

旋转自旋-轨道角动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的基态性质*

赵磊 邱旭[†] 梁毅 胡爱元 文林[‡]

(重庆师范大学物理与电子工程学院, 重庆 401331)

(2025 年 4 月 24 日收到; 2025 年 8 月 1 日收到修改稿)

本文以旋转自旋-轨道角动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体为对象, 通过数值求解单粒子定态 Schrödinger 方程和具有平均场相互作用的 Gross-Pitaevskii 方程, 研究了自旋-轨道角动量耦合与旋转对单粒子基态性质和平均场相互作用基态性质的影响, 发现旋转将导致角动量空间中单粒子能谱的二重简并消失, 单粒子能谱不再是关于零点角动量左右对称, 单粒子基态和平均场基态为占据单个角动量的涡旋态, 其角动量大小与旋转频率、激光强度和自旋-轨道角动量耦合有关. 当旋转频率小于临界值时, 基态涡旋的角动量大小不受旋转频率的影响. 当旋转频率超过临界值时, 基态涡旋的角动量大小将随着旋转频率的增加而增加.

关键词: 自旋-轨道角动量耦合, 玻色-爱因斯坦凝聚体, Gross-Pitaevskii 方程

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 03.75.Mn, 71.70.Ej

DOI: 10.7498/aps.74.20250542

CSTR: 32037.14.aps.74.20250542

1 引言

自旋-轨道角动量耦合是微观粒子的自旋磁矩与轨道运动产生的等效磁场之间的相互作用, 是量子力学中一个重要的基本现象, 对于理解原子结构、化学键的形成等具有重要科学意义. 近年来, 蓬勃发展的超冷原子物理, 已经成为原子分子物理、凝聚态物理等领域的热点分支. 由于超冷原子系统的高度可调控性和无杂质的纯洁性, 利用超冷原子平台在中性原子系统中模拟自旋-线性动量耦合、自旋-轨道角动量耦合等人造规范势, 并探索其可能导致的新奇量子现象, 已经成为当前国际上的热点课题.

2009 年, 美国 NIST 实验组通过利用光和原子相互作用, 率先在超冷原子系统中实现了人造自

旋-线性动量耦合 (在凝聚态物理中也称为自旋-轨道耦合)^[1], 它是原子的自旋和质心动量的耦合, 为研究规范场与物质场之间的相互作用提供了全新的平台^[2-4], 许多有趣的新奇量子现象先后被实验观测和理论预言, 如条纹态、分数涡旋态和新奇孤子态等^[5-10]. 随后, 江开军和林育如等^[11-13]利用 Laguerre-Gaussian 激光诱导超冷玻色原子内态之间的拉曼跃迁, 将 Laguerre-Gaussian 激光的轨道角动量相干地转移给中性超冷原子, 首次实现了超冷原子的自旋-轨道角动量耦合, 为研究超冷原子体系的拓扑量子态、非平衡动力学等提供了新的途径. 在具有自旋-轨道角动量耦合的超冷原子系统中, 由于原子具有确定的轨道角动量, 描述其动力学性质的波函数具有非零的角动量, 这使得体系展现出许多不同于传统超冷原子系统的新奇量子态, 如角向条纹态^[14-23].

* 国家自然科学基金 (批准号: 12175027, 11875010) 和重庆市自然科学基金 (批准号: CSTB2025NSCQ-GPX1010, cstc2019jcyj-msxmX0217, cstc2021jcyjmsxmX0168) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xuqiu@cqu.edu.cn

[‡] 通信作者. E-mail: wlqx@cqu.edu.cn

特别地,当超冷原子被旋转起来后,原子间的相互作用会使体系展现出奇特的量子化涡旋^[24].量子化涡旋在许多新奇量子现象的产生中也起着至关重要的作用,如二维量子多体系统中的 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 拓扑相变^[25]、非平衡过程的 Kibble-Zurek 机制^[26]等.更为重要的是,涡旋态不仅表现出多样化的外部形态和内部结构,且携带了丰富的角动量信息,在量子信息处理和精密测量等领域也有重要的应用价值^[27,28].由此可见,量子化涡旋的研究不仅对理解基本物理现象有着基础性研究意义,而且还对量子计算、量子信息和精密测量等高新量子技术的发展也有重要的科学价值.

本文以旋转自旋-轨道角动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 为对象,通过数值求解单粒子定态 Schrödinger 方程和具有平均场相互作用的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程,研究自旋-轨道角动量耦合与旋转对单粒子基态和平均场相互作用基态性质的影响.研究结果表明,基态涡旋的角动量与旋转频率、自旋-轨道角动量耦合和激光强度有关,旋转频率存在着临界值.当旋转频率低于临界值时,基态涡旋的角动量不受旋转的影响,由自旋-轨道角动量耦合和激光强度决定.而当旋转频率高于临界值时,基态涡旋的角动量将随着旋转频率的增加而增加.

