

量子区域内单离子声子激光态的研究*

董元章^{1)2)#} 何思文^{3)#} 邓志姣^{3)†} 李沛东¹⁾²⁾ 陈亮^{1)‡} 冯芒^{1)††}

1) (中国科学院精密测量科学与技术创新研究院, 武汉 430071)

2) (中国科学院大学, 北京 100049)

3) (国防科技大学理学院, 长沙 410073)

(2025年5月7日收到; 2025年8月1日收到修改稿)

在囚禁离子系统中, 基于范德波尔振子机制的单离子声子激光态已在微弱电场测量和弱力检测等领域得到应用. 声子激光态作为一种与光子激光的性质类似的相干声子态, 通过激光相干边带激励和冷却技术, 可以精确地调控离子的振动状态, 并有望在连续变量量子计算、量子非线性动力学和量子精密测量等领域展现进一步的应用. 本文采用三能级模型对单离子量子区域内的声子激光态进行理论研究, 通过求解主方程, 获得了声子激光态的稳态相图, 分析了系统的 Wigner 准概率分布和二阶关联特性. 本文针对离子阱体系提出了实验实现方案, 即通过蓝边带激光和红边带激光构成的双色光场共同作用于囚禁的单个 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子, 从而在量子区域内产生声子激光态, 并采用特征函数测量法对振动量子态进行表征.

关键词: 囚禁离子, Wigner 函数, 声子激光态**PACS:** 37.10.Ty, 03.65.-w, 42.50.-p**DOI:** 10.7498/aps.74.20250603**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250603

1 引言

量子区域内声子激光态是一种基于量子力学原理的声子相干放大技术产生的振动态, 其核心特征是通过精确调控声子动力学, 实现声子量子态的相干激发与操控. 该技术突破了传统声子激光态的经典物理极限, 为量子信息技术提供了全新的研究手段, 主要表现在三个方面. 首先, 在量子信息处理方面, 它实现了声子-光子耦合系统的量子态精确操控^[1,2]; 其次, 在精密测量领域, 其量子增强特性显著提升了纳米尺度力传感的灵敏度^[3,4]; 最后,

为基础物理研究提供了探索量子相干性、超流态和拓扑声子态等新物态的实验平台^[5]. 在理论描述层面, 范德波尔模型能够定性解释声子激光的稳态行为及其阈值特性, 而对于系统的量子效应, 如量子噪声和能级离散化等特征, 则需要进一步引入 Lindblad 主方程或量子涨落理论进行更精细的建模与分析. 囚禁离子系统中的单离子声子激光态主要基于范德波尔振子机制^[6-10], 已在微弱信号检测领域展现出高灵敏度、低噪声等独特优势^[11,12]. 这种高度可控的量子声场也为研究复杂量子系统的动力学行为提供了理想工具^[13]. 值得注意的是, 这一跨学科研究领域融合了量子物理、光学工程、声

* 国家自然科学基金 (批准号: U21A20434, 12074390, 92265107)、广州市科技计划 (批准号: 202201011727, 2023A04J0050)、武汉市自然科学基金 (批准号: 2024040701010063) 和广州市南沙区高端领军人才创新团队科技项目 (批准号: 2021CXTD02) 资助的课题.

同等贡献作者.

† 通信作者. E-mail: dengzhijiao926@hotmail.com

‡ 通信作者. E-mail: liangchen@wipm.ac.cn

†† 通信作者. E-mail: mangfeng@wipm.ac.cn

子学和先进材料科学等多个学科的前沿成果^[14], 不仅推动了基础研究领域的发展, 也为量子计算、量子通信和量子传感等应用技术的发展开辟了新途径。

量子区域声子激光态的前期研究主要围绕量子范德波尔振子开展。量子范德波尔振子作为非线性量子系统的典型代表, 近年来在囚禁离子系统中展现出重要的理论价值和广阔的应用前景^[6,15,16]。这些研究突破不仅将传统非线性动力学的研究范畴成功拓展至量子领域, 更重要的是为探索量子非线性现象提供了全新的实验平台和理论框架^[7,11,17-22]。从理论层面来看, 该领域已取得了一系列突破性进展: 量子极限环的首次观测揭示了量子系统中的自持振荡特性, 而非线性量子耗散机制的发现则为理解量子系统的能量耗散过程提供了全新的视角。这些开创性的研究不仅深化了人们对量子非线性系统本质特征的认识, 也为量子信息处理和量子模拟等前沿技术的发展奠定了重要基础。2013年 Lee 与 Sadeghpour^[10] 通过理论建模, 系统地研究了量子范德波尔振子的同步现象, 研究表明, 在相同参数条件下, 量子系统展现出比经典系统更为显著的相位锁定鲁棒性, 并提出了基于囚禁离子系统的具体实验方案及相关参数优化建议。2019年 Dutta 与 Cooper^[23] 通过数值模拟和解析计算, 深入揭示了量子范德波尔振子的独特量子特征。2023年的最新研究证实, 拓扑效应可以显著地增强量子同步现象, 在量子范德波尔振子的拓扑晶格中, 边界同步现象不仅存在于经典平均场层面, 而且在量子体系中同样表现出清晰的实验可观测特征^[24]。

随着声子激光态首次在囚禁离子系统中被观测到^[7], “声子激光”已在多种物理体系中成功实现, 涵盖从原子体系到纳米机械系统的多个研究平台^[13,25-29]。特别引人注目的是, 在原子系统中观测到的振荡幅度可达数十微米量级, 这对应于约 10^4 量级的声子数^[30]。近年来, 声子激光态在量子调控和非线性动力学研究领域取得了一系列重要的突破: 2020年 Flühmann 和 Home^[31] 创新性地通过特定内态选择技术, 将位移算符的实部或虚部期望值精确映射到离子内态, 实现了振动量子态对称特征函数的直接测量; 进一步通过二维傅里叶变换重构完整的 Wigner 函数, 建立了振动量子态表征的新范式。2023年 Behrle 等^[30] 在量子调控领域取得突破, 利用双异核离子体系构建双耗散通道, 首次

