

多量子比特 GHZ 态, $W\bar{W}$ 态, SGT 态在单轴旋转模型下的纠缠判定区分*

李岩^{1)2)3)†} 任志红⁴⁾

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (太原师范学院计算与应用物理研究所, 晋中 030619)

3) (智能优化计算与区块链技术山西省重点实验室, 晋中 030619)

4) (山西师范大学物理与信息工程学院, 太原 030031)

(2025 年 6 月 3 日收到; 2025 年 7 月 27 日收到修改稿)

在量子信息领域, 不同纠缠态的判定与分类一直以来就是人们关注的重点课题. 本文借助实验上成熟可控的单轴旋转模型, 对常规局域操作下无法利用量子 Fisher 信息实现区分的 3 种特殊纠缠态 (4 比特 GHZ 态, 4 比特 $W\bar{W}$ 态, 4 比特 SGT 态) 开展纠缠判定研究. 通过对 3 种量子态在单轴旋转模型下进行方向优化和相互作用强度调节, 实现了三者的量子 Fisher 信息区分. 另外, 还研究了 4 种环境噪声 (即比特翻转信道、振幅阻尼信道、相位阻尼信道、去极化信道) 对纠缠判定的影响. 结果显示, 在局域操作下, 4 比特 GHZ 态的量子 Fisher 信息在 4 种噪声通道中随退相干参数 p 的变化明显区别于 $W\bar{W}$ 态和 SGT 态, 可以区分; 而 $W\bar{W}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息变化相同, 无法区分. 在单轴旋转模型下, 3 种量子态的量子 Fisher 信息在 4 种噪声通道下的变化曲线互不相同, 可以明显区分. 需要注意的是, 在比特翻转通道中, 随着退相干参数 p 的变化, $W\bar{W}$ 态与 SGT 态的量子 Fisher 信息在中间区域 ($p \approx 0.5$) 有重叠, 无法区分. 本文的工作为多体系统的量子纠缠判定提供了一种新的思路.

关键词: 纠缠判定与分类, 量子 Fisher 信息, 单轴旋转模型, GHZ 态, $W\bar{W}$ 态, SGT 态**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Ta**DOI:** 10.7498/aps.74.20250715**CSTR:** 32037.14.aps.74.20250715

1 引言

在量子信息领域, 不同纠缠态或纠缠结构的区分对量子力学基本概念的理解及量子信息任务的处理具有非常重要的意义^[1-6], 如量子计算、量子密码学、量子计量学、量子通信等. 近年来, 研究人员在理论上和实验上提出了多种方法开展量子态的纠缠判定与分类, 如量子层析法^[7,8]、纠缠判定算

符^[9,10]、量子 Fisher 信息^[11,12]、机器学习^[13,14]、量子导引^[15-17]、纠缠并发度^[18,19]等, 但至今仍未找到普适性的判定方法, 每种方案均有各自的优缺点^[4]. 2009 年, 意大利光学研究所 Smerzi 教授领导的理论小组提出了一种基于量子态固有性质给出的纠缠判定方法^[11], 即利用量子态在外界环境干扰下的统计响应速度进行纠缠判定, 而衡量统计响应速度快慢的物理量就是量子 Fisher 信息, 故可以通过获取量子体系的量子 Fisher 信息来判定纠缠以

* 国家自然科学基金 (批准号: 12305024, 12205176, 92365116)、山西省应用基础研究计划项目 (批准号: 202203021212193, 202203021212387, 202103021223251) 和山西省高等学校青年学术带头人项目 (批准号: 2024Q035) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: li8989971@163.com

及进行纠缠结构分类, 量子 Fisher 信息不仅具有实际的物理意义, 也具有量子力学本身所携带的统计性质, 在实验和理论上被广泛地进行研究^[20-26]. 2016 年, Smerzi 教授领导的理论小组^[21]将常规局域操作下判定纠缠的方法推广到了非局域操作中, 拓宽了量子 Fisher 信息的纠缠判定范围, 同时也给出了更加便捷的纠缠判定方法. 2023 年, 我们借助非局域操作深入研究了多量子比特 $W\bar{W}$ 态的量子计量性质, 发现 4 量子比特 $W\bar{W}$ 态与 4 比特 GHZ 态的量子 Fisher 信息一致, 且无论在局域操作或非局域操作下均相同, 无法区分^[27]. 2024 年, 我们在研究另一类特殊量子态, GHZ 态与双数态的叠加态 (superposition of GHZ and twin-fock, SGT) 的量子计量性能时, 发现 4 量子比特 SGT 态 (GHZ 与 TF 态的比例为 1:3) 的量子 Fisher 信息与 4 比特 GHZ 态和 4 比特 $W\bar{W}$ 态的值一致, 在局域操作下也无法区分^[28], 这些问题成了本文开展研究的动机.

