

基于多端口模型设计的非局域薄板弹性波超表面*

俞冠泽 侯志林†

(华南理工大学物理与光电学院, 广州 510640)

(2025 年 5 月 12 日收到; 2025 年 7 月 3 日收到修改稿)

超表面研究的最新进展表明, 实现高效的波前调控需采用非局域超表面结构. 然而, 目前面向固体弹性波波前调控的超表面设计, 仍主要是基于广义斯涅耳定律 (general Snell's law, GSL) 的局域结构, 其转换效率普遍偏低. 本研究将把面向声波的、基于多端口模型的非局域超表面设计方法推广应用于面向薄板弯曲波的超表面设计. 应用该方法, 本工作设计了用于实现薄板弯曲波异常反射、异常透射以及大数值孔径平面聚焦的非局域超表面. 有限元模拟结果表明, 依此设计的异常反射/透射超表面都具有接近 100% 的理想转换效率, 即便对于偏转角度高达 80° 的结构仍然如此; 而依此设计的非局域平面聚焦超表面, 其聚焦效率明显优于相应基于 GSL 的结构, 这一优势在大数值孔径结构中表现得更为明显. 这项工作不仅给出了两种在传感、能量收集等领域具有潜在应用价值的高效非局域超表面结构, 同时也为弹性波非局域超表面的设计提供了一种高效方法.

关键词: 薄板弯曲波, 非局域超表面, 多端口模型, 异常反射, 平面聚焦

PACS: 43.20.+g, 43.40.+s, 46.70.-p

DOI: 10.7498/aps.74.20250618

CSTR: 32037.14.aps.74.20250618

1 引言

超表面作为一类具有亚波长厚度的人工结构, 近年来因其在波场调控方面的独特且高效的性能而受到广泛关注. 最先的超表面结构是针对电磁场调控而设计的^[1-7], 随后这一概念被拓展应用于声波调控^[8-15]. 迄今为止, 研究者们已开发出能实现多种声场调控功能的超表面结构, 这些功能包括声波的异常反射与异常透射^[8-10]、平面波聚焦^[11,12]、波模式转换^[13]以及声全息成像^[14,15]等.

受电磁波超表面研究的启发^[6], 最初的声波超表面设计方法均基于广义斯涅耳定律 (general Snell's law, GSL). 根据 GSL, 超表面的设计过程通常是先构建独立亚单元结构, 以实现目标波场在界面上所需的相位突变, 然后再将这些亚单元结构

拼合成完整的整体. 可以看到, 这种设计方法并不考虑将各亚单元结构在拼合成整体后其间的相互作用, 因此基于 GSL 原理设计的结构也被称为局域结构. 随后的研究表明, 这种基于 GSL 的局域结构在调控波场时其效率往往受到限制, 这种受限在大衍射角的情况下表现得尤为明显^[16].

为突破局域超表面的局限性, 研究者们提出了计入亚单元间耦合的非局域超表面设计. 这种非局域超表面的波场调控效率显著优于基于 GSL 的局域结构, 在包含大角度衍射的应用中表现得尤为突出^[16-25]. 然而, 因为要考虑亚单元之间的相互作用, 非局域超表面的设计过程变得非常复杂. 现有的各种设计方法要么仅适用于具有特定表面形状的超表面结构^[16-20], 要么是基于计算量巨大的数值方法 (通常为有限元数值方法) 进行寻优的设计方法^[21-23], 因此其应用场景受到限制.

* 国家自然科学基金 (批准号: 12274143) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: phzlh@scut.edu.cn

针对上述难题, Ren 等^[26,27]提出了一种基于多端口模型的面向声波调控的超表面设计方法. 该方法不仅可计入亚单元间的耦合作用, 还能大幅降低结构寻优过程中因重复运算所带来的计算负担, 因此适用于各类非局域超表面设计, 其优势在设计包含大量亚单元的结构, 比如聚焦、全息等结构时尤为明显. 但目前该方法仅适用于流体声超表面的结构设计.

作为声波超表面的并行研究, 弹性波超表面的研究同样得到了广泛关注. 面向固体中弹性波调控的超表面设计在无损检测^[28]、传感^[29]和能量收集^[30]等领域具有重要的应用价值. 与流体中的声波只存在一支独立传播模式不同, 固体中的弹性波具有 3 支独立的传播模式, 因此其物理性质相比于流体中的声波更为复杂. 目前, 已报道的固体弹性波超表面结构包括剪切波-纵波模式转换超表面^[31,32]、异常反射/透射超表面^[31-42]以及平面聚焦超表面^[43-52]等. 然而, 这些设计大多均为基于 GSL 的局域结构^[33-37,45-48], 因此与声波局域结构类似, 也存在转换效率上的局限性, 并且这种局限在需要将入射弹性波进行大角度偏转时表现得尤为明显^[41].

为了解决这一问题, 近年来研究者们相继提出了多种弹性波非局域超表面实现方法^[31,32,38-42,53]. 例如, Yuan 等^[39]采用带螺柱的条状板作为构成单元, 通过优化各个螺柱上螺帽的旋入深度, 实现了薄板弯曲波的高效异常透射; Oh 等^[40]通过在薄板上穿孔的方式构造超表面, 通过优化圆形孔的位置与半径, 实现了薄板弯曲波的异常反射; Su 等^[41]利用多弯折条板作为构造单元, 通过弯折参数的优化, 构建了薄板弯曲波的异常透射; Zhu 等^[53]则通过额外地引入连接桥的方式, 在亚单元间引入非近邻耦合, 实现了薄板中弹性波的宽频全内反射. 然而, 这些设计大多数都是基于有限元数值计算的优化算法, 其缺点是需要优化的每一步中均对弹性波的散射行为进行数值计算. 因此, 需要消耗巨大的计算资源, 难以推广应用于诸如聚焦超表面、全息超表面等包含大量亚结构单元的超表面设计.

本文将文献^[26]中提出的、基于多端口模型的超表面设计方法推广应用于弹性波非局域超表面结构的设计. 我们以无限大自由薄板中弯曲波的调控为例, 设计了两种功能器件: 即异常反射/透射超表面及平面聚焦超表面. 对于异常反射/透射超

表面, 我们设计了 6 种不同的结构, 分别可实现将正入射弯曲波偏转至沿 60° , 70° 和 80° 共 3 个方向的异常反射及透射, 有限元数值模拟结果显示其理论转换效率均接近 100%. 对平面聚焦超表面, 我们共设计了横向尺寸各为 $10\lambda_0$ 和 $20\lambda_0$ 的两类、四种结构, 分别可实现正入射情况下、焦距为 $2\lambda_0$ 的反射及透射式聚焦, 其中 λ_0 为薄板中弯曲波的波长. 数值分析结果表明, 相比基于 GSL 的局域结构, 我们提出的非局域结构具有更高的聚焦效率. 需要特别指出的是, 由于平面聚焦超表面包含了较大数目的亚单元结构, 采用之前提出的基于有限元数值计算的寻优方法难以完成结构设计.

本文接下来的内容将作如下安排: 在第 2 节中, 以异常反射/透射超表面的设计为例, 将基于多端口模型的超表面设计方法拓展应用于无限大自由薄板弯曲波超表面的设计; 第 3 节中, 进一步将该方法应用于平面聚焦超表面的设计; 第 4 节为全文的总结.

2 异常反射/透射超表面的设计

考虑如图 1(a) 所示的无限大自由弹性薄板, 通过在薄板的正反两表面各安装两排弹性圆柱体来实现对入射波波前的调控. 图中, 板的厚度用 h_0 标记, 两排圆柱体之间的距离记为 d_r . 我们的设计目标是调节这些圆柱体的高度 h_n ($n = 1, 2, \dots, N$), 使得薄板中以 θ_i 角入射的平面波以角度 θ_r 反射或以 θ_t 透射 (其中 $\theta_{r,t} \neq \theta_i$). 这一效应在早前的研究中被命名为异常反射或异常透射^[10], 其效应如图 1(a) 左侧图中的彩色箭头所示.