在量子区域实现了稳定的声子激光态, 不仅实验验证了量子声子激光的基本原理, 更为量子声场研究开辟了新方向。2024年何思文^[32] 通过调控外驱动场, 研究了单离子声子激光态的量子同步特性, 并观察到纠缠动力学演化呈现明显振荡现象, 为理解量子同步与量子纠缠的关联机制提供了新理论依据。

以上这些研究成果不仅推动了量子声子动力学理论的发展, 也为量子技术的工程化应用开辟了新的路径。随着实验方法和理论工具的创新, 声子激光态在量子计算、精密传感和复杂系统模拟等领域展现出越来越独特的优势。量子区域声子激光态最引人瞩目的特点在于其突破了经典物理的限制, 能够实现接近量子极限的测量灵敏度和优异的稳态特性, 这些特性使其成为未来高精度测量仪器的核心组件。在量子系统中, 声子激光态的实现虽然已在双离子体系中得到验证^[30], 但其实际应用仍面临显著挑战。该方案要求两个异核离子必须精确共享振动质心模式, 而离子间库仑相互作用可能导致声子模式杂化现象。为克服这些问题, 需要设计复杂的激光调控方案并提高频谱控制精度, 这大幅增加了实验系统的复杂度。相比之下, 单离子系统具有明显的优势: 其结构简单、声子模式纯度高, 且单个量子态的操控更为便捷。此外, 单离子方案不仅简化了激光配置要求, 还显著地提升了系统的可靠性与实验可重复性。但在确定声子激光产生阈值方面, 单离子声子激光的分析过程需要考虑两个激发态之间的量子过程, 而两离子声子激光则不需要考虑, 因此单离子声子激光阈值的确定相对更为复杂。不过, 在外加驱动条件下, 单离子系统的内外态自由度会形成稳态纠缠, 这一特性使得通过测量内态即可同步获取外态的信息, 为量子态探测提供了新思路^[33]。

单离子方案的二能级模型虽然为量子声子激光态提供了简洁的理论框架, 但其过度简化的能级结构也存在显著的局限性。该模型仅考虑基态和激发态两个能级, 无法准确描述实际原子或分子中普遍存在的多能级结构特征, 如中间能级、亚稳态等重要能态。这种简化处理使得模型在描述多能级量子跃迁过程时存在本质性局限, 特别是难以准确表征弛豫路径多样性、非辐射跃迁通道等关键动力学行为, 导致其在解释粒子数反转机制、激光动力学过程等复杂物理现象时, 理论预测与实验观测结果往往存在系统性偏差^[34,35]。相比之下, 单离子方案的

理论模型推广至三能级模型, 通过引入额外的能级结构, 显著提升了模型的物理真实性和描述能力. 与二能级模型通常需要采用绝热近似等简化假设不同, 三能级模型放宽了这些限制性条件, 能够更全面地反映实际量子系统的特征. 这种改进使得三能级模型可以准确描述更复杂的量子声子激光态的物理机制. 更重要的是, 三能级模型的预测结果与实验观测具有更好的定量一致性, 这使其成为研究实际激光系统和量子光学器件的有效理论工具 [36].

本文构建了单离子量子区域内声子激光态的三能级理论模型, 通过求解量子主方程的数值解, 系统分析了声子激光态的稳态特性, 重点研究了系统的量子统计行为, 包括 Wigner 准概率分布函数和二阶关联函数的演化规律. 提出了基于囚禁的单个 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子, 采用蓝边带激光和红边带激光构成的双色光场来产生量子声子激光态的实验方案, 通过引入运动量子态特征函数, 实现声子激光态的精确量子态层析, 为量子态的表征提供新思路. 另外, 三能级模型与二能级模型虽然都表现出明显的声子激光阈值效应 [33], 但两者不能在相同参数下比较, 因此, 本文通过对比三能级模型与二能级模型的声子激光产生阈值来展示两者存在的显著偏差, 表明两种模型的阈值条件具有系统依赖性, 不能简单相互替代.

2 三能级模型

在囚禁离子系统中, 离子具有两个独立的自由度: 电子自旋态和离子振动态. 这两个自由度可以通过激光场实现有效耦合. 离子在图 1(a) 所示的势阱中以频率 ν 振动, 离子在加热和冷却相互竞争过程中保持声子激光态的稳定振幅. 当激光频率与离子两个能级间的跃迁频率接近共振时, 该系统可被简化为一个如图 1(b) 所示由 $|g\rangle$, $|e_1\rangle$ 和 $|e_2\rangle$ 三个能级组成的三能级模型. 失谐量 $\delta = -\nu$ 的激光称为红边带激光; 失谐量为 $\delta = \nu$ 的激光称为蓝边带激光. 在蓝边带激光的驱动下, 离子从基态 $|g\rangle$ 跃迁至激发态 $|e_1\rangle$, 并伴随一个声子的产生; 随后, 离子从 $|e_1\rangle$ 态以衰减率 γ_h 通过有效耗散过程返回至 $|g\rangle$ 态, 这一过程实现了对离子的蓝边带加热. 另一方面, 在红边带激光的作用下, 离子从基态 $|g\rangle$ 跃迁至激发态 $|e_2\rangle$, 同时吸收一个声子; 接着, 离子从 $|e_2\rangle$

态以衰减率 γ_c 通过有效耗散过程返回至 $|g\rangle$ 态, 从而实现了离子的红边带冷却.

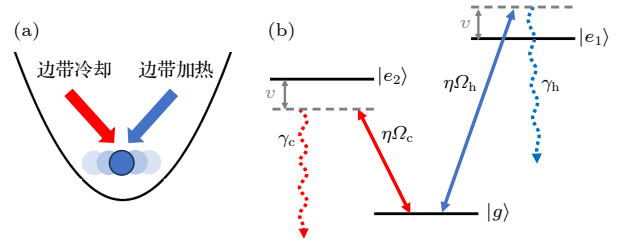


图 1 生成量子声子激光态的三能级模型 (a) 双色光场产生声子激光态示意图. 蓝色和红色箭头线分别表示蓝边带加热和红边带冷却的激光场, 加热和冷却相互竞争以保持声子激光态的稳定振幅. (b) 离子能级结构

Fig. 1. Three-level model for generating quantum phonon laser. (a) Schematic diagram of phonon laser generated by two-color light field. The ion vibrates in the potential well, where the blue-sideband heating and red-sideband cooling processes of the ion are represented by blue and red arrows, respectively, and the heating and cooling compete with each other to maintain a stable amplitude of the phonon laser. (b) The internal energy level structure of the ion.