2 理论模型

设质量为 M 的 ^{87}Rb 原子的两个超精细态为 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$,原子被囚禁在以频率为 ω 的旋转谐振子势阱 $V(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}M[\omega_{\perp}^2(X^2 + Y^2) + \omega_z^2 Z^2]$ 中,其中 ω_{\perp} 和 ω_z 为谐振子势阱在横向和纵向方向的囚禁频率, X, Y, Z 为空间坐标,矢量 \mathbf{R} 的大小为 $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.通过利用角动量分别为 l_1 和 l_2 、空间分布为 $\Omega(\rho) = \Omega_R(\rho/W)^{|l_1|+|l_2|}e^{-2\rho^2/W^2}$ 的两束 Laguerre-Gaussian 激光作用于两个自旋态,则可产生自旋-轨道角动量耦合^[11-13],其中 Ω_R 为激光强度, W 为激光宽度, ρ 的大小为 $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$.假设 $\omega_z \gg \omega_{\perp}$,原子在 Z 方向处于谐振子基态.以 $\xi_{\perp} = \sqrt{\hbar/M\omega_{\perp}}$ 和 ω_{\perp}^{-1} 分别为空间坐标和时间的单位,在旋转参考系及旋转波近似下,体系的单粒子性质可用如下的无量纲化二维哈密顿量描述:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(\hat{L}_z - l\sigma_z)^2}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 + \varpi \hat{L}_z + \Omega(r)\sigma_x, \quad (1)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 代表二维平面内的极径, x 和 y 为无量纲的平面直角坐标, σ_x 和 σ_z 为 2×2 的 Pauli 矩阵. $\hat{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial \theta}$ 为角动量算符, $\theta \in [0, 2\pi]$ 为极角,整数 $l = (l_1 - l_2)/2$, $\varpi = \omega/\omega_{\perp}$ 为无量纲的旋转频率,无量纲的 Laguerre-Gaussian 激光空间分布 $\Omega(r)$ 为

$$\Omega(r) = \Omega(\rho)/\hbar\omega_{\perp} = \frac{\Omega_R}{\hbar\omega_{\perp}} \left(\frac{r}{w} \right)^{|l_1|+|l_2|} e^{-2r^2/w^2},$$

其中 $w = W/\xi_{\perp}$ 为无量纲的激光宽度.从方程 (1) 可以看出,第二项中的 $\hat{L}_z\sigma_z$ 代表自旋-轨道角动量耦合,其中 l 为自旋-轨道角动量耦合强度,它可通过调整 Laguerre-Gaussian 激光的角动量进行调节.方程 (1) 中最后一项 $\Omega(r)\sigma_x$ 代表激光诱导原子在不同自旋态之间的转变,可通过 Ω_R 调节.

当出现原子间的相互作用时,在平均场近似下,体系的动力学性质可用宏观凝聚波函数 $\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t)$ 描述,它们满足归一化条件 $\int |\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2 d^2\mathbf{r} = 1$,并服从如下的 GP 方程:

$$i\frac{\partial\psi_{\uparrow}}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(\hat{L}_z - l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 + \varpi \hat{L}_z \right] \psi_{\uparrow} + \Omega(r)\psi_{\downarrow} + (g_{\uparrow\uparrow}|\psi_{\uparrow}|^2 + g_{\uparrow\downarrow}|\psi_{\downarrow}|^2)\psi_{\uparrow}, \quad (2a)$$

$$i\frac{\partial\psi_{\downarrow}}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(\hat{L}_z + l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 + \varpi \hat{L}_z \right] \psi_{\downarrow} + \Omega(r)\psi_{\uparrow} + (g_{\downarrow\downarrow}|\psi_{\downarrow}|^2 + g_{\downarrow\uparrow}|\psi_{\uparrow}|^2)\psi_{\downarrow}, \quad (2b)$$

其中 t 为时间, $g_{\sigma\sigma'} = \sqrt{8\pi N}a_{\sigma\sigma'}/\xi_z$ ($\sigma, \sigma' = \uparrow, \downarrow$) 代表两个原子间 s 波相互作用强度, $a_{\sigma\sigma'}$ 为可通过 Feshbach 共振技术调节的 s 波散射长度, N 为总原子数, $\xi_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$ 为 z 方向的谐振子特征长度.

3 单粒子基态性质

首先研究体系的单粒子基态性质,它对于理解多体相互作用基态的性质具有极为重要的意义.单粒子能量 E 及本征函数 $\Psi(r, \theta) = [\psi_{\uparrow}(r, \theta), \psi_{\downarrow}(r, \theta)]^T$ (上标 T 代表转置) 可通过如下的定态

Schrödinger 方程求解:

$$\hat{H}_0\Psi(r, \theta) = E\Psi(r, \theta). \quad (3)$$

由于旋转对称性, 即 $[\hat{H}_0, \hat{L}_z] = 0$, 可将单粒子波函数进行变量分离 $\psi_\sigma(r, \theta) = \phi_\sigma(r) e^{im\theta}$, 其中整数 m 为角动量量子数, 径向波函数 $\phi_\sigma(r)$ 满足归一化条件:

$$2\pi \int_0^\infty (|\phi_\uparrow|^2 + |\phi_\downarrow|^2) r dr = 1.$$

则方程 (3) 可写作:

$$E\phi_\uparrow = \left[-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(m-l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2} r^2 + m\varpi \right] \phi_\uparrow + \Omega(r)\phi_\downarrow, \quad (4a)$$

$$E\phi_\downarrow = \left[-\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(m+l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2} r^2 + m\varpi \right] \phi_\downarrow + \Omega(r)\phi_\uparrow. \quad (4b)$$