需要指出的是, 在自由薄弹性板中存在两类独立的 Lamb 波模式, 即对称 Lamb 波和反对称 Lamb 波. 这两类模式可分别由对称或反对称源激发. 在本研究中, 我们只对最低阶的反对称 Lamb 波进行操作. 这一模式通常也被称为薄板弯曲波. 根据弹性理论^[49], 在工作角频率为 ω 时, 薄板弯曲波的波长 λ_0 可由公式 $\lambda_0 = 2\pi \sqrt[4]{D_0/\rho_0 h_0 \omega^2}$ 计算, 式中 $D_0 = E_0 h_0^3 / 12 (1 - \nu_0^2)$ 表示薄板的弯曲刚度, E_0 , ρ_0 和 ν_0 分别表示薄板材料的弹性模量、质量密度和泊松比. 为防止薄板中对称模式与反对称模式的相互转化, 我们将结构中正、反表面对应位置的每一对柱体设置为相同高度, 使得结构整体关于板中面保持完全对称, 如图 1(a) 所示.

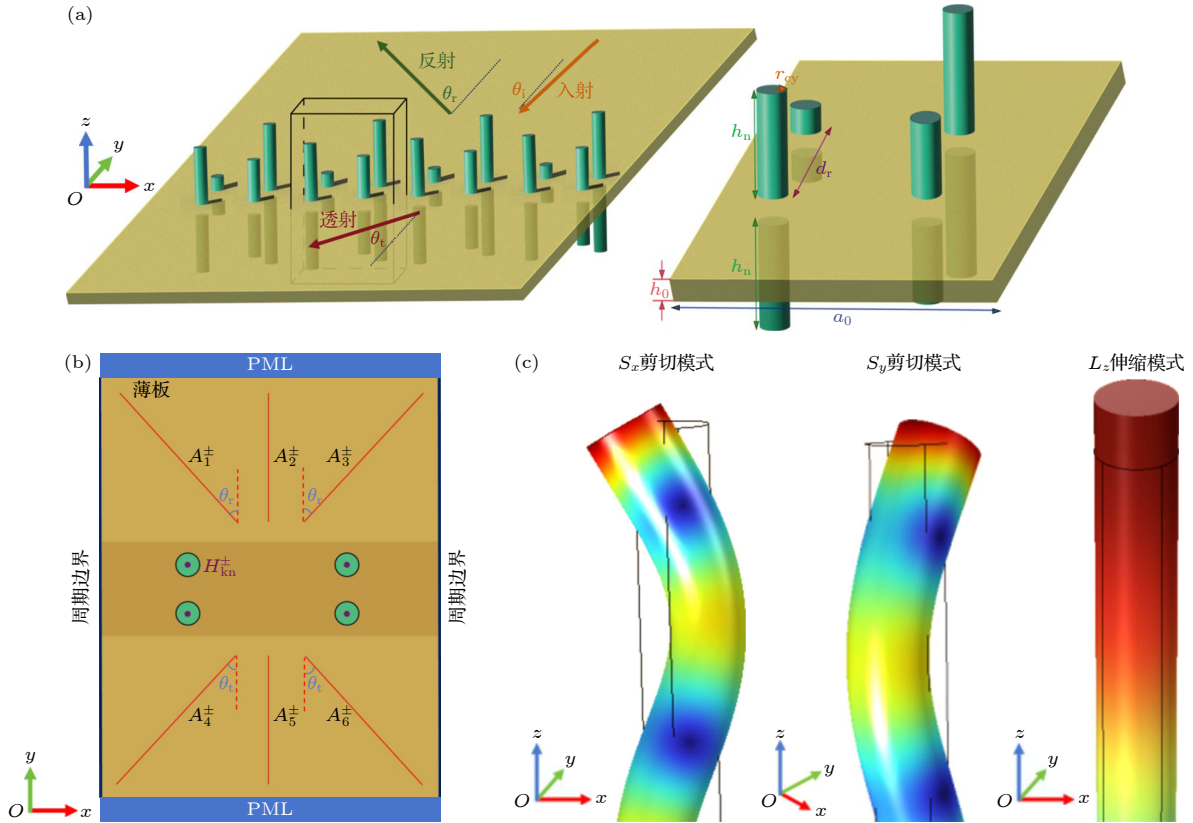


图 1 (a) 超表面结构示意图, 其中, 左侧子图示意出弹性柱体 (绿色) 对称地安装于弹性薄板正、反两个表面; 空心盒子标出了一个单元, 图中带箭头的线段示意出沿 θ_i 方向入射的平面波被反射/透射至沿 θ_r / θ_t 方向的情况, 右侧图展示了单元的结构细节, 其中元胞的横向尺寸、薄板的厚度和两排圆柱之间的间距分别用符号 a_0 , h_0 和 d_r 表示, 柱体的半径用 r_{cy} 表示, h_n 表示位于薄板正、反表面上第 n 对圆柱的高度; (b) 单元结构俯视图, 图中深色区域示意出多端口模型, 带箭头的线段表示薄板中的输入/输出端口, $A_1^\pm, A_2^\pm, \dots, A_6^\pm$ 为端口中的波模式振幅, 绿色圆圈为弹性柱体, H_{kn}^\pm 为第 n 个柱体中的第 k 支波模式 (端口) 的振幅; (c) 弹性圆柱中可与薄板弯曲振动相耦合的 3 支模式的形变示意图, 从左到右分别为两支剪切模 (标记为 S_x 和 S_y) 及一支伸缩模式 (标记为 L_z)

Fig. 1. (a) Schematic view of the structure for the metasurface, in the left panel, elastic rods (in green) are assembled symmetrically on both side of the plate, arrows in color show the effect of deflecting a plane wave from θ_i to θ_r or θ_t direction, the unit cell of the structure is shown by a hollow box, the right panel shows the detailed structure of a single unit cell, the symbols a_0 , h_0 , and d_r represent respectively the size of the unit cell in x direction, the thickness of the plate, and the distance between two rows of cylinders. The radius of the cylinder is denoted by r_{cy} , the height of the n -th pair of cylinders is denoted by h_n ; (b) top view of the unit cell. The multi-port structural model is marked in deep color. The red lines indicate the ports in the plate. The amplitudes of the modes in these ports are denoted by $A_1^\pm, A_2^\pm, \dots, A_6^\pm$, respectively, circles in green are elastic cylinders, the amplitude of the k -th mode in the n -th cylinder is denoted by H_{kn}^\pm ; (c) the deformation of three vibration modes in cylinders that can couple with the flexural wave in thin plate, from the left to the right are the shear modes (S_x and S_y) and longitudinal mode (L_z), respectively.

根据文献 [25] 的理论, 异常反射/透射超表面可以理解成一种具有特殊结构的格栅, 它能够将衍射阶为 0 阶的入射模式完美转换为其它高阶衍射模式. 按照这一理论, 异常反射/透射超表面应具有与格栅结构类似的周期性结构, 因此需要沿 x 轴以合适的周期 a_0 排列弹性圆柱体. 在给定的薄板中, 能将入射角为 θ_i 的平面波反射/透射至沿 θ_r / θ_t 方向的超表面结构, 其周期应设定为 $a_0 = \frac{\lambda_0}{n |\sin \theta_i - \sin \theta_{r,t}|}$, 其中 n 为整数. 在这一周期长度

下, 当 $\sin \theta_i < \sin \theta_{r,t}$ ($\sin \theta_i > \sin \theta_{r,t}$) 时, 目标衍射阶次将对应于第 $+n$ ($-n$) 阶衍射模式.