一般地, 考虑自旋为 1/2 的粒子所组成的量子系统, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别表示基态和激发态, 则 4 比特 GHZ 态, 4 比特 $W\bar{W}$ 态和 4 比特 SGT 态分别表示为

$$|\text{GHZ}\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + |1111\rangle), \quad (1)$$

$$|W\bar{W}\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|W_4\rangle + |\bar{W}_4\rangle), \quad (2)$$

其中, $|W\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle)$, $|\bar{W}\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}(|1110\rangle + |1101\rangle + |1011\rangle + |0111\rangle)$, 以及

$$|\text{SGT}\rangle_4 = \frac{1}{2}|\text{GHZ}\rangle_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}|\text{TF}\rangle_4, \quad (3)$$

即 GHZ 态与双数态以 1:3 比例叠加^[28]. 这里, 双数态表示为 $|\text{TF}\rangle_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(|0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle)$, 被广泛应用在量子精密测量领域^[29].

本文主要围绕上述 3 种特殊量子态, 开展基于量子 Fisher 信息的纠缠判定区分问题, 借助实验上成熟可控的单轴旋转模型, 通过对量子态在不同旋转方向上的量子 Fisher 信息计算, 找到实现纠缠判定区分的方案; 进一步考虑环境噪声的影响, 探究退相干通道下的纠缠判定区分. 这里还是从两体非局域操作的角度出发, 但不再考虑量子态在最优方向上的量子 Fisher 信息获取, 而是借助特定

方向上的旋转来进行研究, 即单轴旋转 (含同向磁场), 通过对旋转方向的调控和相互作用强度的调节, 实现 3 种量子态在量子 Fisher 信息上的区分, 研究结果表明, 当 3 种量子态都沿着 z 轴进行旋转时, 量子 Fisher 信息随相互作用强度的变化曲线互不相同, 可以明显区分; 而当旋转方向为 x 轴或 y 轴时, 三者无法完全分开. 除此之外, 本文还研究了 4 种环境噪声对 3 种量子态在局域操作和单轴旋转模型下的纠缠判定影响, 研究发现, 当采用局域操作进行纠缠判定时, 无法在四种噪声通道下利用量子 Fisher 信息实现 3 种量子态的区分; 而当加入两体相互作用后, 可以容易地实现三者的区分. 要注意的是, 在比特翻转通道中, 随着退相干参数 p 的变化, $W\bar{W}$ 态与 SGT 态的量子 Fisher 信息在中间区域 ($p \approx 0.5$) 有重叠, 无法区分.

2 理论模型

2.1 量子 Fisher 信息及其计算

Fisher 信息, 又称费歇尔信息, 最初是由英国统计学家 Fisher 爵士^[30]在研究最大似然估计时引入的, 随后其学生 Rao 和统计学家 Cramer^[31]分别给出了无偏差估计的下限, 其由 Fisher 信息的倒数决定, 即著名的克拉美罗下界 (Cramer-Rao lower bound, CRLB), 这对当前量子版本的最大似然估计以及贝叶斯估计的深入研究具有重要的意义^[32-34]. 除此之外, 量子 Fisher 信息还有一个重要的应用, 即开展量子纠缠判定. 依据不同量子态在外界扰动下统计速度的变化快慢不同, 可将量子态分为有益于量子计量的纠缠态, 以及普通量子态. 2009 年, 研究人员发现所有分离量子态在局域操作下的量子 Fisher 信息最大值为体系所含的粒子数目 N , 而量子纠缠态 (有益于量子计量) 的量子 Fisher 信息值会大于 N , 故可利用这一性质开展纠缠判定及分类研究^[11,12]. 具体来说, 对待测量子态进行局域操作下的量子态演化, 进行相位积累, 随后从量子末态中获取关于相位的条件概率, 进而得到体系的量子 Fisher 信息, 当获取的量子 Fisher 信息值大于体系所含粒子数目 N 时, 可以判定体系含有有益于量子计量的量子纠缠^[20]. 2016 年, 研究人员进一步将纠缠判定推广到了非局域操作中, 利用所有分离量子态在非局域操作下的最大量子 Fisher 信息作为边界, 可以开展更广

范围的量子纠缠判定与分类研究^[21,35,36].

