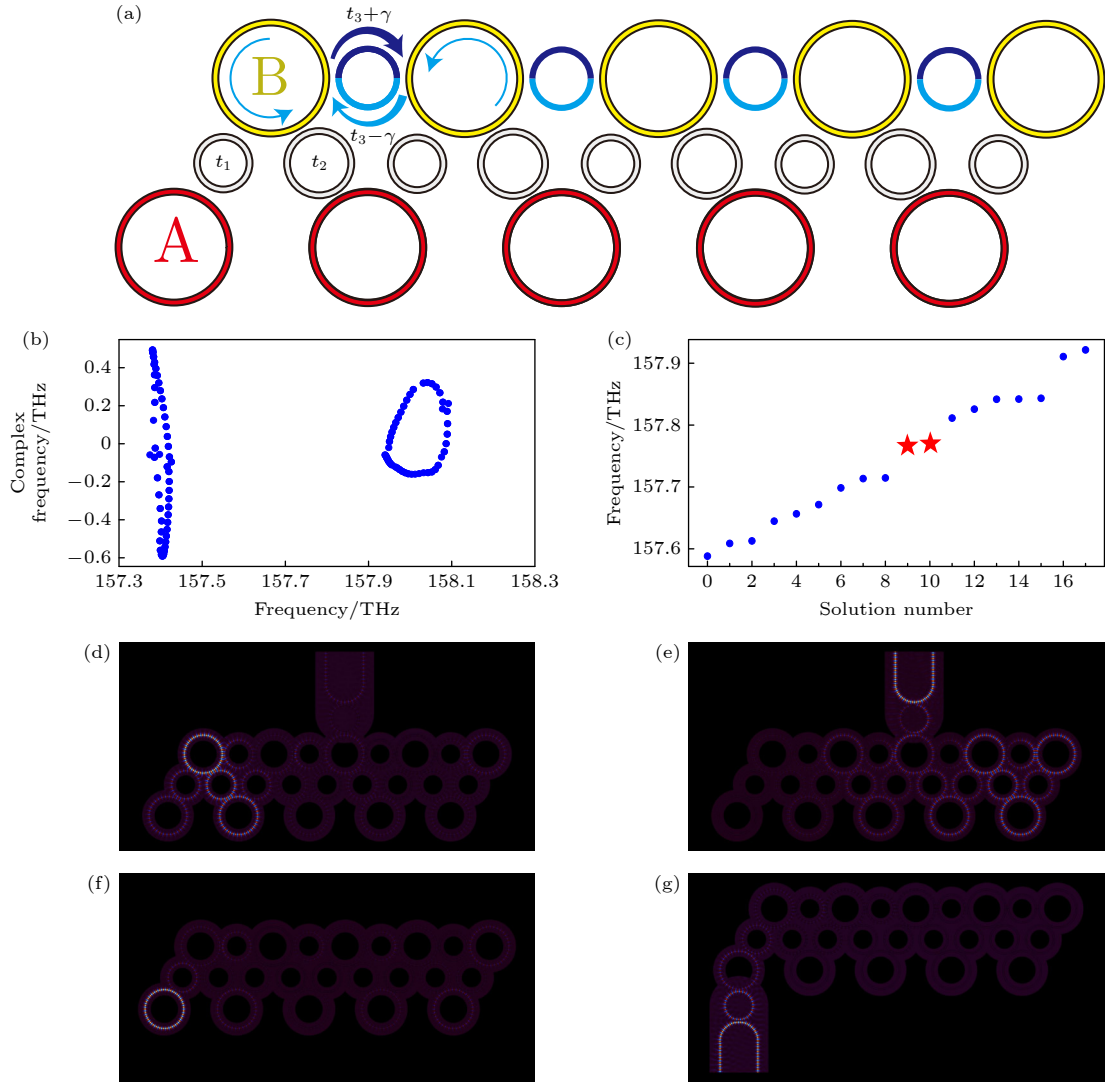


图 3 (a) 耦合环示意图; (b) 有限元仿真的周期行边界复能带, x 轴为实频率, y 轴为复频率; (c) 有限元仿真的开放边界能带 ($n = 10$), x 轴为解数, y 轴为实频率, 红色五角星代表拓扑态; (d) 有限元仿真的向左的 NHSE; (e) 有限元仿真的向右的 NHSE; (f) 有限元仿真中的拓扑模式; (g) 在特定位点上激发的拓扑模式