在确定了周期 a_0 之后, 下一步是确定每个周期内各对弹性柱体的高度. 为此, 本文采用类似于文献 [26] 中提出的逆向设计方法. 要利用该方法设计超表面, 首先需要定义一个具有多个输入/输出端口的封闭结构. 以下将以沿 $\theta_i = 0$ 方向入射的平面波反射 (折射) 至沿 $\theta_{r,t}$ ($|\theta_{r,t}| > 30^\circ$) 方向的平面波的结构为例, 对多端口模型进行说明. 对于此类

超表面, 其周期应设为 $a_0 = \frac{\lambda_0}{\sin|\theta_{r,t}|}$, 相应的多端口结构如图 1(b) 所示.

在定义了多端口结构后, 接下来就可以确定结构中的各个端口. 由于这一封闭结构可以通过薄板和圆柱体中的波模式与外界交换波能量, 因此需要分别在薄板及圆柱体中定义端口. 在薄板中, 由于可能的衍射模式包括超表面两侧的 0 阶和 ± 1 阶衍射模式, 因此总共有 6 个端口, 如图 1(b) 所示. 下文中用 $\mathbf{A}^\pm = (A_1^\pm \ A_2^\pm \ A_3^\pm \ A_4^\pm \ A_5^\pm \ A_6^\pm)^\top$ 来表示这些端口中的波模式幅度, 其中上标 $+$ ($-$) 分别表示指向 (离开) 多端口结构的传播模式.

对于圆柱体内的端口, 由于每个圆柱体中共存在 3 个模式与薄板弯曲波耦合, 即位移沿 x 方向的剪切模式 S_x 、位移沿 y 方向的剪切模式 S_y , 以及位移沿 z 方向的伸缩模式 L_z , 其振动模式的形变如图 1(c) 所示, 因此每个圆柱体内共需定义 3 个端口. 对于一个包含有 N 个柱体的元胞, 我们用 $\mathbf{H}^\pm = (H_1^\pm \ \dots \ H_{3N}^\pm)^\top$ 表示这些端口中的模式幅度, 其中上标 $+$ ($-$) 同样表示指向 (离开) 多端口结构的传播模式 (需要指出的是, 圆柱体中还存在第 4 个固有模式, 即旋转模式 [54], 但由于此模式不与薄板弯曲波耦合, 因此此处不予考虑).

根据以上定义, 多端口结构中波的散射行为可以表示为

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{S}^A \mathbf{A}^+ + \mathbf{T}^H \mathbf{H}^+, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}^- = \mathbf{T}^A \mathbf{A}^+ + \mathbf{S}^H \mathbf{H}^+. \quad (2)$$

在方程 (1) 中, 矩阵元素 $S_{ij}^A (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 表示当入射模式来自薄板的端口 j 时, 从薄板的端口 i 中反射的反射系数. 类似地, $T_{ik}^H (i = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, 3N)$ 表示当入射模式来自圆柱体的第 k 个端口时, 薄板端口 i 中透射模式的透射系数.

类似地, 在方程 (2) 中, 矩阵元素 $T_{kj}^A (k = 1, 2, \dots, 3N; j = 1, 2, \dots, 6)$ 描述了当入射波来自薄板的端口 j 时, 激发出圆柱体中第 k 个模式的透射系数. 而 $S_{mk}^H (m, k = 1, 2, \dots, 3N)$ 则表示当入射波来自圆柱体中第 k 个模式时, 激发出圆柱体中第 m 个模式的透射系数.

对于圆柱体中的模式, 内向波和向外波可以通过公式 $\mathbf{H}^+ = \mathbf{R}\mathbf{H}^-$ 进一步关联. 在圆柱体末端自由的情况下, 各模式将分别被单独反射而不存在相互耦合, 因此矩阵 \mathbf{R} 的元素具有形式 $R_{km} = r_k \delta_{km}$,

其中 δ_{km} 是克罗内克尔 delta 函数. 需要指出的是, 原理上 r_k 的取值并不受限制, 其模值 $|r_k|$ 可大于 1 也可小于 1. 其中大于 1 表示该模式在柱体的末端有增益. 对于被动无源结构, 必须满足 $|r_k| \leq 1$, 表示柱体中的波模式在其末端被反射时没有增益, 但可能有损耗. 将这一关联式代入方程 (2), 得到方程:

$$(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{S}^H) \mathbf{H}^+ = \mathbf{T}^A \mathbf{A}^+. \quad (3)$$

可以发现, 方程 (1) 和 (3) 构成了一个线性方程组, 应用这一方程组可在给定 \mathbf{A}^+ 的情况下求解 \mathbf{A}^- . 因此通过求解这一线性方程组, 我们可以逆向设计超表面结构. 具体而言, 首先需要确定散射矩阵 \mathbf{S}^A , \mathbf{T}^H , \mathbf{S}^H 和 \mathbf{T}^A , 然后在给定 \mathbf{A}^+ 的情况下, 通过反复求解线性方程组, 寻找合适的 $h_n (n = 1, 2, \dots, N)$, 得到所需的 \mathbf{A}^- . 这一过程可以通过优化算法来实现.

为了完成设计, 我们需要找到圆柱体中各个模式的反射系数与圆柱体高度之间的关联. 由以上分析可知, 每个圆柱体中有 3 个端口, 这 3 个端口中的内向波与外向波间的关系依赖于该柱体的高度. 对于第 n 个圆柱, 由于各模式在柱体末端反射时没有相互转换, 它们之间的关系可表示为

$$\mathbf{H}_n^+ = \mathbf{r}_n \mathbf{H}_n^-, \quad (4)$$

式中, $\mathbf{H}_n^\pm = (H_{x_n}^\pm \ H_{y_n}^\pm \ H_{z_n}^\pm)^\top$, 分别表示第 n 个柱体中的 S_x , S_y 及 L_z 模的幅度; \mathbf{r}_n 定义为

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} e^{i(-2k_x h_n + \varphi_x)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(-2k_y h_n + \varphi_y)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(-2k_z h_n + \varphi_z)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中 h_n 表示第 n 个柱体的高度, k_x , k_y 和 k_z 分别表示 S_x , S_y 和 L_z 模式的波矢, 而 φ_x , φ_y 和 φ_z 则分别表示这 3 支模式在柱体末端反射时的相位突变, 通过采用有限元方法对单个柱体的计算, 可得 $\varphi_{x,y} = -\pi/2$, $\varphi_z = \pi$ [55]. 按照以上表达式, 对于包含 N 个柱体的结构, 在关系式 $\mathbf{H}^+ = \mathbf{R}\mathbf{H}^-$ 中, 各矩阵定义为 $\mathbf{H}^\pm = [\mathbf{H}_1^\pm \ \dots \ \mathbf{H}_N^\pm]$ 及 $\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{r}_1 \ \dots \ \mathbf{r}_N)$.

利用上述方法, 设计了将正入射平面波反射到 θ_r 方向或透射至 θ_t 方向的超表面. 设定入射波的工作频率为 5000 Hz. 薄板材料取为铝, 其杨氏模量 $E_0 = 6.83 \times 10^{10}$ Pa, 质量密度 $\rho_0 = 2700$ kg/m³,

泊松比 $\nu_0 = 0.33$. 取薄板厚度 $h_0 = 1$ mm, 对应其中的弯曲波波长为 $\lambda_0 = 44.0$ mm. 对于圆柱体的设置, 将正、反表面上的两排圆柱沿 x 方向等间距排列, 两排间相距为 $d_r = 0.462\lambda_0$, 每个圆柱的半径取为 $r_{cy} = 0.04a_0$. 圆柱材料选取聚乙烯, 其杨氏模量 $E_{cy} = 6.0 \times 10^8$ Pa, 质量密度 $\rho_0 = 950$ kg/m³, 泊松比 $\nu_0 = 0.48$.

为获得圆柱中各个模式的波传播及在自由末端的反射特性, 采用有限元方法进行数值计算. 在 $\theta_r = 60^\circ$ 的时候, 对于 $r_{cy} = 0.04a_0$ 的圆柱体, 获得其中的剪切振动模式 S_x 及 S_y 的波矢 $k_x = k_y = 143.8$ m⁻¹, 伸缩模式 L_z 的波矢 $k_z = 39.6$ m⁻¹.