一般地, Fisher 信息的表达式如下:

$$F(\theta) \equiv \sum_{\mu} (\mu|\theta) \left(\frac{\partial \log p(\mu|\theta)}{\partial \theta} \right)^2, \quad (4)$$

其中, $p(\mu|\theta)$ 表示从实验或理论统计中获取的条件概率分布, 即在未知参数 θ 下对可观测量 μ 进行测量所得的概率分布, 其满足非负归一性. 在统计学中, $F(\theta)$ 表征条件概率分布中所含未知参数 θ 的信息量, 其值越大, 表示获取的信息越完整, 则对 θ 真实值的估计越准确, 误差越小. 将经典 Fisher 信息的定义拓展到量子力学, 通过最优测量算符的选取, 即 POVM(positive-operator valued measure) 算符, 便可得到 Fisher 信息的最大值, 即量子 Fisher 信息, 详细推导可见文献^[37]. 考虑一般的谱分解后的量子混合态 $\hat{\rho}_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, 其在哈密顿量 $\hat{H}$ 驱动下的量子 Fisher 信息表示为

$$F_Q[\hat{\rho}_0, \hat{H}] = 2 \sum_{i,j=1, \lambda_i+\lambda_j \neq 0}^k \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_j\rangle|^2, \quad (5)$$

若考虑量子纯态, 即 $\hat{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$, 则 (5) 式约化为

$$F_Q = 4\Delta^2 \hat{H}, \quad (6)$$

其中, $\Delta^2 \hat{H}$ 表示哈密顿量 $\hat{H}$ 在量子初态 $|\psi\rangle$ 下的

方差.

一般情况下, 量子态的量子 Fisher 信息是指其在局域操作下的 Fisher 信息的最大值, 即 $\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \sigma_n^{(i)}$, $\sigma_n^{(i)} = \sigma^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ 表示第 i 个量子比特的泡利矩阵, $\mathbf{n}$ 代表方向矢量. 若考虑量子比特间的两体相互作用, 如 $\hat{H}_1 = \sum_{i,j=1}^N \frac{\gamma}{4} \sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}$, γ 代表相互作用强度, 则操控量子态的哈密顿量变成了非局域操作^[21]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (7)$$

采用赝角动量 $J_n = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \sigma_n^{(i)}$ 对 (7) 式进行表示, 则 (7) 式变成了实验上成熟可控的单轴旋转模型^[38]:

$$\hat{H} = J_n + \gamma J_n^2. \quad (8)$$

依据 (6) 式, 量子态在哈密顿量 $\hat{H}$ 下的量子 Fisher 信息可表示为

$$F_Q = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2, \quad (9)$$

其中, $v_0^2 = 4\Delta^2 \hat{H}_0$, $v_1^2 = 4\Delta^2 \hat{H}_1$, $v_2^2 = 4(\langle\{\hat{H}_0, \hat{H}_1\}\rangle - 2\langle\hat{H}_0\rangle\langle\hat{H}_1\rangle)$ 分别表示局域操作下的量子 Fisher 信息、相互作用下的量子 Fisher 信息, 以及交互量子 Fisher 信息^[27]:

$$v_0^2 = \sum_{i=1}^N (1 - \langle\sigma_n^{(i)}\rangle^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle - \langle\sigma_n^{(i)}\rangle\langle\sigma_n^{(j)}\rangle), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v_1^2 = & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\gamma^2}{2} (1 - \langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle^2) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^N \gamma^2 (\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle \langle\sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)}\rangle - \langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle \langle\sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)}\rangle) \\ & + \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \neq j \neq k \neq l}}^N \frac{\gamma^2}{4} (\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)}\rangle - \langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle \langle\sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)}\rangle), \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_2^2 = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \gamma (\langle\sigma_n^{(j)}\rangle - \langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle \langle\sigma_n^{(i)}\rangle) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^N \gamma (\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)}\rangle - \langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle \langle\sigma_n^{(k)}\rangle). \quad (12)$$

可以看出, (10) 式—(12) 式的计算是相对复杂的, 但若所研究的量子态具有粒子交换对称性, 则计算变得简单, 只需要得到单比特项 $\langle\sigma_n^{(i)}\rangle$ 和多比特项 $\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)}\rangle$, $\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)}\rangle$, $\langle\sigma_n^{(i)} \sigma_n^{(j)} \sigma_n^{(k)} \sigma_n^{(l)}\rangle$ 的期望值即可, 因为交换粒子的顺序具有相同的值, 故可以容易地得到量子态的量子 Fisher 信息.

本文所研究的 3 种量子态均具有粒子交换对称性, 故它们在无噪声情况下的量子 Fisher 信息计算相对简单.