Fig. 3. (a) Schematic diagram of the coupling rings; (b) complex energy band of finite element simulation under periodic boundary condition; (c) real energy band of finite element simulation under open boundary condition ($n = 10$), the red star denotes topological states; (d) leftward non-Hermitian skin effect (NHSE) from finite element simulation; (e) rightward non-Hermitian skin effect (NHSE) from finite element simulation; (f) topological mode in the finite element simulation; (g) excited topological mode.

应, 将具有亚对称性保护的互易耦合引入到模型中 (图 4(d)). 红色与蓝色的箭头分别表示具有非互易性的耦合系数, 红色代表大的耦合系数 $t_3 + \gamma$, 蓝色的箭头代表小的耦合系数 $t_3 - \gamma$, 这种耦合环耦合系数的非互易性通过耦合半环上的增益和损耗机制引入, 从而形成了非厄米的哈密顿量. 由于此非互易耦合只耦合 B, C, D 三个位点, 不会破坏 A 点处的耦合亚对称性, 因此不打破 A 位点上的稳定零能态. 这里特殊设计非互易耦合方向, 使得体态模式趋肤在与拓扑模式局域角反向的角. 如图 4(e) 所示, 系统的非零能态模式在非厄米趋肤

效应的作用下趋肤到右上角. 拓扑模式在空间上与体态模式具有巨大的分离, 计算整个非厄米二维 (2D) SSH 模型 (17×17) 在位点 0 (拓扑角态所处系统角位置, 见图 4(a) 中红色位点) 和位点 288 (拓扑角态对角位置, 见图 4(a) 中的蓝色位点, 示意图未展示所有位点) 的复平面局域态密度 (local density of states, LDOS), 其物理意义为, 局域在某个位点处的复能谱密度, 结果分别如图 4(c) 和图 4(f) 所示, 其中 x 轴代表实能量, 而 y 轴代表复能量, 白星代表热力图的极值. 从 LDOS 分布可以看出, 角态模式的零能量密度局域在实能量 0 处,