采用 MATLAB 中内带的遗传算法来寻求 h_n 的最优值, 以最大化 $|A_1^-|$ (异常反射) 或 $|A_4^-|$ (异常透射) 为优化目标. 优化过程中, 限制每个柱体的高度取值范围为 $1.02\lambda_0 < h_n < 2.84\lambda_0$. 其中, 下限的设定是为了避免柱体与板接触界面处, 以及柱体末端倏逝波的影响, 上限与下限高度之差约为柱体

内压缩模式 L_z 波长的一半, 以使波模式在柱体中来回反射时能获得最大 2π 的相位增量.

依上述方法, 我们设计了反射/折射角度分别为 $\theta_{r,t} = 60^\circ, 70^\circ$ 和 80° 的 6 种结构. 其中, 对于 $\theta_{r,t} = 60^\circ$ 和 $\theta_{r,t} = 70^\circ$ 结构, 每周期上、下表面各安装两排、每排 4 个弹性柱体. 而对反射/折射角度为 $\theta_{r,t} = 80^\circ$ 结构, 每周期在上、下表面各安装两排、每排 6 个弹性柱体. 该配置提供了足够的可调自由度, 足以实现大衍射角情况下对波场的有效控制. 计算所得的 h_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 值如图 2(a) 所示, 图中将靠近入射侧一排柱体的高度用 h_n 标记, 而远离入射侧一排柱体的高度用 h'_n 标记.

为了验证所设计结构的性能, 采用 COMSOL Multiphysics 软件进行三维有限元计算, 据此检查了入射波与反射/透射波之间的能量转换效率. 结果表明, 对于目标角度为 60° 的反射结构, 效率达到了 99.61%, 而透射结构的效率则为 99.64%. 需要指出的是, 因为结构是关于薄板中面对称的, 所以

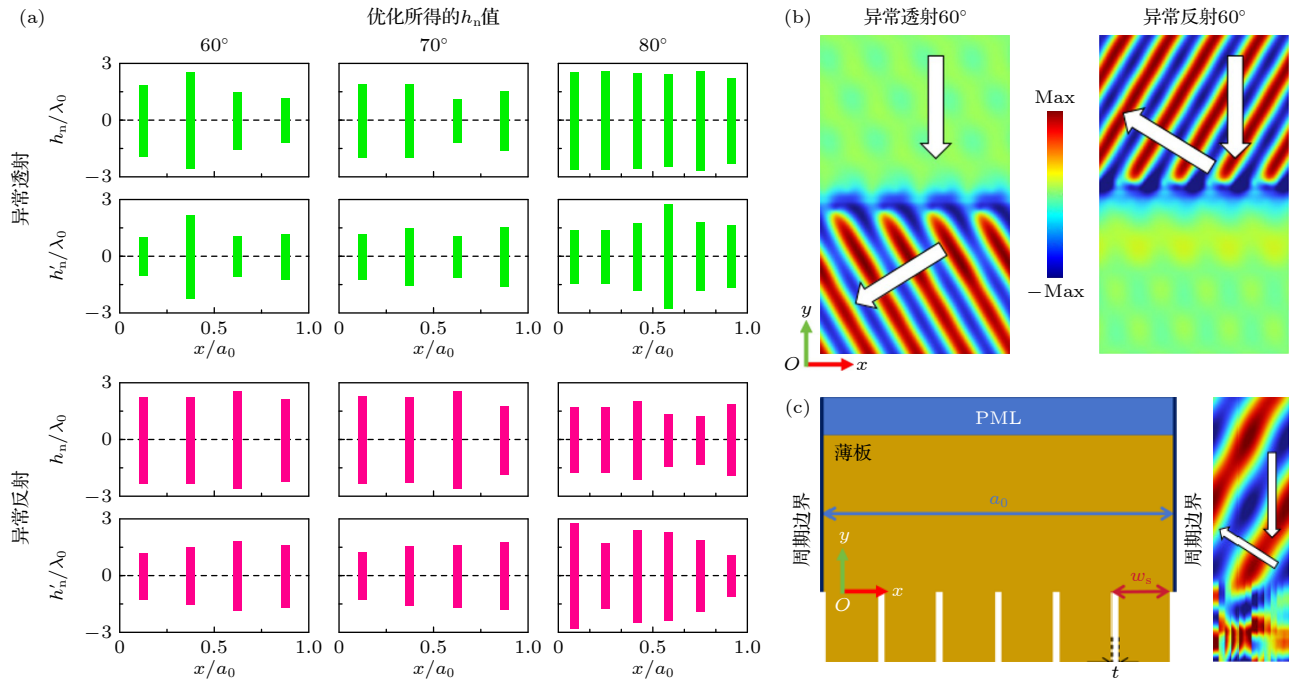


图 2 (a) 优化得到的 $\theta_{r,t} = 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ 结构的 h_n 和 h'_n 值 (近入射侧一排柱体的高度标记为 h_n , 远入射侧一排的柱体高度用 h'_n 标记); (b) $\theta_{r,t} = 60^\circ$ 结构板中面散射 z 分量位移实部的场分布图, 左侧子图对应于异常透射, 右侧子图对应于异常反射, 图中白色箭头示意平面波的传播方向; (c) 用于对比的基于 GSL 的结构构型 (左) 以及 $\theta_r = 60^\circ$ 结构的 z 分量反射位移场分布 (右)

不会出现 A0 模式与 S0 模式之间的转换, 这一结论对于后面的聚焦结构同样成立. 图 2(b) 展示了这两种结构薄板中面上的 z 分量位移场分布, 其中, 左、右子图分别对应透射及反射情况. 对于 70° 和 80° 的反射结构, 转换效率分别达到了 99.57% 和 99.67%, 而折射结构的效率则分别为 99.61% 和 99.64%. 这些结果证明了本文所设计的结构在波前操控方面的高效性.

为了展示所提出的非局域设计相较于局域结构的优越性, 我们还将上述异常反射超表面的结果与对应基于 GSL 的结构的结果进行对比. 对于基于 GSL 的结构, 当反射角分别为 $\theta_r = 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ 时, 计算得到的反射效率分别为 97.97%, 90.97% 和 56.42%. 对比结果表明, 在相同反射角条件下, 非局域设计的效率明显高于 GSL 结构, 尤其是在较大的偏转角情况下, 这一优势更为显著.

在基于 GSL 设计的结构中, 共用了 12 个条状薄板连接在半无限薄板的自由边缘作为实现所需相位突变的结构单元. 每个条状薄板的宽度取为 $w_s = \frac{a_0}{12} - t$, 其中 $t = 0.003a_0$ 代表相邻条状薄板间的间隙. 所有条状薄板的长度设为 $1.2\lambda_0$, 并通过调整其质量密度, 以获得步长为 $\pi/6$ 的沿 x 方向上的相位梯度. 图 2(c) 所示为基于 GSL 的结构构型以及对应 $\theta_r = 60^\circ$ 结构在板中面上的 z 分量散射位移场分布.

3 平面聚焦超表面的设计

平面聚焦是调控薄板弯曲波的重要技术, 在能量收集^[30]和信号检测^[56]等领域具有潜在的应用价值. 但以往大多数此类超表面都是基于 GSL 原理设计的局域结构^[45-48]. 由于基于 GSL 原理的超表面在将入射波偏转至大角度方向时效率较低, 此类聚焦结构难以有效地收集照射到超表面远端边缘的波能量, 因此基于 GSL 的超表面的聚焦效率通常会随结构数值孔径的增大而显著下降. 因此, 有必要设计非局域聚焦结构以提高聚焦效率. 接下来将展示如何使用基于多端口模型的设计方法来设计这种结构.