哈密顿量 $\hat{h}_0 = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{(m \mp l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2} r^2$ 的本征值为 $2n + |m \mp l| + 1$ 的本征态函数为

$$\varphi_{n, m \mp l}(r) = \sqrt{\frac{n!}{\pi(n + |m \mp l|)}} r^{|m \mp l|} e^{-r^2/2} L_n^{|m \mp l|}(r^2),$$

并满足正交归一化条件:

$$2\pi \int_0^\infty \varphi_{n', m \mp l} \varphi_{n, m \mp l} r dr = \delta_{n, n'},$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 为径向量子数, $L_n^{|m \mp l|}(r^2)$ 代表广义拉盖尔多项式. 因此, 对于给定的 m , 可将径

向波函数 $\phi_\sigma(r)$ 展开:

$$\phi_\uparrow(r) = \sum_n \phi_{\uparrow, n} \varphi_{n, m-l}(r), \quad (5a)$$

$$\phi_\downarrow(r) = \sum_n \phi_{\downarrow, n} \varphi_{n, m+l}(r), \quad (5b)$$

其中展开系数满足

$$\sum_n (|\phi_{\uparrow, n}|^2 + |\phi_{\downarrow, n}|^2) = 1.$$

则方程 (4) 变为

$$E\phi_{\uparrow, n} = E_{\uparrow, n, m} \phi_{\uparrow, n} + \sum_{n'} I_{n, n'} \phi_{\downarrow, n'}, \quad (6a)$$

$$E\phi_{\downarrow, n} = E_{\downarrow, n, m} \phi_{\downarrow, n} + \sum_{n'} I_{n', n} \phi_{\uparrow, n'}, \quad (6b)$$

其中,

$$E_{\uparrow, n, m} = 2n + |m-l| + 1 + m\varpi,$$

$$E_{\downarrow, n, m} = 2n + |m+l| + 1 + m\varpi,$$

$$I_{n, n'} = 2\pi \int_0^\infty \varphi_{n, m-l}^* \Omega(r) \varphi_{n', m+l} r dr.$$

因此, 对于给定的 m , 方程 (6) 是关于 $\phi_{\uparrow, n}$ 和 $\phi_{\downarrow, n}$ 满足的本征值方程, 可通过对角化方法数值求解, 进而可以求出不同 m 取值下的能量和本征波函数. 在实际的数值计算中, 为了提高计算精度, 积分 $I_{n, n'}$ 可通过高斯-拉盖尔求积公式进行计算^[29].

对于无旋转的情况 (即 $\varpi = 0$), 以 $l = 1$ 为例, 图 1(a), (b) 分别展示了 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 30$ 和 70 时, 能量最低的两条能级随 m 的变化, 其中插图分别为基态的密度和相位分布. 当 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 30$ 时, 图 1(a) 表明单粒子基态在 $m = +l$ 和 $m = -l$ 处为二重简

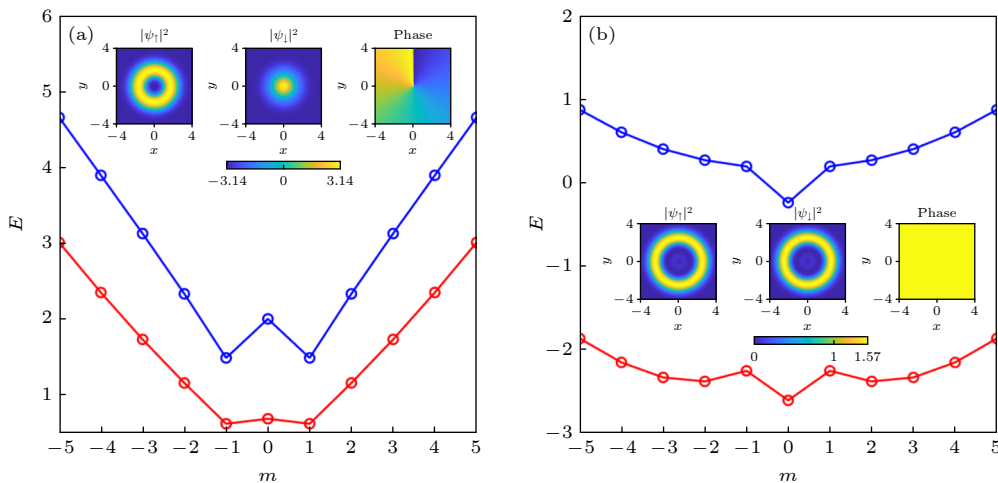


图 1 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 30$ (a) 和 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 70$ (b) 时能量最低的两条能级随 m 的变化, 插图分别为基态的密度和相位分布. 其他参数取值为 $l = 1$, $\omega_\perp = 2\pi \times 10$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 200$ Hz, $W = 25$ μm

Fig. 1. Variations of two single-particle lowest energy levels with m for $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 30$ (a) and $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 70$ (b), respectively. Other parameters are $l = 1$, $\omega_\perp = 2\pi \times 10$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 200$ Hz, and $W = 25$ μm .

并, 且能量关于 $m = 0$ 左右对称, 基态密度和相位分布表明基态为携带角动量的涡旋态, 其角动量由自旋-轨道角动量耦合强度 l 决定. 然而, 当 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 70$ 时, 单粒子基态位于 $m = 0$ 处 (见图 1(b)), 基态无筒并且角动量为零.