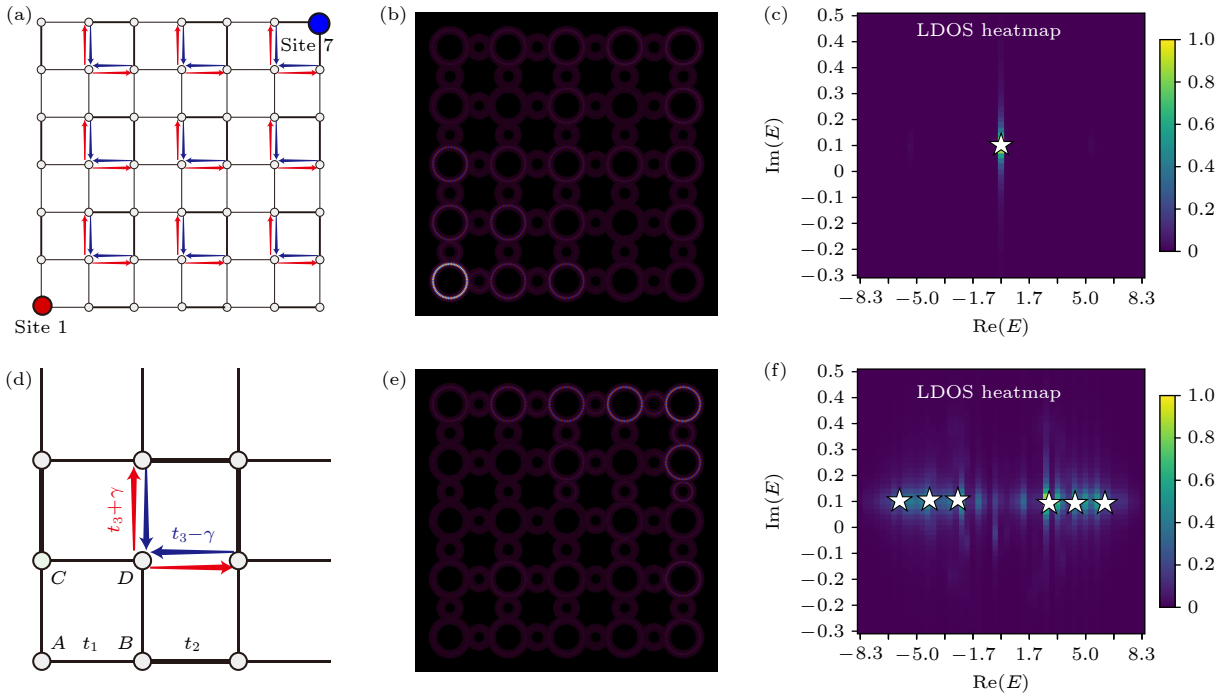


图 4 (a) 2 维高阶 SSH 模型示意图; (b) 非互易耦合环中的二维高阶拓扑态; (c) 位点 0 处的复平面 LDOS; (d) 二维模型的放大示意图; (e) B, C, D 三个位点非互易耦合导致的体态非厄米效应; (f) 位点 288 处的复平面 LDOS

Fig. 4. (a) schematic diagram of the 2D higher-order SSH model. (b) 2D higher-order topological state in the presence of non-reciprocal coupling rings. (c) complex plane LDOS at finite slab site 0. (d) enlarged unit cell schematic of the 2D model. (e) non-Hermitian skin effect on bulk states induced by non-reciprocal coupling among sites B, C , and D . (f) complex plane LDOS at site 288.

表示零能模式强烈地局域在系统的位点 0 处, 在位点 288 处 LDOS 呈现出分布到非零能量区间的现象, 出现了多个白星, 表明在零能外的模式在 288 处具有大量的模式密度, 大量体模式因为非厄米趋肤效应局域在 288 处, 显示出体态与边界态的强烈分离. 本文通过非厄米调控, 将选择性非厄米调控体态的思想引入到了二维系统, 实现了二维晶格中体态模式的有效操控, 同时有效地实现了角态模式与体态模式的空间分离.

4 结论与讨论

本文提出了一种基于亚手性对称性保护的选择性非厄米趋肤效应调控机制, 在一维和二维 SSH 模型中实现了对拓扑边界态与体态模式的空间分离与独立调控. 通过引入具有非互易性的长程耦合构建非厄米哈密顿量, 理论上分析了该系统在不同参数调节下的复能谱演化与本征态分布特性, 揭示了其非厄米相变过程. 特别地, 发现该系统中拓扑边界态可在不受非厄米扰动影响的前提下保持稳定, 而非拓扑体态则表现出显著的非厄米趋肤特性. 该选择性 NHSE 机制为解决传统 NHSE 无

差别作用于所有模式的局限性提供了有效方案. 此外, 将该机制拓展至二维高阶 SSH 体系, 并利用有限元仿真验证了角态的稳定激发与体态的可控局域. 进一步地, 通过改变非互易耦合方向与强度, 实现了体态的趋肤方向反转以及角态与体态的空间解耦, 证实了该方法在复杂系统中对拓扑态的精细调控能力. 展望未来, 选择性非厄米趋肤效应为非厄米拓扑物理与光子器件设计的融合开辟了新路径. 该机制具有高度的可移植性, 利用动态的可编程非厄米器件^[30,43], 有望应用于高密度光子通信、低损耗信号传输与模式转换滤波^[44]等领域.

附录 A1

A1.1 LDOS 计算方法

LDOS 的计算方法参考了格林函数的方法^[45,46], 对于一个有限的 $n \times m$ 的晶格, 晶格上位点 l 处的局域态密度按照下面的方式计算:

$$\rho_l(\epsilon_r, \epsilon_i) = \frac{1}{N} \sum_n \epsilon(\epsilon_r - \text{Re}[E_n]) \delta(\epsilon_i - \text{Im}[E_n]) \times |\langle l | \psi_n^R \rangle|^2 \langle \psi_n^L | l \rangle, \quad (\text{A1})$$

其中 $\rho_l(\epsilon_r, \epsilon_i)$ 表示在点位 l 处能量为 $\epsilon_r + i\epsilon_i$ 的局域态密度, N 为晶格的总位点数, $|\psi_n^R\rangle$ 与 $|\psi_n^L\rangle$ 分别是 $n \times m$ 晶格的非

厄米哈密顿量的本征态与厄米共轭的本征态, 他们的能量分别为 E_n, E_n^* , $\langle l|$ 与 $|l\rangle$ 分别是晶格的位点 l 的左右本征态, δ 为狄拉克函数. 在计算中, δ 近似为 $\delta(x, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)}$, γ 为调整 δ 函数展宽的参数, 在计算中适量选取.