本文所提出的超表面具有如图 3(a) 所示结构. 该结构分别于薄板上、下表面对称地各安装两排弹性柱体. 因为不考虑对称与反对称模式之间的转换, 位于上、下表面对应位置上的圆柱体高度取为

完全相同, 以确保结构关于板中面对称. 在每一面上, 圆柱体沿 x 轴等间距排列, 排列密度为每 λ_0 长度等间距地安装每排 3 个弹性柱体. 所有柱体分布于 $-\frac{a_0}{2} < x < \frac{a_0}{2}$ 之间, 此处 a_0 为超表面沿 x 方向的长度. 两排圆柱体之间的间距取为 $d_r = 0.462\lambda_0$. 图 3(a) 中用带箭头的线段示意该超表面的功能, 该结构用于将垂直入射的平面波聚焦到薄板中面上的 $(0, f)$ 或 $(0, -f)$ 处, 其中前者为反射式聚焦, 后者为透射式聚焦. 对于薄板及弹性圆柱体的材料与参数, 我们仍取为与异常反射/透射结构相同的设置.

采用与第 2 节相类似的方法构建一个多端口模型. 对于薄板中的波, 将垂直入射平面波的振幅表示为 A^+ , 而定义焦点处散射波的振幅为 A^- . 对于弹性柱体, 仍沿用符号 H^+ 和 H^- 来表示圆柱体中的背向及面向多端口结构的模式幅度. 在这些表述下, 同样可以用方程 (1) 和 (3) 来描述系统中的波散射行为, 以及用方程 (4) 来描述柱体中 3 个波模式在其末端的反射行为, 并由此建立起由柱体高度 h_k ($k = 1, 2, \dots, N$) 控制的 A^+ 与 A^- 间的关系. 然后通过优化算法获得最优 $\{h_k\}$ 序列, 使得 $|A^-|$, 也就是焦点处波幅极大.

对于我们所考虑的正入射平面波的情形, 因为焦点设置于 $x = 0$ 平面上, 结构具有左右对称性, 因此只需搜索一半的 $\{h_k\}$ 值即可. 在采用有限元方法计算散射矩阵 S^A , T^H , S^H 和 T^A 过程中, 在结构的左、右和上、下边缘均设置完美匹配层, 以消除反射波在计算边界上的影响, 如图 3(a) 所示.

据此方案, 我们分别设计了横向长度为 $a_0 = 10\lambda_0$ 及 $20\lambda_0$ 的用于反射和透射聚焦的 4 种结构, 焦距均设为 $f = 2\lambda_0$. 按上述设置, $a_0 = 10\lambda_0$ 及 $20\lambda_0$ 的结构分别包含 $N = 60$ 及 $N = 120$ 个柱体. 按数值孔径 (NA) 的定义式 $NA = 1/\sqrt{1+(2f/a_0)^2}$, 对应 $a_0 = 10\lambda_0$ 及 $a_0 = 20\lambda_0$ 结构的数值孔径 NA 分别为 0.928 和 0.980.

图 3(b) 所示为 4 种优化结构的 $\{h_k\}$ 值, 在图中的每个子图中, 近入射侧一排及远入射侧一排柱体的高度分别用 h_n 及 h'_n 给出.

为了验证聚焦效果, 对获得的结构进行有限元数值验证. 图 4(a) 为聚焦效果图. 图中给出的是散射波强度相对于入射波强度的比值 $r_f = |A_s/A_i|^2$ 的

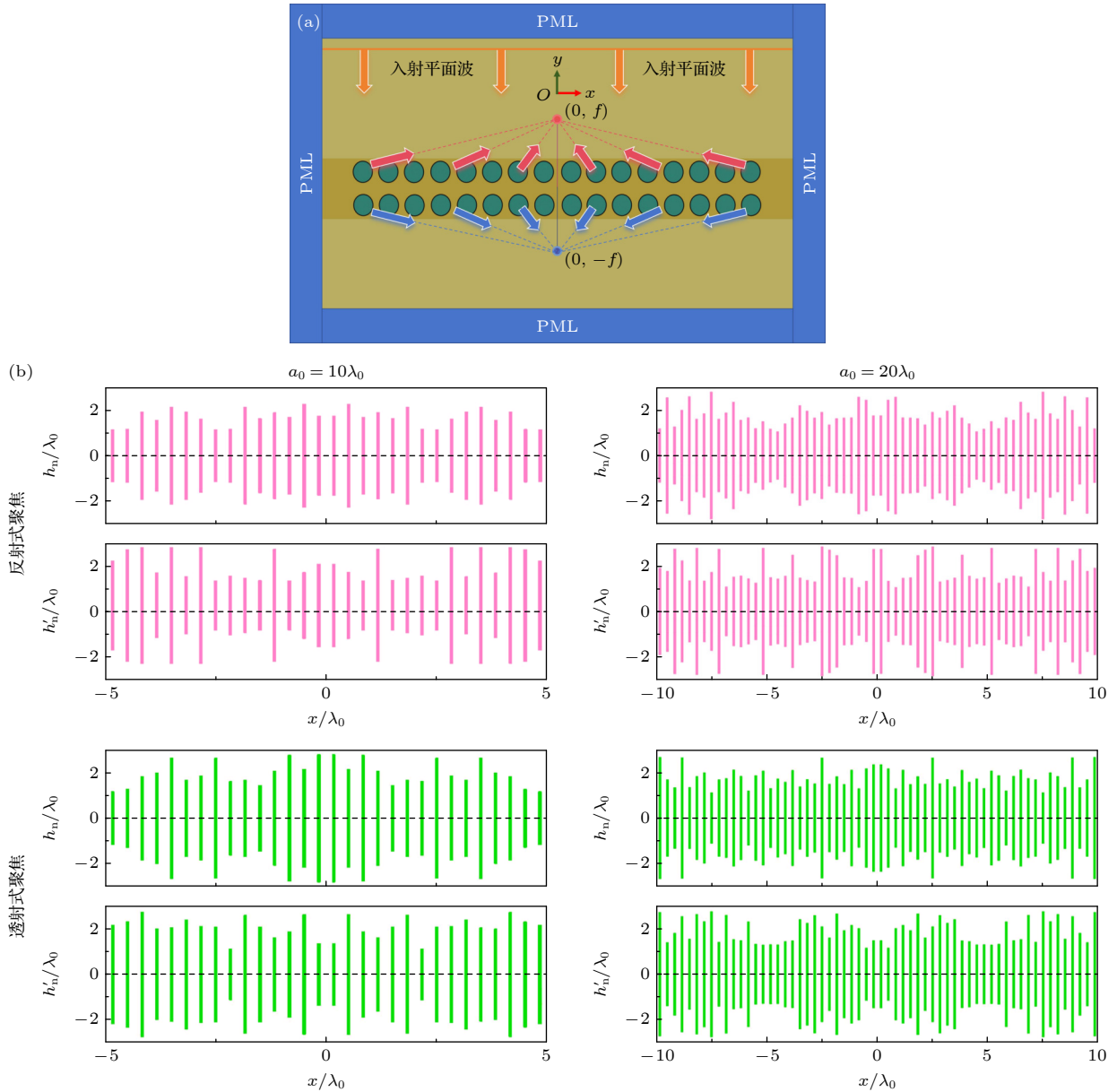


图 3 (a) 平面聚焦超表面的俯视图, 结构由对称在薄板的正、反两表面上分别安装两排间距为 d_r 的弹性柱体 (标注为绿色圆圈) 构成, 两排弹性柱体均等间距地分布于 $-\frac{a_0}{2} < x < \frac{a_0}{2}$ 间, $(0, f)$, $(0, -f)$ 为反射、透射式聚焦的焦点坐标 (薄板中面上), 图中带箭头的线段示意了波传播的轨迹; (b) 优化得到的构成超表面圆柱体的高度, 其中 h_n 为近入射侧一排柱体的高度, h'_n 为远入射侧一排柱体的高度. 左、右两列子图分别对应于 $a_0 = 10\lambda_0$ 和 $a_0 = 20\lambda_0$ 的结构, 上、下两行子图分别对应于反射及透射式聚焦结构

Fig. 3. (a) Top view of the planar fuser. The structure is constructed by symmetrically assembling two rows of cylinders with a space of d_r on each surface of the thin plate, on each surface, the elastic cylinders are arranged equidistantly in $-\frac{a_0}{2} < x < \frac{a_0}{2}$, $(0, f)$ and $(0, -f)$ are the focal point of the reflection-type and refraction-type structure, arrows indicate the wave propagation trajectories; (b) the optimized height of the elastic cylinders for the structure, the height of the cylinders in the row closed to the incident side is denoted by h_n , the ones in the other row is denoted by h'_n , panels on the left (right) -hand side are for structures with $a_0 = 10\lambda_0$ ($20\lambda_0$), panels on top (bottom) are for reflection (refraction) -type structures.