当存在旋转时, 图 2(a)—(d) 展示不同 Ω_R 取

值下, 不同旋转频率 ϖ 对应的能量最低能级随 m 的变化和基态角动量 m_g 随旋转频率 ϖ 的变化. 图 2(a) 和图 2(c) 表明旋转的出现导致单粒子能量 E 不再关于 $m = 0$ 左右对称, 图 2(b) 和图 2(d) 说明基态角动量随旋转频率的变化呈现出阶梯式增加, 且旋转频率存在临界值. 当旋转频率小于临界值时, 基态的角动量取值不受旋转频率的影响.

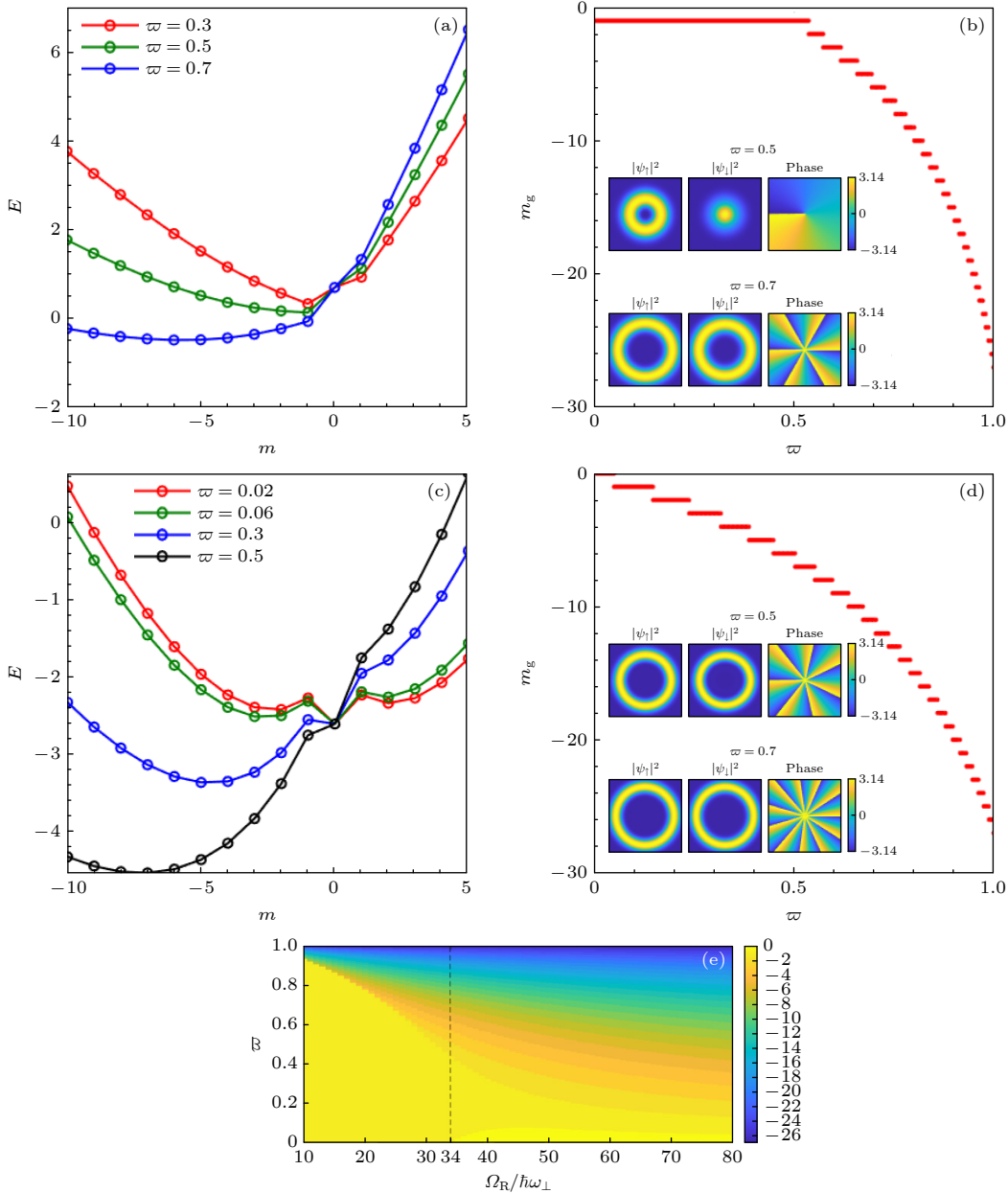


图 2 最低能级在不同 ϖ 取值下随 m 的变化和基态角动量 m_g 随 ϖ 的变化 (a), (b) $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 30$; (c), (d) $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 70$. 图 (b) 和 (d) 中的插图是 $\varpi = 0.5$ 和 $\varpi = 0.7$ 时基态密度和相位分布. (e) 以 ϖ 和 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp$ 为轴的二维参数空间中基态角动量的变化. 其他参数取值分别为 $l = 1$, $\omega_\perp = 2\pi \times 10$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 200$ Hz, $W = 25$ μm

Fig. 2. Variation of the single-particle lowest energy level with m for different ϖ and the variation of the angular momentum m_g of the single-particle ground state with ϖ : (a), (b) $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 30$; (c), (d) $\Omega_R/\hbar\omega_\perp = 70$. The insets in panels (b) and (d) are the density and phase of the single-particle ground state for $\varpi = 0.5$ and $\varpi = 0.7$, respectively. (e) Variation of the angular momentum of the single-particle ground state with ϖ and $\Omega_R/\hbar\omega_\perp$. Other parameters are $l = 1$, $\omega_\perp = 2\pi \times 10$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 200$ Hz, and $W = 25$ μm .