A1.2 仿真细节

光学回音壁模式的耦合环仿真使用 COMSOL® 的 ewfd 模块以及 ewbe 模块, 分别进行本征态求解与激发态仿真, 计算的频率在 158 THz 左右, 其中使用的耦合环介质为 $n = 2.5$, 外围包层介质为 $n = 1.5$. 仿真得到的电场局域在空气中的模式使用 COMSOL® 的 Combine Solution 节点处理, 通过对比介质与包层的电场积分大小, 滤去空气模式, 得到了回音壁模式的非本征态. 在 ewbe 入射激发模式中, 通过设置入射端口与出射端口的相对位置实现左旋和右旋模式的调整. 端口传播的导模是通过数值端口计算得出的, 所有环的半径相同为 $0.4 \mu\text{m}$. 半径分别为位点环 $5 \mu\text{m}$, 耦合环 $2.5 \mu\text{m}$, 其中耦合环在两个位点环中心连接的中点上.

A1.3 光学耦合环本征能带

光学耦合环系统的本征能带通过计算出本征态再筛去空气态得到, 由于自由光谱程, 呈现出能级带隙与能带的交替, 本文选取 158 THz 附近的能带 (图 A1(b)), 可知该能带类似于 SSH 模型, 具有中心的拓扑模式, 其中 157.7 THz 模式为局域在 A 点的拓扑模式.

A1.4 二维趋肤分离效果展示

二维 (2D) 模式下因为维度的增加, 模式间模式匹配可在空间上实现最大化, 利用文中提到的耦合模型, 可将零能态与模式的体态完全分离在系统的两个角上面. 随便选取体态的三个模式, 他们由于受到了选择性非厄米趋肤效应的影响, 将局域在系统的右上角附近, 如图 A2(c)、图 A2(d) 和图 A2(e) 所示. 而对于零能态模式, 将会局域在系统的左下角, 如图 A2(b) 所示, 这样的分离效果使得体态与拓扑模式完全分离, 实现了二维模式下对于体态的选择性调控. 而从图 A2(a) 的能带可以看出, 能带具有红色的零能态.

A1.5 SSH 模型中零能模式与拓扑性质

通过亚对称性保护的研究^[17]了解到, SSH 模型中拓扑模式的保护, 即 $B_n \rightarrow B_{n+1}(B_{n+1} \rightarrow B_n)$ 的耦合系数为 $t_3 + \gamma(t_3 - \gamma)$, 对于 A 来说, 加入长程耦合后其感受到的跃迁系数并没有变化.

将哈密顿量写成厄米哈密顿量与非厄米哈密顿量的和:

$$\mathbf{H}(k) = \mathbf{H}_{\text{SSH}} + \mathbf{H}_{\text{NH}},$$

其中

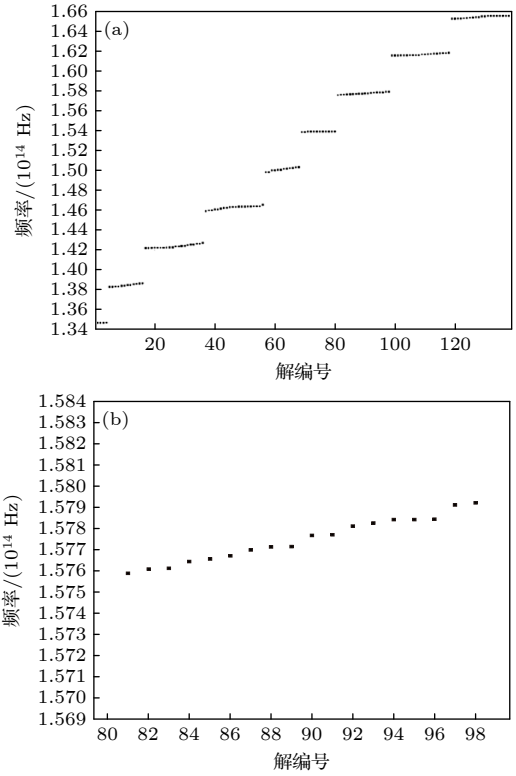


图 A1 (a) 光学耦合环系统的本征能带; (b) 本文选取光学耦合环系统的本征能带

Fig. A1. (a) Eigenenergy band of the optical coupling ring system; (b) enlarged chosen eigenenergy band of the optical coupling ring system.