2.2 噪声模型

在实验上或实际的量子操作中, 任何量子态都

难免会受到周围环境的影响而导致退相干, 对上述 3 种量子态开展纠缠判定也一样. 常见的环境噪声有比特翻转、相位阻尼、振幅阻尼和去极化通道 4 种^[39]. 通常情况下, 这 4 种噪声对量子态的影响可用 Kraus 操作算符进行表示^[40,41]:

$$K(\hat{\rho}) = \sum_k \hat{E}_k \hat{\rho} \hat{E}_k^\dagger, \quad (13)$$

其中, $\hat{E}_k$ 表示作用于量子态单个量子比特的量子操作, 其满足概率守恒关系 $\sum_k \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k = \mathbf{1}$. 量子态在受到不同噪声影响后, 可以表示为如下形式:

$$K(\hat{\rho}) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_N} \left(\hat{E}_{k_1} \otimes \hat{E}_{k_2} \otimes \dots \otimes \hat{E}_{k_N} \right) \times \hat{\rho} \left(\hat{E}_{k_1} \otimes \hat{E}_{k_2} \otimes \dots \otimes \hat{E}_{k_N} \right)^\dagger. \quad (14)$$

下面针对不同的噪声通道, 给出具体的 Kraus 操作算符表示.

比特翻转源于外界随机干扰导致的量子比特状态瞬间翻转, 即量子比特状态以概率 p 从 $|0\rangle$ 变成 $|1\rangle$. 比特翻转经常出现在量子纠错过程中, 该噪声通道下的 Kraus 算符表示为

$$\hat{E}_1 = \sqrt{1-p} \mathbf{1}, \quad \hat{E}_2 = \sqrt{p} \hat{\sigma}_x. \quad (15)$$

相位阻尼源于量子系统与环境的相互耦合, 如热涨落、光子散射等, 会导致量子态相位信息丢失, 破坏量子态的相干性, 以概率 p 使得量子比特 $|1\rangle$ 的相位变成 $-|1\rangle$. 相位阻尼作用于单个量子比特的 Kraus 算符表示为

$$\hat{E}_1 = \sqrt{1-p} \mathbf{1}, \quad \hat{E}_2 = \sqrt{p} \hat{\sigma}_z. \quad (16)$$

振幅阻尼源于量子系统向周围环境中输送能量, 如量子比特从激发态自发辐射光子到周围环境中, 导致量子态的振幅减小, 发生量子比特退相干. 振幅阻尼作用于单个量子比特的 Kraus 算符表示为

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

去极化通道源于量子系统与复杂环境相互作用, 导致量子态的纯度降低为概率 p , 也常作为白噪声模型进行研究. 去极化通道作用于单个量子比特的 Kraus 算符表示为

$$\begin{aligned} \hat{E}_0 &= \sqrt{1-\frac{3}{4}p} \mathbf{1}, & \hat{E}_1 &= \sqrt{\frac{p}{4}} \hat{\sigma}_x, \\ \hat{E}_2 &= \sqrt{\frac{p}{4}} \hat{\sigma}_y, & \hat{E}_3 &= \sqrt{\frac{p}{4}} \hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (18)$$

3 数值结果

3.1 三种量子态在单轴旋转模型下的量子 Fisher 信息判定及分类

考虑操控量子体系的哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, 其中, $\hat{\sigma}_n^{(i)} = a\hat{\sigma}_x^{(i)} + b\hat{\sigma}_y^{(i)} + c\hat{\sigma}_z^{(i)}$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 4 量子比特 $|\text{GHZ}\rangle_4$ 的量子 Fisher 信息可通过下式计算得到:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \hat{\sigma}_n^{(j)} \rangle &= c^2, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \hat{\sigma}_n^{(j)} \hat{\sigma}_n^{(k)} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(1)} \hat{\sigma}_n^{(2)} \hat{\sigma}_n^{(3)} \hat{\sigma}_n^{(4)} \rangle &= a^4 + b^4 + c^4 - 6a^2b^2, \end{aligned} \quad (19)$$

将 (19) 式代入 (9) 式, 可得

$$F_Q^{|\text{GHZ}\rangle_4} = 4(1 + 3c^2) + 12[1 + 4b^2 + c^2 - 2c^4 + 4b^2(c^2 - 1)]\gamma^2. \quad (20)$$

类似地, 对于 4 比特 $W\bar{W}$ 态来说, 其单比特项的期望值 $\langle \sigma_n^{(i)} \rangle$ 和多比特项的期望值表示为

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \hat{\sigma}_n^{(j)} \rangle &= a^2, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \hat{\sigma}_n^{(j)} \hat{\sigma}_n^{(k)} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(1)} \hat{\sigma}_n^{(2)} \hat{\sigma}_n^{(3)} \hat{\sigma}_n^{(4)} \rangle &= a^4 - b^4 - c^4 + 6b^2c^2, \end{aligned} \quad (21)$$