当离子运动的振幅较小时, 其运动可近似为简谐振动, 离子的总哈密顿量 H 由自由哈密顿量 H_0 和激光-离子相互作用 H_h 和 H_c 两部分构成 [32], 即

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_h + \hat{H}_c, \quad (1)$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\omega_{0h}\hat{\sigma}_{zh} + \frac{1}{2}\omega_{0c}\hat{\sigma}_{zc} + \nu\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (2)$$

$$\hat{H}_h = \Omega_h\hat{\sigma}_h^\dagger\{e^{-i\omega_{Lh}t}[1 + i\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})]\} + \text{h.c.}, \quad (3)$$

$$\hat{H}_c = \Omega_c\hat{\sigma}_c^\dagger\{e^{-i\omega_{Lc}t}[1 + i\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})]\} + \text{h.c.}, \quad (4)$$

其中, Ω_h 和 Ω_c 分别为蓝边带激光和红边带激光与离子相互作用的拉比频率; η 为 Lamb-Dicke 系数; $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)$ 是离子振动模式的湮灭 (产生) 算符; ν 为离子在势阱中的振动频率; ω_{0h} 为基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e_1\rangle$ 之间的跃迁频率; ω_{0c} 为基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e_2\rangle$ 之间的跃迁频率; ω_{Lh} 为蓝边带激光的激光频率; ω_{Lc} 为红边带激光的激光频率; $\hat{\sigma}_{zh} = |e_1\rangle\langle e_1| - |g\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_{zc} = |e_2\rangle\langle e_2| - |g\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_h = |g\rangle\langle e_1|$ 描述 $|e_1\rangle \rightarrow |g\rangle$ 的过程, $\hat{\sigma}_c = |g\rangle\langle e_2|$ 描述 $|e_2\rangle \rightarrow |g\rangle$ 的过程, 而 $\hat{\sigma}_h^\dagger$ 和 $\hat{\sigma}_c^\dagger$ 分别为 $\hat{\sigma}_h$ 和 $\hat{\sigma}_c$ 的厄米共轭算符.

离子的总哈密顿量 H 变换到相互作用表象下, 即

$$\hat{H}_I = \eta\Omega_h(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_h^\dagger + \hat{a}\hat{\sigma}_h) + \eta\Omega_c(\hat{a}\hat{\sigma}_c^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_c). \quad (5)$$

通过以下 Lindblad 主方程进行描述:

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[H_1, \hat{\rho}] + \gamma_h D[\sigma_h] \hat{\rho} + \gamma_c D[\sigma_c] \hat{\rho}, \quad (6)$$

$$D[\sigma_h] \hat{\rho} = \sigma_h \hat{\rho} \sigma_h^\dagger - \frac{1}{2}(\sigma_h^\dagger \sigma_h \hat{\rho} + \hat{\rho} \sigma_h^\dagger \sigma_h), \quad (7)$$

$$D[\sigma_c] \hat{\rho} = \sigma_c \hat{\rho} \sigma_c^\dagger - \frac{1}{2}(\sigma_c^\dagger \sigma_c \hat{\rho} + \hat{\rho} \sigma_c^\dagger \sigma_c), \quad (8)$$

其中, γ_h 和 γ_c 分别为激发态 $|e_1\rangle$ 和 $|e_2\rangle$ 对应的有效衰减率; $\hat{\rho}$ 为密度矩阵.

3 模拟结果

3.1 量子声子激光态的相图、Wigner 准概率分布与声子数分布

通过求解量子系统的 Lindblad 主方程 (6), 本文将深入地分析声子激光态的量子特性. 选取参数为 $\gamma_c = 100$ 和 $\gamma_h = 1$, 并令 $g_c = \eta\Omega_c$, $g_h = \eta\Omega_h$. 每组耦合参数 g_c 和 g_h 都对应一个特定的哈密顿量 H_1 , 将这些参数代入 (6) 式进行数值求解, 得到相应参数条件下的平均声子数 $\langle \hat{n} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$. 通过系统地改变耦合参数, 获得如图 2(a) 所示的稳态相图, 从而能够清晰展示系统在不同参数区域下的稳定特性.

如图 2(a) 所示, 根据阈值线 L1 和分界线 L2, 相图可明确分为三个特征区域: A 区域、B 区域和 C 区域. 具体而言: A 区域位于阈值线 L1 的左侧; B 区域分布于阈值线 L1 右侧且位于分界线 L2 上方; C 区域则处于分界线 L2 下方. 在 A 区域内, 声子数分布呈现出典型的热态分布特征. 而在 B 区域内, 离子进入自激振荡的运动状态, 表现出稳定的振幅和随机的相位. 而 C 区域内的结果是在截断次数 (即计算的迭代次数) 为 600 时仍未收敛的区域, 该区域包括平均声子数大于 600 的声子激光态以及非稳态. 需要说明的是, 图 2(a) 中出现的 C 区域是由于数值计算中迭代次数不足导致的非稳态结果, 因此在本文分析中可以不予考虑.

本文采用两种方式来判断声子激光态的阈值, 第一种方法如图 2(b) 所示, 热态与声子激光态之间的阈值线 L1 是通过分析不同参数条件下平均声子数 $\langle n \rangle$ 随调控参数的变化特征得以确定. 具体而言, 当系统参数跨越临界值时, 平均声子数会出现显著跃变, 该跃变点即为相变阈值点. 为了精确地确定这一临界点, 采用数值微分方法对曲线进行求偏导处理, 导数极值点对应系统的相变阈值. 通过系统性地扫描参数空间并确定各参数组合下的相

变阈值, 最终构建出完整的阈值线 L1. 另一方面, 系统的分界线 L2 是通过声子数随时间演化的长期行为来判定的. 在稳定区域内, 平均声子数经过短暂的弛豫过程后会迅速收敛至稳态值; 而在非稳定区域, 平均声子数表现出持续增长的动力学特征, 直至数值模拟的截断条件被触发. 基于这种动力学行为的差异性, 可以得到迭代次数为 600 时的系统分界线 L2.