$$\mathbf{H}_{\text{SSH}} = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2 e^{ik} \\ t_1 + t_2 e^{-ik} & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$\mathbf{H}_{\text{NH}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (t_3 + \gamma) e^{ik} + (t_3 - \gamma) e^{-ik} \end{pmatrix}.$$

\mathbf{H}_{SSH} 为 SSH 模型的哈密顿量, \mathbf{H}_{NH} 为非厄米哈密顿量, SSH 模型在 $t_1 < t_2$ 的时候具有哈密顿量, N 个位点的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \sum_n (t_1 |n, B\rangle \langle n, A| + \text{h.c.}) + \sum_n^{N-1} (t_2 |n+1, A\rangle \\ & \times \langle n, B| + \text{h.c.}) + \sum_n^{N-1} ((t_3 + \gamma) |n+1, B\rangle \\ & \times \langle n, B| + (t_3 - \gamma) |n, B\rangle \langle n+1, B|), \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

其中 N 为晶格的大小, A 与 B 分别代表晶格的两个位点, t_1, t_2, t_3, γ 为耦合系数, 零能模式的求解为

$$\mathbf{H} \sum_n a_n |n, A\rangle + b_n |n, B\rangle = 0,$$

其中 a_n, b_n 为零能模式对应的系数, $|n, A\rangle$ 为第 n 个元胞 A 位点的本征态, $|n, B\rangle$ 为对应的 B 位点的本征态.

$$\begin{aligned} t_1 a_n + a_{n+1} t_2 + b_{n+1} (t_3 - \gamma) + b_{n-1} (t_3 + \gamma) = 0, \\ n \in (2, N-1), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