场分布, 式中 A_s 及 A_i 分别表示散射场及入射场在板中面上振幅值. 图的上部与下部子图分别对应反射与透射式聚焦, 而左部及右部子图则分别对应长度为 $a_0 = 10\lambda_0$ 和 $20\lambda_0$ 的结构. 此外, 为显示更多细节, 图 4(b) 中绘制了焦平面 ($y = \pm f$) 上的 r_f

值, 其中 $|x| \leq 1.5\lambda_0$. 从这些图中可以清楚地看到, 所有 4 种结构的聚焦效果都非常显著.

为了评估聚焦性能, 从计算结果中提取了 3 个关键参数: 即焦点处的 r_f 值 (表示为 r_{ff}), 焦平面上主峰半高宽 HWMP, 以及聚焦效率 η . 其中,

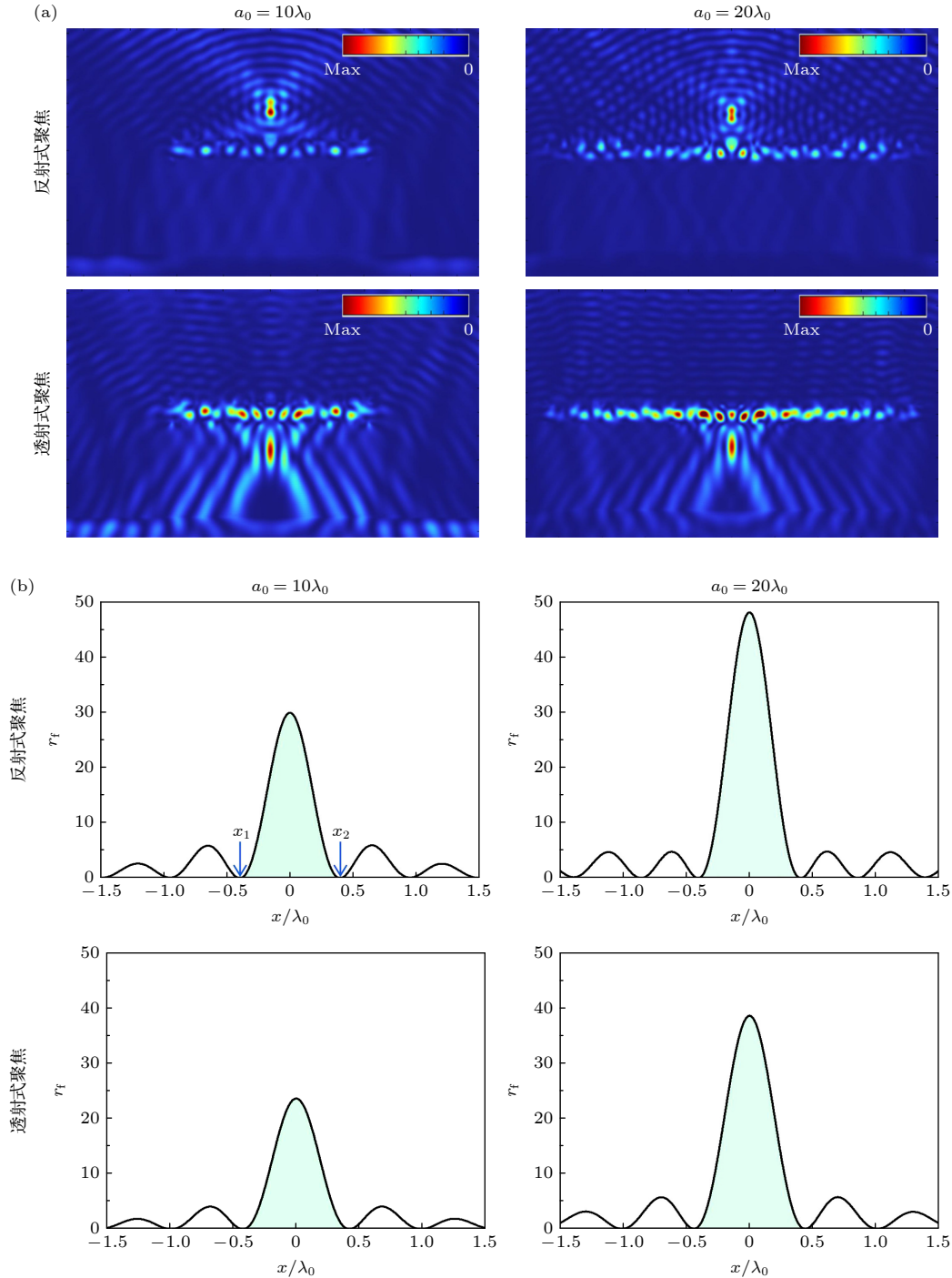


图 4 (a) 平面聚焦超表面在垂直入射平面波下的散射波强度场分布, 该场值由 $r_f = |A_s/A_i|^2$ 定义, 其中 A_s 和 A_i 分别为散射波和入射波的振幅; (b) 焦平面上的 r_f 值分布, 图中仅显示了 $|x| \leq 1.5\lambda_0$ 区域中的值, 左上子图中的 x_1 和 x_2 示意出了主峰的边缘

Fig. 4. (a) Field distribution of the scattered wave from the planar focuser under the normally incident plane wave. The fields value is defined by $r_f = |A_s/A_i|^2$, where A_s and A_i are the amplitudes of the scattered and incident waves, respectively; (b) the r_f values along the focal plane, only the value in region $|x| \leq 1.5\lambda_0$ is shown. In the top-left panel, edges of the main peak are marked by x_1 and x_2 .

HWMP 定义为图 4(b) 中 r_f 下降到主峰最大值一半时主峰的宽度; 而聚焦效率定义为 $\eta =$

$$\int_{x_1}^{x_2} I_S(x) dx \Big/ \int_{-a_0/2}^{a_0/2} I_0(x) dx, \text{ 式中 } I_S, I_0 \text{ 分别为散}$$

射波和入射波的局部能流密度沿 y 方向的分量, x_1, x_2 分别为主峰的左右边缘, 其位置如图 4(b) 的左上部子图中的标注所示. 对于所有 4 种结构, 这些值分别列于表 1 中.

表 1 4 种不同结构的数值孔径 (NA)、焦点处强度比 (r_{ff})、焦平面上主峰的半高宽 (HWMP), 以及聚焦效率 (η)

Table 1. Numerical aperture (NA), intensity ratio at the focal point (r_{ff}), half height width of the main peak on the focal plane (HWMP), and focusing efficiency (η) for four different structures.