但当旋转频率超过临界值时, 基态角动量会随着旋转频率的增加而阶梯式增加. 图 2(e) 展示了以 ϖ 和 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp$ 为轴的二维参数空间中基态角动量的变化, 当旋转频率接近零时, 如果 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp < 34$, 基态角动量为 -1 . 如果 $\Omega_R/\hbar\omega_\perp > 34$, 基态角动量为 0 . 当旋转频率较大时, 对于固定的旋转频率, 基态角动量也会随 Ω_R 的增加而呈现出阶梯式增加.

为了理解上述结果, 假设 BEC 被囚禁在半径为 r_0 的圆环上, 则单粒子哈密顿量可写作:

$$\hat{H}_0^{\text{ring}}/\epsilon = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + i(l\sigma_z - \varpi')\frac{\partial}{\partial\theta} + \Omega'\sigma_x,$$

其中 $\epsilon = 1/r_0^2$, $\varpi' = \varpi/\epsilon$, $\Omega' = \Omega(r_0)/\epsilon$. 因此, 在角动量空间中, 哈密顿量 $\hat{H}_0^{\text{ring}}/\epsilon$ 的本征值为

$$E_\pm = \frac{1}{2}m^2 + m\varpi' \pm \sqrt{l^2m^2 + (\Omega')^2}, \quad (7)$$

它表明单粒子基态应处于能带 E_- 中. 一方面, 当 $\varpi = 0$ 时, 如果 $\Omega' < l^2$, 单粒子基态在 $m = l\sqrt{1 - (\Omega'/l^2)^2}$ 和 $m = -l\sqrt{1 - (\Omega'/l^2)^2}$ 处简并, 但由于角动量为整数, 所以 m 应取 $\pm l\sqrt{1 - (\Omega'/l^2)^2}$ 附近的整数, 因此基态角动量 $m = \pm l$. 如果 $\Omega' \geq l^2$, 由于角动量为实数, 则单粒子基态应位于 $m = 0$ 处. 另一方面, 当 $\varpi \neq 0$ 时, 如果 Ω_R 较弱, 以至于 $\Omega'/l^2 \ll 1$, 则

$$E_- \approx \frac{1}{2}m^2 + m\varpi' - |lm|,$$

基态角动量 $m = -l - \varpi'$. 由于角动量 m 为整数, 当 $\varpi' \ll 1$ 时, 则基态角动量 $m = -l$, 完全由 l 决定, 与旋转频率无关. 而当 $\varpi' \gg 1$ 时, 则基态角动量的绝对值会随着 ϖ' 的增加而阶梯式增加. 相反, 对于 $\Omega'/l^2 \gg 1$, 则

$$E_- \approx \frac{1}{2}m^2 + m\varpi' - |\Omega'|,$$

基态角动量 $m = -\varpi'$. 在这种情况下, 由于角动量为整数, 当 $\varpi' < 1$ 时, 基态角动量 $m = 0$, 与旋转频率无关. 而当 $\varpi' > 1$ 时, 则基态角动量绝对值将随 ϖ' 增加而呈阶梯式增加.

4 平均场基态性质

当存在原子相互作用时, 通过求解虚时演化 GP 方程 (2) (即将 GP 方程 (2) 中的时间 t 用 $-i\tau$ 替代, 其中 τ 为虚时间), 可获得体系的平均场基态. 为了保证数值计算过程的稳定性, 采用隐式的

后向欧拉差分方法处理虚时演化 GP 方程中对时间的一阶导数部分 [30,31], 即

$$\frac{\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_{j+1}) - \psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j)}{d\tau} = -\hat{h}_\uparrow\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_{j+1}) - f_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j), \quad (8a)$$

$$\frac{\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_{j+1}) - \psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j)}{d\tau} = -\hat{h}_\downarrow\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_{j+1}) - f_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j), \quad (8b)$$

其中 $d\tau$ 为虚时步长, τ_j 代表虚时刻,

$$\tau_j = jd\tau \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\hat{h}_\uparrow = -\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{(\hat{L}_z - l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 + \varpi\hat{L}_z,$$

$$\hat{h}_\downarrow = -\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{(\hat{L}_z + l)^2}{2r^2} + \frac{1}{2}r^2 + \varpi\hat{L}_z,$$

$$f_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j) = \Omega(r)\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j) + [g_{\uparrow\uparrow}|\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j)|^2 + g_{\uparrow\downarrow}|\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j)|^2]\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j),$$

$$f_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j) = \Omega(r)\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j) + [g_{\downarrow\downarrow}|\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j)|^2 + g_{\downarrow\uparrow}|\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau_j)|^2]\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau_j).$$

为了求解方程 (8), 利用正交归一化函数 $\varphi_{n,m\pm l}(\mathbf{r})e^{im\theta}$ 作为基函数, 分别展开波函数 $\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau)$ 和 $\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau)$:

$$\psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{n,m} \phi_{\uparrow,n,m}(\tau)\varphi_{n,m-l}(r)e^{im\theta}, \quad (9a)$$

$$\psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{n,m} \phi_{\downarrow,n,m}(\tau)\varphi_{n,m+l}(r)e^{im\theta}, \quad (9b)$$