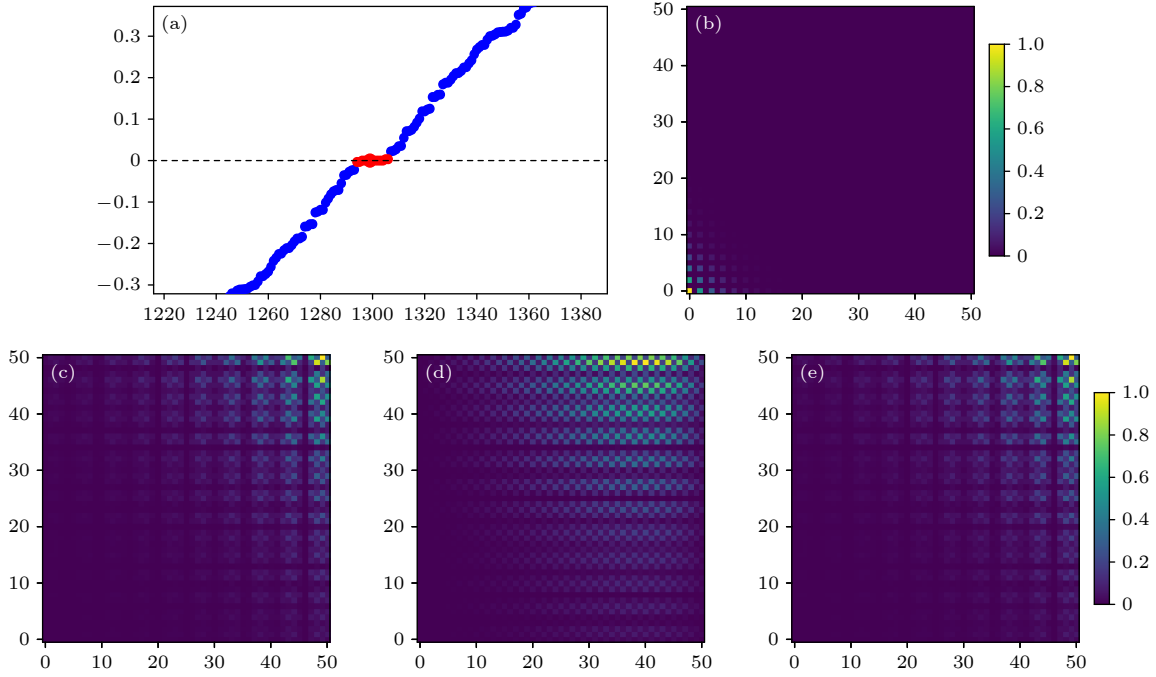


图 A2 (a) 2D 选择性非互易趋肤效应 SSH 模型的本征能带, 红色表示零能模式; (b) 2D 选择性模式中不受影响的零能模式; (c) 2D 选择性非互易趋肤效应 SSH 模型的代表本征态之一; (d) 2D 选择性非互易趋肤效应 SSH 模型的代表本征态之二; (e) 2D 选择性非互易趋肤效应 SSH 模型的代表本征态之三

Fig. A2. (a) Eigenenergy band of the 2D selective non-reciprocal skin effect SSH model, red denote zero energy mode; (b) 2D topological mode not affected by the selective skin effect; (c) representative eigenstate 1 of the 2D selective non-reciprocal skin; (d) representative eigenstate 2 of the 2D selective non-reciprocal skin; (e) representative eigenstate 3 of the 2D selective non-reciprocal skin.

$$b_n t_2 + b_{n+1} t_1 = 0, \quad n \in (1, N-1), \quad (\text{A4})$$

$$b_2(t_3 - \gamma) + t_1 a_1 + a_2 t_2 = 0, \quad (\text{A5})$$

$$a_N t_1 + b_{N-1}(t_3 + \gamma) = 0, \quad (\text{A6})$$

$$b_1 = 0. \quad (\text{A7})$$

严格的求解为没有意义的零能解: $a_n = b_n = 0$. 但是在热力学极限下 $N \rightarrow \infty$ 可以有近似解. $a_N = a_1(t_1/t_2)^{N-1}$. 由于 B 位点的耦合关系, 其无法解出类似的零能态. 由此可知, A 点零能态为在 A 点处指数衰减的局域态, 并且其局域的性质与 t_1/t_2 有关, 只要 $t_1 < t_2$, 其零能态就会在 A 点局域, 所以可以将 t_1/t_2 作为 A 点零能模式的拓扑指标.

参考文献

- [1] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [2] Wang Z, Chong Y, Joannopoulos J D, Soljačić M 2009 *Nature* **461** 772
- [3] Hafezi M, Demler E A, Lukin M D, Taylor J M 2011 *Nat. Phys.* **7** 907
- [4] Fang K, Yu Z, Fan S 2012 *Nat. Photonics* **6** 782
- [5] Hafezi M, Mittal S, Fan J, Migdall A, Taylor J M 2013 *Nat. Photonics* **7** 1001
- [6] Khanikaev A B, Hossein Mousavi S, Tse W K, Kargarian M, MacDonald A H, Shvets G 2013 *Nat. Mater.* **12** 233
- [7] Wu L H, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 223901
- [8] Ma T, Shvets G 2016 *New J. Phys.* **18** 025012
- [9] Wang Z Y, Chen F J, Xi X, Gao Z, Yang Y H 2024 *Acta Phys. Sin.* **73** 064201 (in Chinese) [王子尧, 陈福家, 郗翔, 高振, 杨怡豪 2024 *物理学报* **73** 064201]
- [10] Wang H F, Xie B Y, Zhan P, Lu M H, Chen Y F 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 224206 (in Chinese) [王洪飞, 解碧野, 詹鹏, 卢明辉, 陈延峰 2019 *物理学报* **68** 224206]
- [11] Sun X C, He C, Lu M H, Chen Y F 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 224203 (in Chinese) [孙晓晨, 何程, 卢明辉, 陈延峰 2017 *物理学报* **66** 224203]
- [12] Xie B, Wang H X, Zhang X, Zhan P, Jiang J H, Lu M, Chen Y 2021 *Nat. Rev. Phys.* **3** 520
- [13] Benalcazar W A, Noh J, Wang M, Huang S, Chen K P, Rechtsman M C 2022 *Phys. Rev. B* **105** 195129
- [14] Wang Q, Xue H, Zhang B, Chong Y 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 243602
- [15] Hu J R, Kong P, Bi R G, Deng K, Zhao H P 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 054301 (in Chinese) [胡军容, 孔鹏, 毕仁贵, 邓科, 赵鹤平 2022 *物理学报* **71** 054301]
- [16] Yan Z B 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 226101 (in Chinese) [严忠波 2019 *物理学报* **68** 226101]
- [17] Wang Z, Wang X, Hu Z, et al. 2023 *Nat. Phys.* **19** 992
- [18] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [19] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [20] Bender C, Boettcher S, Meisinger P 1999 *J. Math. Phys.* **40** 2201
- [21] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [22] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [23] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801