聚焦类型	横向长度	NA	r_{ff}	HWMP	$\eta/\%$
反射式	$10\lambda_0$	0.928	29.92	$0.372\lambda_0$	64.36
反射式	$20\lambda_0$	0.980	48.01	$0.375\lambda_0$	48.97
透射式	$10\lambda_0$	0.928	23.66	$0.396\lambda_0$	67.82
透射式	$20\lambda_0$	0.980	38.59	$0.414\lambda_0$	67.71

为了显示非局域结构相较于基于 GSL 的结构的优势, 我们还设计了基于 GSL 的、横向长度分别为 $a_0 = 10\lambda_0$ 和 $a_0 = 20\lambda_0$ 的反射式聚焦透镜. 为实现基于 GSL 的结构中所需的相位梯度分布 $\phi(x) = (2\pi/\lambda_0)(\sqrt{x^2 + f^2} - f)$ [46], 采用连接到薄板自由边界的条状薄板作为基本构成单元. 这些条状薄板的宽度均取为 $w_s = \frac{\lambda_0}{10} - t$, 其中 $t = 0.0048\lambda_0$ 为条

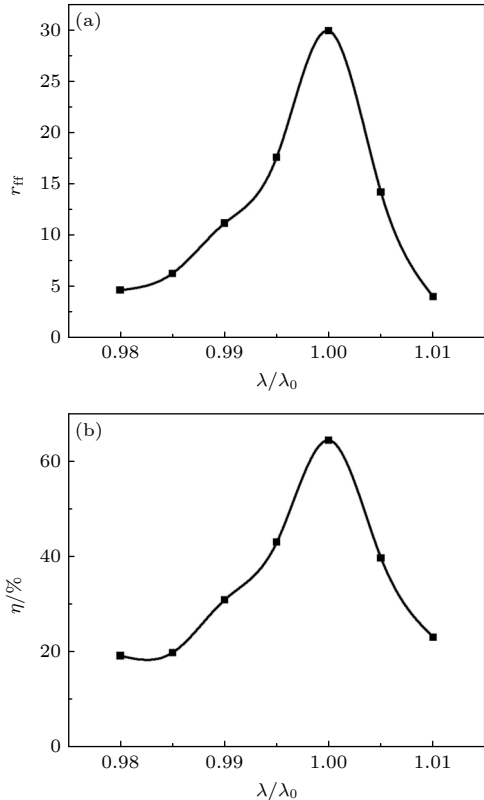


图 5 $a_0 = 10\lambda_0$ 反射式聚焦结构的 (a) r_{ff} 及 (b) η 值随归一化入射波长 λ/λ_0 的变化关系

Fig. 5. (a) r_{ff} and (b) η value as a function of the normalized working wavelength λ/λ_0 for the reflection-type focuser with $a_0 = 10\lambda_0$.

板之间的间距, 所有条状薄板的厚度均取与薄板相同, 长度均为 $1.2\lambda_0$, 整体结构构型与图 2(c) 相似. 每个单元所需获得的相位延迟通过调整其质量密度来控制.

数值仿真结果表明, 对于长度为 $a_0 = 10\lambda_0$ 和 $a_0 = 20\lambda_0$ 的基于 GSL 的结构, 其聚焦效率分别为 $\eta = 57.20\%$ 和 31.35% . 可以看到, 这些结果相较于非局域结构都要低. 特别地, 对于 $a_0 = 20\lambda_0$, 基于 GSL 结构的效率下降更为明显, 说明在大数值孔径下, GSL 结构收集照射到结构边缘处能量的能力变得更差.

为了检查基于这种方法所设计结构的频带宽度, 我们还计算了上述 $a_0 = 10\lambda_0$ 的反射式聚焦结构在不同入射波长 λ 下的聚焦效率. 图 5 展示了聚焦效率 η 和焦点处反射波强度比 r_{ff} 随 λ/λ_0 变化的函数关系. 从图 5 可以看出, 由于该结构仅针对 $\lambda = \lambda_0$ 设计, 其工作带宽相对较窄.

4 结 论

本研究将基于多端口模型的超表面设计方法拓展应用于薄板弹性波的非局域超表面设计. 以面向薄板弯曲波调控的异常反射/透射超表面和平面聚焦超表面的设计为例, 展示了这一设计方法的高效性. 数值结果表明, 本文所设计的非局域超表面, 理论上可实现近于完美的大角度异常反射及异常透射. 在平面聚焦结构的设计上, 采用这一方法设计的非局域超表面聚焦性能要明显优于对应的基于 GSL 原理设计的结构, 这一优势对于大数值孔径结构表现得尤为明显. 这项工作不仅给出了两种在传感、能量收集等领域具有潜在应用价值的高效非局域超表面结构, 还为弹性波非局域超表面设计提供了一种有效的方法.

参考文献

- [1] Chi Z J, Du Y C, Huang W H, Tang C X 2018 *J. Appl. Phys.* **124** 124901
- [2] Glybovski S B, Tretyakov S A, Belov P A, Kivshar Y S, Simovski C R 2016 *Phys. Rep. -Rev. Sec. Phys. Lett.* **634** 1
- [3] Leonhardt U 2006 *Science* **312** 1777
- [4] Schurig D, Mock J J, Justice B J, Cummer S A, Pendry J B, Starr A F, Smith D R 2006 *Science* **314** 977
- [5] Smolyaninov I I, Narimanov E E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 067402
- [6] Yu N F, Genevet P, Kats M A, Aieta F, Tetienne J P, Capasso F, Gaburro Z 2011 *Science* **334** 333