其中展开系数:

$$\phi_{\uparrow,n,m}(\tau) = \int_0^\infty \psi_\uparrow(\mathbf{r}, \tau)\varphi_{n,m-l}(r)e^{-im\theta}rdrd\theta,$$

$$\phi_{\downarrow,n,m}(\tau) = \int_0^\infty \psi_\downarrow(\mathbf{r}, \tau)\varphi_{n,m+l}(r)e^{-im\theta}rdrd\theta.$$

将 (9) 式代入方程 (8) 中可得

$$\phi_{\uparrow,n,m}(\tau_{j+1}) = \frac{\phi_{\uparrow,n,m}(\tau_j) - d\tau f_{\uparrow,n,m}(\tau_j)}{1 + d\tau E_{\uparrow,n,m}}, \quad (10a)$$

$$\phi_{\downarrow,n,m}(\tau_{j+1}) = \frac{\phi_{\downarrow,n,m}(\tau_j) - d\tau f_{\downarrow,n,m}(\tau_j)}{1 + d\tau E_{\downarrow,n,m}}, \quad (10b)$$

其中,

$$f_{\uparrow,n,m}(\tau) = \int_0^\infty f_\uparrow(\mathbf{r}, \tau)\varphi_{n,m-l}(r)e^{-im\theta}rdrd\theta,$$

$$f_{\downarrow,n,m}(\tau) = \int_0^\infty f_\downarrow(\mathbf{r}, \tau)\varphi_{n,m+l}(r)e^{-im\theta}rdrd\theta.$$

因此, 给定初始波函数后, 通过方程 (9) 和方程 (10), 在长时间演化下, 可得到体系的基态解.

在实际的数值计算中, 时间步长设定为 $d\tau = 0.001$, 并当 $|E(\tau_{j+1}) - E(\tau_j)| < 10^{-8}$ (E 为平均场能量) 时认为体系演化至基态, 停止迭代计算. 特别地, 为了保证获得正确的基态, 在相同系统参数下, 取不同的初始波函数进行计算, 并选择能量最低的态作为基态. 除此以外, 为了提高计算精度, 系数 $\phi_{\sigma,n,m}(\tau)$ 和 $f_{\sigma,n,m}(\tau)$ 也将采用高斯-拉盖尔求积公式进行计算.

首先研究无旋转情况的基态, 图 3(a) 中展示了 $l = 2$ 时 $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 100, 140, 160$ 的三种典型基态密度分布, 这三种态分别对应于双占据角向条纹态、三占据角向条纹态和涡旋-反涡旋态 [20,21]. 对于 $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 100$, 单粒子基态在角动量 $m = +l$ 和 $m = -l$ 处简并, 原子相互作用导致平均场基态同时占据角动量为 $m = +l$ 和 $m = -l$ 的两个态, 形成双占据的角向条纹态. 当 $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 140$ 时, 原子相互作用导致平均场基态将同时占据在角动量为 $m = 0, m = +l$ 和 $m = -l$ 的三个态, 形成三占据

的角向条纹态. 但当 $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 160$, 单粒子基态位于角动量为 $m = 0$ 处, 平均场基态为涡旋-反涡旋态. 这些结果与文献 [20, 21] 中的结果一致, 也证明本文采用的数值计算方案可靠.

当 $\varpi \neq 0$, $l = 1$ 时, 图 3(b) 和图 3(c) 展示了不同 Ω_R 取值下的基态角动量 $\langle \hat{L}_z \rangle$ 随旋转频率 ϖ 的变化:

$$\langle \hat{L}_z \rangle = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \int \psi_{\sigma}^* \hat{L}_z \psi_{\sigma} d^2r$$

如图 3(b) 所示, 对于较弱的 Ω_R , 由于旋转导致单粒子基态无简并和单粒子基态角动量具有非零值, 平均场基态为占据单个非零角动量的涡旋态, 其角动量随旋转频率的增加也呈现出阶梯式增加. 对于较大的 Ω_R , 如图 3(b) 所示, 当旋转频率较小时, 单粒子基态的角动量为零, 平均场基态仍为涡旋-反涡旋态. 但随着旋转频率增加并超过一定的临界值时, 平均场基态将变为携带非零角动量的涡旋态, 且角动量将随旋转频率的增加而阶梯式增加.