- [24] Song W, Sun W, Chen C, Song Q, Xiao S, Zhu S, Li T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 165701
- [25] Li Y, Liang C, Wang C, Lu C, Liu Y C 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 223903
- [26] Wang W, Wang X, Ma G 2022 *Nature* **608** 50
- [27] Zhu W, Gong J 2022 *Phys. Rev. B* **106** 035425
- [28] Liu G G, Mandal S, Zhou P, Xi X, Banerjee R, Hu Y H, Wei M, Wang M, Wang Q, Gao Z, Chen H, Yang Y, Chong Y, Zhang B 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 113802
- [29] Song W, Lin Z, Ji J, Sun J, Chen C, Wu S, Huang C, Yuan L, Zhu S, Li T 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 143801
- [30] Chen J, Shi A, Peng Y, Peng P, Liu J 2024 *Chin. Phys. Lett.* **41** 037103
- [31] Martinez Alvarez V M, Barrios Vargas J E, Foa Torres L E F 2018 *Phys. Rev. B* **97** 121401
- [32] Pan M, Zhao H, Miao P, Longhi S, Feng L 2018 *Nat. Commun.* **9** 1308
- [33] Huang Q K L, Liu Y K, Cao P C, Zhu X F, Li Y 2023 *Chin. Phys. Lett.* **40** 106601
- [34] Leykam D, Bliokh K Y, Huang C, Chong Y, Nori F 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 040401
- [35] Liu X, Lin Z, Song W, Sun J, Huang C, Wu S, Xiao X, Xin H, Zhu S, Li T 2024 *Phys. Rev. Lett.* **132** 016601
- [36] Jackiw R, Rebbi C 1976 *Phys. Rev. D* **13** 3398
- [37] Qi X L, Wu Y S, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. B* **74** 045125
- [38] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [39] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
- [40] Wang Z, Wang X, Li A, Zhang K, Ji Y, Zhong M 2023 *Chin. Phys. B* **32** 064207
- [41] Chen Y T, Wang J W, Chen W J, Xu J 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 154206 (in Chinese) [陈云天, 王经纬, 陈伟锦, 徐竞 2020 物理学报 **69** 154206]
- [42] Ozawa T, Price H M, Amo A, Goldman N, Hafezi M, Lu L, Rechtsman M C, Schuster D, Simon J, Zilberberg O, Carusotto I 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 015006
- [43] Yan Q C, Ma R, Hu X Y, Gong Q H 2023 *Chin. Phys. B* **33** 010301
- [44] Xu Y X, Tang W J, Jiang L W, Wu D X, Wang H, Xu B C, Chen L 2024 *Chin. Phys. B* **33** 060306
- [45] Wu D, Chen J, Su W, Wang R, Wang B, Xing D Y 2023 *Commun. Phys.* **6** 1
- [46] Xu X W, Li Y Z, Liu Z F, Chen A X 2020 *Phys. Rev. A* **101** 063839

COVER ARTICLE

Topological selective non Hermitian skin effect*

YANG Xing¹⁾²⁾ LIU Mengjiao¹⁾²⁾ HOU Jiahao¹⁾²⁾ LI Tianyue¹⁾²⁾
 WANG Shuming^{1)2)†}

1) (*National Laboratory of Solid State Microstructures, School of Physics, College of Engineering and Applied Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Advanced Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

(Received 22 April 2025; revised manuscript received 4 May 2025)

Abstract

Topologically protected waveguides have aroused increasing interest due to their robustness against disorder and defects. In parallel, the advent of non-Hermitian physics with its inherent gain-and-loss mechanisms has introduced new tools for manipulating wave localization and transport. However, most attempts to combine non-Hermitian effects with topological systems uniformly impose the non-Hermitian skin effect (NHSE) on all modes, without selectivity targeting topological states.