- [7] Zhang L, Chen X Q, Liu S, Zhang Q, Zhao J, Dai J Y, Bai G D, Wan X, Cheng Q, Castaldi G, Galdi V, Cui T J 2018 *Nat. Commun.* **9** 4334
- [8] Ma G C, Yang M, Xiao S W, Yang Z Y, Sheng P 2014 *Nat. Mater.* **13** 873-878
- [9] Tang K, Qiu C Y, Ke M Z, Lu J Y, Ye Y T, Liu Z Y 2014 *Sci. Rep.* **4** 6517
- [10] Xie Y B, Wang W Q, Chen H Y, Komkeker A, Popa B I, Cummer S A 2014 *Nat. Commun.* **5** 5553
- [11] Li Y, Jiang X, Liang B, Cheng J C, Zhang L K 2015 *Phys. Rev. Appl.* **4** 024003
- [12] Zhu Y F, Zou X Y, Li R Q, Jiang X, Tu J, Liang B, Cheng J C 2015 *Sci. Rep.* **5** 10966
- [13] Jiang X, Li Y, Liang B, Cheng J C, Zhang L K 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 034301
- [14] Xie Y B, Shen C, Wang W Q, Li J F, Suo D J, Popa B I, Jing Y, Cummer S A 2016 *Sci. Rep.* **6** 35437
- [15] Melde K, Mark A G, Qiu T, Fischer P 2016 *Nature* **537** 518
- [16] Díaz-Rubio A, Li J F, Shen C, Cummer S A, Tretyakov S A 2019 *Sci. Adv.* **5** eaau7288
- [17] Epstein A, Eleftheriades G V 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 256103
- [18] Ra'di Y, Souнас D L, Alù A 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 067404
- [19] Li J F, Song A L, Cummer S A 2020 *Phys. Rev. Appl.* **14** 044012
- [20] Peng X Y, Li J F, Shen C, Cummer S A 2021 *Appl. Phys. Lett.* **118** 061902
- [21] Chiang Y K, Quan L, Peng Y G, Sepehrirahnama S, Oberst S, Alù A, Powell D A 2021 *Phys. Rev. Appl.* **16** 064014
- [22] Craig S R, Su X S, Norris A, Shi C Z 2019 *Phys. Rev. Appl.* **11** 061002
- [23] Mei J, Fan L J, Hong X B 2023 *Appl. Phys. Express* **16** 077002
- [24] Hou Z L, Fang X S, Li Y, Assouar B 2019 *Phys. Rev. Appl.* **12** 034021
- [25] Ni H Q, Fang X S, Hou Z L, Li Y, Assouar B 2019 *Phys. Rev. B* **100** 104104
- [26] Ren J, Hou Z L 2023 *Phys. Rev. Appl.* **20** 044004
- [27] Ren J, Hou Z L 2024 *Phys. Rev. Appl.* **22** 014040
- [28] Nakamura K, Kobayashi Y, Oda K, Shigemura S 2023 *Sustainability* **15** 4846
- [29] Ahamad S, Soman R, Malinowski P, Wandowski T 2023 *Conference on Health Monitoring of Structural and Biological Systems XVII SPIE* Long Beach, CA, 124880E
- [30] Lee T G, Jo S H, Seung H M, Kim S W, Kim E J, Youn B D, Nahm S, Kim M 2020 *Nano Energy* **78** 105226
- [31] Kim S Y, Bin Oh Y, Lee J S, Kim Y Y 2023 *Mech. Syst. Sig. Process.* **186** 109867
- [32] Mei J, Fan L J, Hong X B 2022 *Crystals* **12** 901
- [33] Lee S W, Shin Y J, Park H W, Seung H M, Oh J H 2021 *Phys. Rev. Appl.* **16** 064013
- [34] Li L X, Su K, Liu H X, Yang Q, Li L, Xie M X 2023 *J. Appl. Phys.* **133** 105103
- [35] Ruan Y D, Liang X 2021 *Inter. J. Mech. Sci.* **212** 106859
- [36] Zhang X B, Li L, Li K L, Liu T, Zhang J, Hu N 2023 *Appl. Acoust.* **202** 109170
- [37] Yang H G, Feng K, Li R, Yan J 2022 *Front. Phys.* **10** 909318
- [38] Kim S Y, Lee W, Lee J S, Kim Y Y 2021 *Mech. Syst. Sig. Process.* **156** 107688
- [39] Yuan S M, Gao T, Chen A L, Wang Y S 2025 *Phys. Lett. A* **529** 130081
- [40] Oh Y B, Kim S Y, Cho S H, Lee J S, Kim Y Y 2024 *Inter. J. Mech. Sci.* **262** 108750
- [41] Su G Y, Du Z L, Jiang P, Liu Y Q 2022 *Mech. Syst. Sig. Process.* **179** 109391
- [42] Packo P, Norris A N, Torrent D 2019 *Phys. Rev. Appl.* **11** 014023
- [43] Jang S V, Lee S W, Oh J H 2023 *Phys. Rev. Appl.* **19** 024036
- [44] Jiang M, Wang Y F, Assouar B, Wang Y S 2023 *Phys. Rev. Appl.* **20** 054020
- [45] Jin Y B, Wang W, Khelif A, Djafari-Rouhani B 2021 *Phys. Rev. Appl.* **15** 024005
- [46] Wang W, Iglesias J, Jin Y B, Djafari-Rouhani B, Khelif A 2021 *Apl Mater.* **9** 051125
- [47] Lee G, Choi W, Ji B, Kim M, Rho J 2024 *Adv. Sci.* **11** 2198
- [48] Li M Z, Hu Y B, Cheng J L, Chen J L, Li Z, Li B 2024 *Inter. J. Mech. Sci.* **268** 109048
- [49] Lin B Z, Li J R, Lin W, Ma Q F 2024 *Appl. Sci. -Basel* **14** 2717
- [50] Peng H C, Fan L J, Mei J 2024 *J. Appl. Phys.* **135** 033102
- [51] Peng H C, Mei J 2024 *Phys. Rev. Appl.* **21** 034007
- [52] Torrent D, Mayou D, Sánchez-Dehesa J 2013 *Phys. Rev. B* **87** 115143
- [53] Zhu H F, Patnaik S, Walsh T F, Jared B H, Semperlotti F 2020 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **117** 26099
- [54] Jin Y B, El Boudouti E, Pennec Y, Djafari-Rouhani B 2017 *J. Phys. D-Appl. Phys.* **50** 425304
- [55] Moriyama H, Masuda N, Osaka Y 2006 *Proc. Sch. Eng. Tokai Univ. (Engl. Ed.) (Japan)* **46** 111
- [56] Taghavipour S, Kharkovsky S, Kang W H, Samali B, Mirza O 2017 *Smart Mater. Struct.* **26** 104009

Nonlocal thin plate elastic wave metasurface designed based on multi port model*

YU Guanze HOU Zhilin †

(School of Physics and Optoelectronics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

(Received 12 May 2025; revised manuscript received 3 July 2025)

Abstract

Recent development of metasurfaces indicates that achieving high efficiency requires nonlocal designs where the coupling between constituent units is fully considered. However, most metasurfaces for elastic waves are still designed as local structures based on the Generalized Snell's Law (GSL), which ignores the coupling between sub-units, thus often resulting in low efficiency. In order to design nonlocal structures for flexural wave in thin elastic plate, a previously proposed method based on the multi-port structural model (MPSM) for acoustic metasurfaces is extended in this work. Using this method, anomalous reflector and anomalous refractor, each with a large diffraction angle and planar focuser with large numerical aperture for flexural waves in thin elastic plates, are designed.

As the first example, an anomalous reflector or anomalous refractor for flexural wave on an infinite free thin elastic plate with elastic cylinder pairs assembled symmetrically on both surfaces is considered. The design target is to optimize the heights of the cylinder pairs, by which anomalous reflection or refraction for flexural wave in plate can be realized. It is shown that by modelling the structure as an MPSM, configurations with the desired functionalities can be efficiently determined. The three dimensional finite element simulations show that even for structures with a deflection angle as large as 80° , the proposed anomalous reflectors and refractors can achieve near-unity efficiency.

By the same method, a planar focuser is further designed. It is shown that by optimizing the heights of each cylinder pair, the normally incident flexural wave can be focused on the incident side or the transmitting side of the metasurface with arbitrary focal length. It is found that the focusing efficiency of our nonlocal designs is significantly higher than that of their GSL-based counterparts, particularly for the structures with numerical apertures approaching unity.

This work not only presents an effective design method for nonlocal metasurfaces of flexural waves in thin elastic plates, but also provides two efficient nonlocal structures with broad application prospects in sensing, energy harvesting, and other fields.

Keywords: flexural wave in thin plate, nonlocal metasurface, multi-port structural model, anomalous reflection, planar focusing

PACS: 43.20.+g, 43.40.+s, 46.70.-p**DOI:** [10.7498/aps.74.20250618](https://doi.org/10.7498/aps.74.20250618)**CSTR:** [32037.14.aps.74.20250618](https://cstr.cn/32037.14.aps.74.20250618)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12274143).

† Corresponding author. E-mail: phzlh@scut.edu.cn

基于多端口模型设计的非局域薄板弹性波超表面

俞冠泽 侯志林

Nonlocal thin plate elastic wave metasurface designed based on multi port model

YU Guanze HOU Zhilin

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 174301 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250618

CSTR: 32037.14.aps.74.20250618

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250618>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于反射超表面的偏馈式涡旋波产生装置

Offset-fed vortex wave generator based on reflective metasurface

物理学报. 2021, 70(19): 198401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210681>

基于多端口波导结构的宽频带声触发器

Broadband acoustic triggers based on multiport waveguide structures

物理学报. 2023, 72(16): 164301 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230594>

基于超表面的多波束多模态太赫兹涡旋波产生

Multi-beam multi-mode vortex beams generation based on metasurface in terahertz band

物理学报. 2021, 70(18): 188701 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210897>

幅值可控的逆反射和镜像反射双通道超表面结构拓扑优化设计

Topology optimization design of dual-channel metasurface structure with controllable amplitude of retroreflection and mirror reflection

物理学报. 2023, 72(24): 247801 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230775>

基于双面声学超表面的伪表面波隐身装置设计

Design of acoustic cloaking for spoof surface waves based on double-sided acoustic metasurface

物理学报. 2025, 74(15): 154301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250379>

基于双开缝环结构的半反射和半透射超宽带超薄双偏振太赫兹超表面

Double-split-ring structure based ultra-broadband and ultra-thin dual-polarization terahertz metasurface with half-reflection and half-transmission

物理学报. 2023, 72(15): 158701 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20230471>