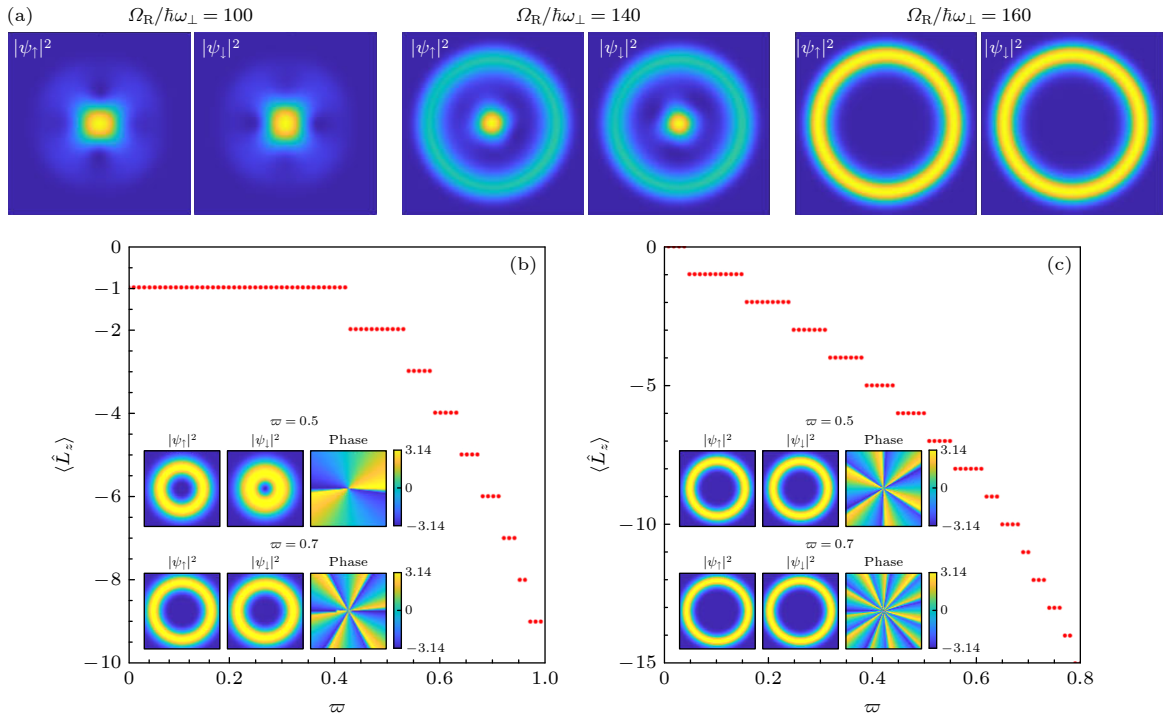


图 3 (a) $\varpi = 0$ 和 $l = 2$ 时, $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 100, 140, 160$ 时的基态密度分布. (b), (c) $l = 1$ 时, $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 30$ 和 70 的基态角动量 $\langle \hat{L}_z \rangle$ 随旋转频率的变化, 插图为 $\varpi = 0.5$ 和 $\varpi = 0.7$ 时的基态密度和相位分布. 其他参数为 $a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow} = 100a_B$, $a_{\uparrow\downarrow} = 50a_B$, $\omega_{\perp} = 2\pi \times 10$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 200$ Hz, $N = 1000$ 和 $W = 25 \mu\text{m}$, 其中 a_B 为玻尔半径

Fig. 3. (a) Densities of the mean-field ground states for $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 100, 140, 160$ when $\varpi = 0$ and $l = 2$. (b), (c) For $l = 1$, the variation of the angular momentum $\langle \hat{L}_z \rangle$ of the mean-field ground state with the rotating frequency ϖ for $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 30$ and $\Omega_R/\hbar\omega_{\perp} = 70$, respectively. The insets in panels (b) and (c) are the density and phase of the mean-field ground state for $\varpi = 0.5$ and $\varpi = 0.7$, respectively. Other parameters are $a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow} = 100a_B$, $a_{\uparrow\downarrow} = 50a_B$, $\omega_{\perp} = 2\pi \times 10$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 200$ Hz, $N = 1000$, and $W = 25 \mu\text{m}$, where a_B is the Bohr radius.

此外,对比图 3(a) 和图 3(b) 可知,对于相同的旋转频率,平均场基态涡旋的角动量也会随着 Ω_R 的增加而呈阶梯式增加,展现出类似于单粒子基态的性质. 我们也研究了其他系统参数取值下的平均场基态,发现其性质表现出与上述结果一致的特征.

5 结 论

本文以旋转自旋-轨道角动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体为对象,通过利用基函数展开方法数值求解单粒子定态 Schrödinger 方程和具有平均场相互作用的 Gross-Pitaevskii 方程,系统分析了旋转、激光强度和自旋-轨道角动量耦合对体系单粒子基态和平均场基态的影响. 研究表明,旋转的存在使得体系的单粒子基态在角动量空间中不具有左右对称性. 特别地,当旋转频率低于临界值时,基态涡旋的角动量不受旋转的影响,由自旋-轨道角动量耦合和激光强度决定. 而当旋转频率高于临界值时,基态涡旋的角动量将随着旋转频率的增加而增加. 除此以外,对于固定的旋转频率,基态涡旋的角动量也将随着激光强度的增加而增加.