另一种判断声子激光态阈值的重要方法是比较 A、B 两个区域内 Wigner 准概率分布函数与声子数分布的差异特性. Wigner 准概率分布函数作为量子相空间理论的核心数学表述, 可以通过对应的 Wigner 函数在位置-动量相空间中来实现声子激光态的完整刻画. 其一般数学表达式为

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x+y | \hat{\rho} | x-y \rangle e^{2ipy/\hbar} dy, \quad (9)$$

式中, x 和 p 分别表示位置算符 $\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$ 和动量算符 $\hat{p} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/(\sqrt{2}i)$ 的本征值; \hbar 表示普朗克常数; $\hat{\rho}$ 为系统密度矩阵. 而分析声子激光应该关注离子的声子态, 声子态的 Wigner 准概率分布函数与声子数分布函数之间存在着数学对应关系, 外态的约化密度矩阵 $\hat{\rho}_{ph}$ 可以由系统的密度矩阵 $\hat{\rho}$ 部分求迹得到 [33]:

$$\hat{\rho}_{ph} = \text{Tr}_{in} \hat{\rho}. \quad (10)$$

声子数分布可以通过 $\hat{\rho}_{ph}$ 对角矩阵元来反映:

$$P(n) = \langle n | \hat{\rho}_{ph} | n \rangle. \quad (11)$$

基于此, 本文选取平均声子数小于 10 的量子区域进行系统分析 [30], 以揭示声子激光态在量子区域的独特性质. 图 2(c) 和图 2(d) 分别展示了阈值线 L1 两侧具有典型意义的特征点 D1 和 D2 的 Wigner 准概率分布. 分析发现: 在点 D1 处, Wigner 函数呈现出对称的高斯型分布特征, 这反映了系统处于热平衡态时的统计特性; 而在点 D2 处, Wigner 函数则表现出明显的环形结构, 形成典型的极限环分布, 同时伴随声子数分布的泊松统计特性, 这些特征清晰地表明了系统已进入量子相干态区域. 这一对比分析不仅直观展示了系统在 A、B 两个参数区域下声子态的量子统计特性差异, 更为理解声子激光态从经典区域到量子区域的相变过程提供了重要的依据.