In this work, we propose a scheme that achieves topologically selective NHSE by combining sub-symmetry-protected boundary modes with long-range non-reciprocal couplings. In an improved Su–Schrieffer–Heeger (SSH) chain, we analytically demonstrate that robust zero-energy edge modes can be preserved even in spectra filled with bulk states, while selectively applying the NHSE to the trivial bulk states to achieve the spatial separation between topological state and bulk state. By adjusting the long-range couplings a non-Hermitian phase transition can be observed in the complex energy spectrum: it transitions from a closed loop (circle) to an open arc, and ultimately to a reversely coiled loop. These transitions correspond respectively to a leftward NHSE, the disappearance of the NHSE, and a rightward NHSE. According to the calculations of the generalized Brillouin zone (GBZ), we confirm this transition by observing the GBZ passing through the unit circle, indicating a change in the direction of NHSE.

We further extend our model to a two-dimensional higher-order SSH lattice, where selective non-Hermitian modulation enables clear spatial separation between topological corner states and bulk modes. To quantify this, we compute the local density of states (LDOS) in the complex energy plane for site 0 (a topologically localized corner) and site 288 (a region exhibiting NHSE). The comparison of LDOS between the two sites reveals that the topological states are primarily localized at site 0, while the bulk states affected by NHSE accumulate at site 288.

To validate the theoretical predictions, we perform finite-element simulations of optical resonator arrays by using whispering-gallery modes. By adjusting the coupling distances and incorporating gain/loss through refractive index engineering, we replicate the modified SSH model and confirm the selective localization of topological and bulk modes.

Our results provide a robust method for selectively exciting and spatially controlling the topological states in non-Hermitian systems, and also lay a foundation for future low-crosstalk high-stability topological photonic devices.

Keywords: topological photonics, non hermitian skin effect, circular resonant optical waveguide

PACS: 42.70.Qs, 78.67.Pt, 42.25.-p, 71.20.-b

DOI: [10.7498/aps.74.20250526](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250526)

CSTR: [32037.14.aps.74.20250526](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250526)

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2022YFA1404300), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12325411, 62288101, 11774162), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20233001), and the Jiangsu Provincial Key Research and Development Program, China (Grant No. BG2024029).

† Corresponding author. E-mail: wangshuming@nju.edu.cn



拓扑选择性非厄米趋肤效应

杨星 刘梦蛟 侯佳浩 李添悦 王淑明

Topological selective non Hermitian skin effect

YANG Xing LIU Mengjiao HOU Jiahao LI Tianyue WANG Shuming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 144205 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250526

CSTR: 32037.14.aps.74.20250526

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250526>

当期内容 View table of contents: <https://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

畴壁系统中的非厄米趋肤效应

Non-Hermitian skin effect in a domain-wall system

物理学报. 2022, 71(17): 170306 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221087>

无序非厄米Su-Schrieffer-Heeger中的趋肤效应

Skin effect in disordered non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger

物理学报. 2022, 71(22): 227402 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221151>

非厄米Su-Schrieffer-Heeger链边缘态和趋肤效应依赖的电子输运特性

Edge states and skin effect dependent electron transport properties of non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger chain

物理学报. 2023, 72(24): 247301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231286>

基于Aharonov-Bohm笼的非厄米趋肤效应抑制现象

Suppression of non-Hermitian skin effect via Aharonov-Bohm cage

物理学报. 2022, 71(17): 174201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220978>

非互易拓扑光子学

Non-reciprocal topological photonics

物理学报. 2024, 73(6): 064201 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20231850>

一维非互易声学晶体的非厄米趋肤态操控

Steering non-Hermitian skin states by engineering interface in 1D nonreciprocal acoustic crystal

物理学报. 2024, 73(21): 214301 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241087>