参考文献

- [1] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [2] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [3] Wang P, Yu Z Q, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [4] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [5] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [6] Liu C F, Wan W J, Zhang G Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 200306 (in Chinese) [刘超飞, 万文娟, 张赣源 2013 物理学报 **62** 200306]
- [7] Li J, Liu B, Bai J, Wang H Y, He T C 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 140301 (in Chinese) [李吉, 刘斌, 白晶, 王寰宇, 何天琛 2020 物理学报 **69** 140301]
- [8] Wang Y, Cui J, Zhang H, Zhao Y, Xu S, Zhou Q 2024 *Chin. Phys. Lett.* **41** 090302
- [9] He J T, Fang P P, Lin J 2022 *Chin. Phys. Lett.* **39** 020301
- [10] Guo H, Qiu X, Ma Y, Jiang H F, Zhang X F 2021 *Chin. Phys. B* **30** 060310
- [11] Chen H R, Lin K Y, Chen P K, Chiu N C, Wang J B, Chen C A, Huang P P, Yip S K, Kawaguchi Y, Lin Y J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 113204
- [12] Chen P K, Liu L R, Tsai M J, Chiu N C, Kawaguchi Y, Yip S K, Chang M S, Lin Y J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250401
- [13] Zhang D, Gao T, Zou P, Kong L, Li R, Shen X, Chen X L, Peng S G, Zhan M, Pu H, Jiang K 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 110402
- [14] Duan Y, Bidasnyuk Y M, Surzhykov A 2021 *Phys. Rev. A* **102** 063328
- [15] Chen K J, Wu F, Peng S G, Yi W, He L Y 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260407
- [16] Wang L L, Ji A C, Sun Q, Li J 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 193401
- [17] Edmonds M 2021 *Phys. Rev. A* **104** 043310
- [18] Bidasnyuk Y M, Kovtunenkov K S, Prikhodko O O 2022 *Phys. Rev. A* **105** 023320
- [19] Cao R, Han J S, Wu J H, Yuan J M, He L Y, Li Y Q 2022 *Phys. Rev. A* **105** 063308
- [20] Chen K J, Wu F, Hu J, He L 2020 *Phys. Rev. A* **102** 013316
- [21] Chen X L, Peng S G, Zou P, Hu H 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033152
- [22] Sun K, Qu C L, Zhang C W 2015 *Phys. Rev. A* **91** 063627
- [23] Chen L, Pu H, Zhang Y B 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013629
- [24] Alexander L F 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 647
- [25] Sunami S, Singh V P, Garrick D, Beregi A, Barker A J, Luksch K, Bentine E, Mathey L, Foot C J 2023 *Science* **382** 443
- [26] Lee K, Kim S, Kim T, Shin Y 2024 *Nat. Phys.* **20** 1570
- [27] Drori L, Das B C, Zohar T D, Winer G, Poem E, Poddubny A, Firstenberg O 2023 *Science* **381** 193
- [28] Zhang Z, Li F, Malpuech G, Zhang Y, Bleu O, Koniakhin S, Li C, Zhang Y, Xiao M, Solnyshkov D D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 233905
- [29] Shen J, Tang T, Wang L L 2011 *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications* (Berlin: Springer) pp238–253
- [30] Liu W, Cai Y 2021 *SIAM J. Sci. Comput.* **43** B219
- [31] Bao W, Cai Y 2018 *Commun. Comput. Phys.* **24** 899

Ground state properties of rotating spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensates^{*}

ZHAO Lei QIU Xu[†] LIANG Yi HU Aiyuan WEN Lin[‡]

(*College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*)

(Received 24 April 2025; revised manuscript received 1 August 2025)

Abstract

By numerically solving the single-particle stationary Schrödinger equation and the Gross-Pitaevskii equation with mean-field interactions at zero temperature, the ground state properties of the rotating spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensates in a harmonic trapping potential are investigated in this work. The results show that the rotation lifts the double degeneracy of the single-particle energy spectrum in the angular momentum space, and leads to the vortex state. The angular momentum of the vortex depends on the rotating frequency, the intensity of the laser beam, and the spin-orbital-angular-momentum coupling. In particular, if the rotating frequency is below a critical value, the angular momentum of the ground state vortex remains unaffected by the rotating frequency. When the rotating frequency exceeds the critical value, the angular momentum of the ground state vortex will increase with the rotating frequency increasing. By assuming that the system is confined in a ring trap, the expression of the single-particle energy spectrum in the angular momentum space can be obtained, which clarifies how the rotation frequency affects the angular momentum of the ground state. In the presence of atomic interactions, similar phenomena can also be observed in the mean-field ground state at zero temperature.

Keywords: spin-orbital-angular-momentum-coupling, Bose-Einstein condensate, Gross-Pitaevskii equation

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 03.75.Mn, 71.70.Ej

DOI: [10.7498/aps.74.20250542](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250542)

CSTR: [32037.14.aps.74.20250542](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250542)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12175027, 11875010) and the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant Nos. CSTB2025NSCQ-GPX1010, cstc2019jcyj-msxmX0217, cstc2021-jcyjmsxmX0168).

[†] Corresponding author. E-mail: xuqiu@cqu.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: wlqx@cqu.edu.cn

旋转自旋-轨道角动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的基态性质

赵磊 邱旭 梁毅 胡爱元 文林

Ground state properties of rotating spin-orbital-angular-momentum coupled Bose-Einstein condensates

ZHAO Lei QIU Xu LIANG Yi HU Aiyuan WEN Lin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 190303 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250542

CSTR: 32037.14.aps.74.20250542

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250542>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自旋-轨道耦合二分量玻色-爱因斯坦凝聚系统的孤子解

Soliton solutions of the spin-orbit coupled binary Bose-Einstein condensate system

物理学报. 2023, 72(10): 106701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222319>

自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体激发谱及其有效调控

Excitation spectrum of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates and its effective regulation

物理学报. 2023, 72(6): 060302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222306>

可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2022, 71(21): 210302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

光晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性能谱特性

Nonlinear energy band structure of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in optical lattice

物理学报. 2021, 70(20): 200302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210705>

螺旋自旋-轨道耦合三分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of three-component Bose-Einstein condensate with helicoidal spin-orbit coupling

物理学报. 2025, 74(17): 170302 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250587>

自旋张量-动量耦合玻色-爱因斯坦凝聚的动力学性质

Dynamics of spin-tensor-momentum coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2023, 72(18): 180304 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231076>