在临界阈值左侧 A 区域, 离子的坐标和动量在长时间演化后趋于稳定态, 因而在相空间中表现

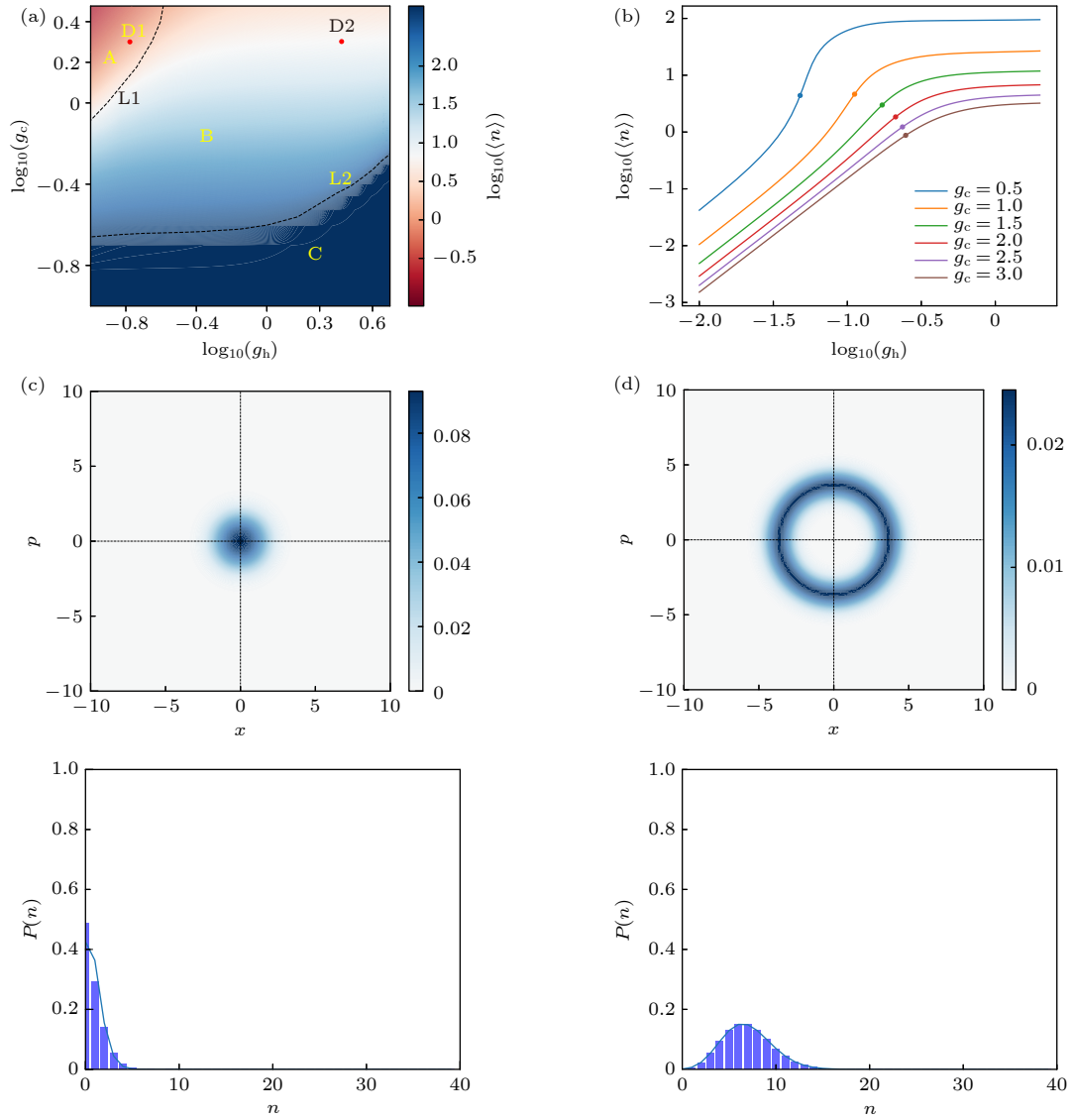


图 2 (a) 相图, 其中横、纵坐标都取以 10 为底的对数. A 区域为热态区域, B 区域为声子激光态区域, C 区域为结果不收敛区域, 虚曲线 L1 是热态与声子激光态的分界线, 虚曲线 L2 则为声子数是否收敛的分界线; (b) 平均声子数随 g_h 的变化, 其中平均声子数取以 10 为底的对数. 平均声子数先是快速上升, 之后会迅速收敛至稳定值; (c) D1(-0.824, 0.301) 点的稳态 Wigner 准概率分布, 对应参数为 $g_h = 0.15$, $g_c = 2$; (d) D2(0.477, 0.301) 点的稳态 Wigner 准概率分布, 对应参数为 $g_h = 3$, $g_c = 2$

Fig. 2. (a) Phase diagram, where the horizontal and vertical coordinates and the average number of phonons are denoted by logarithms with base 10. Number of truncation is 600. Region A is the thermal state region, region B is the phonon laser region, and region C is the non-converging region. The dashed curve L1 is the boundary between the thermal state and the phonon laser, and the dashed curve L2 is the boundary between the converging and diverging regions; (b) the mean phonon number changes with g_h . The average phonon number first goes up quickly, and then converges to a stable value; (c) D1(-0.8239, 0.301) steady state Wigner quasi-probability distribution, with the parameters $g_h = 0.15$, $g_c = 2$; (d) D2(0.4771, 0.301) steady state Wigner quasi-probability distribution, with the parameters $g_h = 3$, $g_c = 2$.

为固定点, 对应的 Wigner 准概率分布呈现高对称性圆斑结构, 其旋转对称特征表明系统处于热平衡态. 当参数跨越临界阈值进入右侧 B 区域时, 系统动力学呈现典型的非线性耗散系统特征, 其在相空间形成稳定振幅的极限环. 在此状态下, Wigner 准概率分布展现出非经典态的相空间结构, 声子数分布可以通过泊松分布进行拟合, 即^[33]

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad (12)$$

式中, λ 表示声子的期望值, 而声子数分布则从高斯分布转变为具有离散特征的泊松分布, 这标志着系统进入了声子激光态区域. 通过观察两个区域内 Wigner 准概率分布与声子数分布的不同可以进一步确定阈值线 L1 的准确性, 即当选取的参数超过阈值线时, 可以从声子态的 Wigner 准概率分布

的环状结构看出其展现出明显的相干性.

由于三能级系统相比二能级系统引入了额外的能级自由度, 这两个系统的相图不能做直接的对比. 虽然两种模型都展现出典型的声子激光阈值效应 (表现为平均声子数在临界点附近的声子数突变)^[33], 但二者的阈值条件呈现出显著的非普适性特征. 具体而言, 三能级系统的阈值参数与二能级系统之间不存在简单的标度变换关系. 从后面的实验方案的讨论可以看出, 三能级系统能够更好地描述如图 4(a) 所示的 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子能级结构, 因而能够更准确地反映实际物理系统的动力学行为. 相比之下, 采用二能级近似会因考虑能级数量不够, 无法对实验体系中的动力学给予准确的描述.

3.2 量子声子激光态的二阶关联函数

声子激光的二阶关联函数是区分经典与量子声子行为的核心指标, 能够区分经典声子场 (如热

声子) 和量子声子场 (如单声子源或纠缠声子对). 定义如下^[33]:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) \rangle \langle \hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau) \rangle}, \quad (13)$$

其中 τ 表示时间延迟. 该式描述了在不同时刻 t 和 $t+\tau$, 空间中某一固定位置处单模场的强度相干. 在二阶关联函数的理论计算中, 时间延迟 τ 归一化为某个特征时间尺度, 此时 τ 是无量纲的^[37]. 图 3(a) 中, 黑线的参数对应于图 2(a) 中位于 A 区域的 D1 点, 初始值 $g^{(2)}(\tau) > 1$, 表明热声子在该体系中占主导地位, 此时粒子的统计分布呈现比泊松分布更显著的离散性, 这种现象在实验上表现为声子探测事件在时间维度上呈现反聚束特征, 即声子更倾向于被分离检测而非同时到达. 随着时间延迟 τ 的增加, 二阶关联函数 $g^{(2)}(\tau)$ 会呈现指数衰减趋势, 并逐渐趋近于 1, 其衰减时间与声子本征寿命相关. 而红线的参数对应于图 2(a) 中位于 B 区域的 D2

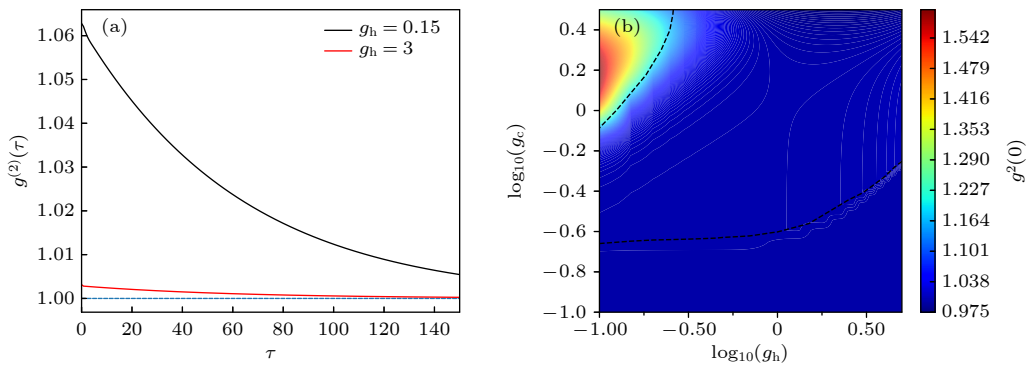


图 3 (a) 声子激光态阈值上下的二阶关联函数 $g^{(2)}(\tau)$, 相关参数 $g_c = 2$; (b) 零时间延迟情况下的二阶关联函数 $g^{(2)}(0)$
 Fig. 3. (a) Second-order correlation function $g^{(2)}(\tau)$ above and below the phonon laser threshold, where the parameter is $g_c = 2$; (b) second-order correlation function $g^{(2)}(0)$ with zero time delay.

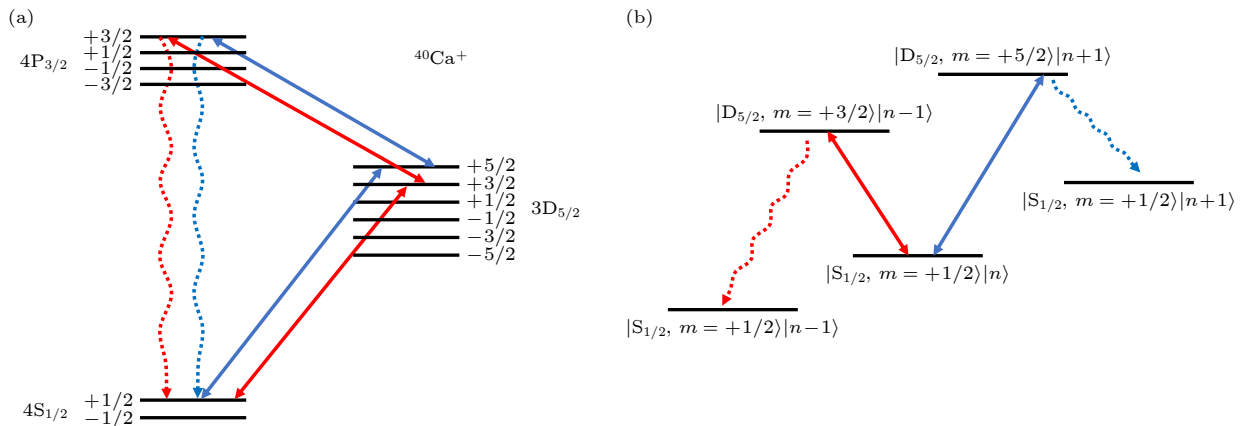


图 4 (a) $^{40}\text{Ca}^+$ 内部能级结构图. 蓝线和红线分别代表蓝边带加热和红边带冷却. (b) 蓝边带加热和红边带冷却过程的示意图
 Fig. 4. (a) Internal energy level scheme. The blue and red lines represent blue-sideband heating and red-sideband cooling, respectively. (b) Schematic diagram of the blue-sideband heating process and the red-sideband cooling process.

点, 其 $g^{(2)}(\tau)$ 值基本保持在 1 附近, 会表现出典型的相关特性.

零时间延迟情况下 ($\tau = 0$), $g^{(2)}(\tau)$ 简化为 $g^{(2)}(0)$ [33]:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2}, \quad (14)$$

式中, $\langle n \rangle$ 为平均声子数. 如图 3(b) 所示, 在 A 区域, $g^{(2)}(0) > 1$, 表明声子体系存在聚束效应, 这一现象表现为声子在时间和空间维度上呈现非均匀的成簇分布, 其统计特性偏离泊松分布, 展现出明显的聚集性涨落特征; 而在 B 区域, $g^{(2)}(0) \approx 1$, 系统表现出相干特性, 其声子数分布呈现泊松分布特征.

4 实验方案

4.1 量子区域内声子激光态的产生

实验上选取的 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子能级如图 4(a) 所示, 研究主要聚焦于 $4\text{S}_{1/2}$, $4\text{P}_{3/2}$ 和 $3\text{D}_{5/2}$ 三个能级对应的精细结构分裂态, 即 $4\text{S}_{1/2}$ 的 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle$, $3\text{D}_{5/2}$ 的 $|3\text{D}_{5/2}, m = +5/2\rangle$ 和 $|3\text{D}_{5/2}, m = +3/2\rangle$ 以及 $4\text{P}_{3/2}$ 的 $|4\text{P}_{3/2}, m = +3/2\rangle$, 其中 $4\text{P}_{3/2}$ 的 $|4\text{P}_{3/2}, m = +3/2\rangle$ 为蓝边带加热过程和红边带冷却过程的辅助态, 具体的实验过程如下.

首先采用边带冷却技术, 将 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子的运动自由度冷却至基态, 从而有效地抑制离子热运动引起的退相干效应, 为后续的量子态操控奠定基础.

在 729 nm 激光的蓝边带驱动下, 离子首先从 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle \otimes |n\rangle$ 态跃迁并产生一个声子至 $|3\text{D}_{5/2}, m = +5/2\rangle \otimes |n+1\rangle$ 态; 随后在 854 nm 激光作用下跃迁到 $|4\text{P}_{3/2}, m = +3/2\rangle \otimes |n+1\rangle$ 态, 最终通过自发辐射回到 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle \otimes |n+1\rangle$ 态, 这一系列跃迁过程实现了对离子的蓝边带加热机制.

相反地, 在 729 nm 激光的红边带驱动下, 离子表现出不同的动力学行为从 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle \otimes |n\rangle$ 态跃迁并湮灭一个声子至 $|3\text{D}_{5/2}, m = +3/2\rangle \otimes |n-1\rangle$ 态; 随后经 854 nm 激光激发至 $|4\text{P}_{3/2}, m = +3/2\rangle \otimes |n-1\rangle$ 态, 最终自发辐射回到 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle \otimes |n-1\rangle$ 态, 这一过程构成了红边带冷却机制.

上述红边带冷却和蓝边带加热过程中主要涉及 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle$, $|3\text{D}_{5/2}, m = +5/2\rangle$ 和 $|3\text{D}_{5/2},$

$m = +3/2\rangle$ 三个态, 分别对应如图 1(b) 所示 $|g\rangle$, $|e_1\rangle$ 和 $|e_2\rangle$ 三个态; 而 $|n\rangle$, $|n-1\rangle$ 和 $|n+1\rangle$ 则代表声子态, 蓝线代表蓝边带加热过程和红线代表红边带冷却过程, 综合这些可以得到如图 4(b) 的示意图. 在声子激光态的产生过程中, 蓝边带加热与红边带冷却这两种竞争机制达到动态平衡, 从而有效地维持了离子振动模式的稳态, 这种平衡机制使得系统能够在量子操控过程中保持稳定的动力学特性.

4.2 量子区域内声子激光态的测量

量子区域内声子激光态可以通过测量特征函数再经过二维傅里叶变换得到 Wigner 函数从而实现量子态的表征, 具体过程如下.

首先将离子振动态制备至 $|\psi\rangle$, 电子自旋态制备至 $|4\text{S}_{1/2}, m = +1/2\rangle$, 然后用载波 $\hat{R}(\theta, \phi = 0)$ 作用于电子自旋态, 用位移算符 $\hat{D}(\alpha)$ 作用于离子振动态, 然后通过测量期望值 $\langle \hat{Z} \rangle$ 可以得到特征函数 $\chi(\alpha) = \langle \psi | \hat{D}(\alpha) | \psi \rangle$ [31], 具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \langle \hat{Z} \rangle &= \langle e^{i\theta} \hat{D}(-\alpha) + e^{-i\theta} \hat{D}(\alpha) \rangle / 2 \\ &= \cos(\theta) \text{Re}[\chi(\alpha)] + \sin(\theta) \text{Im}[\chi(\alpha)], \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\hat{D}(\alpha)$ 为位移算符; θ 为电子自旋态在 Bloch 球上旋转的角度; ϕ 为载波的相位; 特征函数虚部 $\text{Im}[\chi(\alpha)]$ 的测量采用 $\theta = \pi/2$ 的载波, 而特征函数实部 $\text{Re}[\chi(\alpha)]$ 的测量则采用 $\theta = 0$ 的载波, 具体的实现过程可以参考 Flühmann 与 Home [31] 的报道.

通过测量离子运动量子态的特征函数, 并对其进行二维傅里叶变换, 可以重构出量子声子激光态的 Wigner 函数, 从而实现量子态的完整表征. Wigner 函数不仅能够揭示量子态的相干性和相位信息, 还能够反映量子态的压缩、纠缠等非经典特性.

5 总结

本文基于三能级原子的理论模型, 对单离子量子区域内的声子激光态进行了理论模拟, 通过求解主方程获得了声子激光态的稳态相图, 分析了声子激光态的 Wigner 准概率分布和二阶关联特性. 另外, 虽然三能级模型与二能级模型的相图不能在相同参数下比较, 但通过比较两个模型的声子激光产生阈值可以发现两者存在显著的偏差, 表明模型的阈值条件具有系统依赖性, 不能简单相互替代.

通过优化蓝边带和红边带激光与离子的相互作用强度, 实现相干声子态的可控激发与振动量子态的精确调控, 获得具有泊松统计特性的稳定声子激光态输出. 在实验方案中, 采用特征函数测量声子激光态的量子态, 不仅可以精确地提取声子激光态的相干性和相位信息, 还能深入分析量子态的分布特性. 该研究成果不仅为量子声子激光态的物理实现提供了新思路, 也为量子信息处理中的声子态操控和基于囚禁离子的精密测量技术开辟了新途径.

参考文献

- [1] Qiao H, Dumur É, Andersson G, Yan H, Chou M H, Grebel J, Conner C R, Joshi Y J, Miller J M, Pover R G, Wu X, Cleland A N 2023 *Science* **380** 1030
- [2] Kuang T F, Huang R, Xiong W, Zuo Y L, Han X, Franco N, Qiu C W, Luo H, Jing H, Xiao G Z 2023 *Nat. Phys.* **19** 414
- [3] Xiao G Z, Kuang T F, He Y T, Chen X L, Xiong W, Han X, Tan Z Q, Luo H, Jing H 2024 *eLight* **4** 17
- [4] Cleland A Y, Wollack E A, Safavi-Naeini A H 2024 *Nat. Commun.* **15** 4979
- [5] Wang H M, Liu X B, Hu S Q, Chen D Q, Chen Q, Zhang C, Guan M X, Meng S 2023 *Sci. Adv.* **9** 33
- [6] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [7] Vahala K, Herrmann M, Knünz S, Batteiger V, Saathoff G, Hänsch T W, Udem Th 2009 *Nat. Phys.* **5** 682
- [8] Xie Y, Wan W, Wu H Y, Zhou F, Chen L, Feng M 2013 *Phys. Rev. A* **87** 053402
- [9] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J 2001 *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [10] Lee T E, Sadeghpour H R 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 234101
- [11] Knünz S, Herrmann M, Batteiger V, Saathoff G, Hänsch T W, Vahala K, Udem Th 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 013004
- [12] Liu Z C, Wei Y Q, Chen L, Li J, Dai S Q, Zhou F, Feng M 2021 *Phys. Rev. Appl.* **16** 044007
- [13] Zhang Q K, Yang C, Sheng J T, Wu H B 2022 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **52** 119
- [14] Ripin A, Peng R, Zhang X W, Chakravarthi S, He M H, Xu X D, Fu K M, Cao T, Li M 2023 *Nat. Nanotechnol.* **18** 1020
- [15] Häffner H, Roos C F, Blatt R 2008 *Phys. Rep.* **469** 155
- [16] Blatt R, Roos C F 2012 *Nat. Phys.* **8** 277
- [17] Monroe C, Kim J 2013 *Science* **339** 1164
- [18] Akerman N, Kotler S, Glickman Y, Dallal Y, Keselman A, Ozeri R 2010 *Phys. Rev. A* **82** 061402
- [19] Lee T E, Cross M C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 143001
- [20] Li Y T, Li H H, Zhu Y, Zhang M, Yang J Z 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066212
- [21] Lin G D, Duan L M 2011 *New J. Phys.* **13** 075015
- [22] Petri C, Meyer S, Lenz F, Schmelcher P 2011 *New J. Phys.* **13** 023006
- [23] Dutta S, Cooper N R 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 250401
- [24] Wächtler C W, Platero G 2023 *Phys. Rev. Res.* **5** 023021
- [25] Grudinin I S, Lee H, Painter O, Vahala K J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 083901
- [26] Kemiktarak U, Durand M, Metcalfe M, Lawall J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 030802
- [27] Cohen J D, Meenehan S M, MacCabe G S, Gröblacher S, Safavi-Naeini A H, Marsili F, Shaw M D, Painter O 2015 *Nature* **520** 522
- [28] Pettit R M, Ge W C, Kumar P, Luntz-Martin D R, Schultz J T, Neukirch L P, Bhattacharya M, Vamivakas A N 2019 *Nat. Photonics* **13** 402
- [29] Wen Y T, Ares N, Schupp F J, Pei T, Briggs G A D, Laird E A 2020 *Nat. Phys.* **16** 75
- [30] Behrle T, Nguyen T L, Reiter F, Baur D, Neeve B, Stadler M, Marinelli M, Lancellotti F, Yelin S F, Home J P 2023 *Phys. Rev. Lett.* **131** 043605
- [31] Flühmann C, Home J P 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 043602
- [32] He S W, Deng Z J, Xie Y, Wang Y Y, Chen P X 2024 *Opt. Express* **32** 13998
- [33] He S W 2024 *M. S. Thesis* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [何思文 2024 硕士学位论文 (长沙: 国防科技大学)]
- [34] Loudon R 2000 *The Quantum Theory of Light* (Oxford: Oxford University Press)
- [35] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge, England: Cambridge University Press)
- [36] Xie J, Zhang A N, Cao N P, Xu H C, Zheng K M, Poon Y T, Sze N S, Xu P, Zeng B, Zhang L J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 150401
- [37] Zhang Z M 2015 *Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p126 (in Chinese) [张智明 2015 量子光学 (北京: 科学出版社) 第 126 页]

Single-ion phonon laser in quantum region*

DONG Yuanzhang^{1)2)#} HE Siwen^{3)#} DENG Zhijiao^{3)†} LI Peidong¹⁾²⁾

CHEN Liang^{1)‡} FENG Mang^{1)††}

1) (*Innovation Academy of Precision Measurement Science and Technology, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China*)

2) (*University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

3) (*College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

(Received 7 May 2025; revised manuscript received 1 August 2025)

Abstract

The quantum phonon laser state is a vibrational state generated by phonon coherent amplification technology based on the principles of quantum mechanics. Its core feature is to achieve coherent excitation and manipulation of phonon quantum states through precise control of phonon dynamics. This technology has broken through the classical physical limits of the traditional phonon laser state, providing a brand-new research method for quantum information technology. Previous research on quantum phonon laser states mainly focused on quantum van der Bohr oscillators. Quantum van der Bohr oscillators, as typical representatives of nonlinear quantum systems, have demonstrated significant theoretical value and broad application prospects in trapped-ion systems in recent years. These research breakthroughs not only successfully expand the research scope of traditional nonlinear dynamics to the quantum domain, but more importantly, provide a brand-new experimental platform and theoretical framework for exploring quantum nonlinear phenomena.

Although the realization of quantum phonon laser state has been verified in two-ion systems, its practical application still faces significant challenges. The present paper explores how a single trapped ion generates quantum phonon laser states based on the three-level model. By numerically solving the quantum master equation, the steady-state characteristics of the phonon laser state are systematically analyzed, with a focus on the quantum statistical behavior of the system, including the evolution laws of the Wigner quasi-probability distribution function and the second-order correlation function. This paper also presents a specific experimental scheme, which is based on a single trapped $^{40}\text{Ca}^+$ ion and uses a dual-color light field composed of a blue-sideband and a red-sideband lasers to generate quantum phonon laser states. By introducing the characteristic function of motion quantum states, the precise quantum state tomography of phonon laser states is achieved, thus providing a new approach for characterizing quantum states. In addition, there is a two-level model discussing the threshold effect of phonon lasers. However, it is found that the three-level model constructed in the present paper has significantly different phonon laser thresholds compared with the two-level model, and the three-level model can more accurately describe the physical mechanisms of complex quantum phonon laser states.

Keywords: trapped ions, Wigner function, phonon laser state

PACS: 37.10.Ty, 03.65.-w, 42.50.-p

DOI: 10.7498/aps.74.20250603

CSTR: 32037.14.aps.74.20250603

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. U21A20434, 12074390, 92265107), the Science and Technology Program of Guangzhou, China (Grant Nos. 202201011727, 2023A04J0050), the Wuhan Natural Science Foundation, China (Grant No. 2024040701010063), and the Nansha Senior Leading Talent Team Project of Guangzhou, China (Grant No. 2021CXTD02).

These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: dengzhijiao926@hotmail.com

‡ Corresponding author. E-mail: liangchen@wipm.ac.cn

†† Corresponding author. E-mail: mangfeng@wipm.ac.cn



量子区域内单离子声子激光态的研究

董元章 何思文 邓志姣 李沛东 陈亮 冯芒

Single-ion phonon laser in quantum region

DONG Yuanzhang HE Siwen DENG Zhijiao LI Peidong CHEN Liang FENG Mang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 193701 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250603

CSTR: 32037.14.aps.74.20250603

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250603>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

离子阱中以声子为媒介的多体量子纠缠与逻辑门

Phonon-mediated many-body quantum entanglement and logic gates in ion traps

物理学报. 2022, 71(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220360>

微波-声子与光-磁纠缠态的产生

Generation of microwave-phonon and magnon-optics entangled states

物理学报. 2025, 74(5): 054202 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241664>

高电荷态离子阿秒激光光谱研究展望

Prospect for attosecond laser spectra of highly charged ions

物理学报. 2023, 72(19): 193201 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230986>

近玻尔速度能区高电荷态离子与激光等离子体相互作用实验研究装置

Experimental setup for interaction between highly charged ions and laser-produced plasma near Bohr velocity energy region

物理学报. 2023, 72(13): 133401 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230214>

双表面周期性弹性声子晶体板中的谷拓扑态

Valley topological states in double-surface periodic elastic phonon crystal plates

物理学报. 2022, 71(24): 244302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221292>

金刚石氮-空位色心的原子自旋声子耦合机理

Atomic spin and phonon coupling mechanism of nitrogen-vacancy center

物理学报. 2021, 70(6): 068501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201848>