将 (21) 式代入 (9) 式, 得到量子 Fisher 信息为

$$F_Q^{|W\bar{W}\rangle_4} = 4(1 + 3a^2) + 4[12b^2c^2 + 9a^2(b^2 + c^2)]\gamma^2, \quad (22)$$

同理, 可以得到单比特项和多比特项在 4 量子比特 $|\text{SGT}\rangle_4$ 下的期望值表示为

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \hat{\sigma}_n^{(j)} \rangle &= a^2, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(i)} \hat{\sigma}_n^{(j)} \hat{\sigma}_n^{(k)} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{\sigma}_n^{(1)} \hat{\sigma}_n^{(2)} \hat{\sigma}_n^{(3)} \hat{\sigma}_n^{(4)} \rangle &= a^4 + b^4 + c^4 - 6b^2c^2, \end{aligned} \quad (23)$$

将 (23) 式代入 (9) 式, 得到

$$F_Q^{|\text{SGT}\rangle_4} = 4(1 + 3a^2) + 4[3(b^2 - c^2)^2 + 9a^2(b^2 + c^2)]\gamma^2. \quad (24)$$

对比以上 3 种量子态的量子 Fisher 信息表达式 ((19) 式、(21) 式、(23) 式), 容易发现, 当相互作用强度 $\gamma = 0$ 时 (局域操作), 分别独立优化 3 个算式中的旋转方向矢量 $\mathbf{n}$, 可得其给出的量子 Fisher 信息值一致, 均为 $F_Q = 16$; 若考虑 $\gamma \neq 0$, 同样独立优化各自的旋转方向矢量 $\mathbf{n}$, 可以发现

(19) 式、(21) 式和 (23) 式均简化为

$$F_Q = \begin{cases} 16, & \gamma < 1/\sqrt{3}, \\ 7 + \frac{3}{2\gamma^2} + \frac{27\gamma^2}{2}, & \gamma \geq 1/\sqrt{3}, \end{cases} \quad (25)$$

即 3 种量子态的量子 Fisher 信息是相同的, 如图 1(a) 所示. 这说明无法通过最优化的量子 Fisher 信息来实现 3 种量子态的纠缠区分.

为解决上述问题, 我们尝试通过对 3 种量子态进行相同的单轴旋转操作来实现纠缠判定区分, 即操控量子态的哈密顿量 $\hat{H}$ 分别绕 x 轴、 y 轴、 z 轴进行旋转, 分析在此操作下 3 种量子态的量子 Fisher 信息随相互作用强度的变化曲线, 寻找实现纠缠判定区分的方案. 首先, 选取旋转方向为 x 轴 ($a = 1, b = c = 0$), 则 (19) 式、(21) 式和 (23) 式简化为

$$\begin{aligned} F_Q^{|\text{GHZ}\rangle^4}(x) &= 4 + 12\gamma^2, \quad F_Q^{|\text{W}\bar{\text{W}}\rangle^4}(x) = 16, \\ F_Q^{|\text{SGT}\rangle^4}(x) &= 16. \end{aligned} \quad (26)$$

从 (26) 式可知, $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息一致, 无法区分, 如图 1(b) 所示, 蓝色三角形与红色方块重合. 然后, 将转轴调整为 y 轴 ($b = 1, a = c = 0$), 可得 3 种量子态的量子 Fisher 信息变为

$$\begin{aligned} F_Q^{|\text{GHZ}\rangle^4}(y) &= 4 + 12\gamma^2, \quad F_Q^{|\text{W}\bar{\text{W}}\rangle^4}(y) = 4, \\ F_Q^{|\text{SGT}\rangle^4}(y) &= 4 + 12\gamma^2. \end{aligned} \quad (27)$$

此时, GHZ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息表达式一致, 随相互作用参数 γ 的变化图像相同, 如图 1(c) 所示, 无法区分. 当调整旋转轴为 z 轴时 ($c = 1, a = b = 0$), 三者的量子 Fisher 信息表示为

$$F_Q^{|\text{GHZ}\rangle^4}(z) = 16, \quad (28)$$

$$F_Q^{|\text{W}\bar{\text{W}}\rangle^4}(z) = 4, \quad F_Q^{|\text{SGT}\rangle^4}(z) = 4 + 12\gamma^2. \quad (29)$$

明显地, 3 种量子态的量子 Fisher 信息互不相同, 通过调整相互作用强度 γ , 可以实现 3 种量子态的区分, 如图 1(d) 所示. 下面研究不同环境噪声

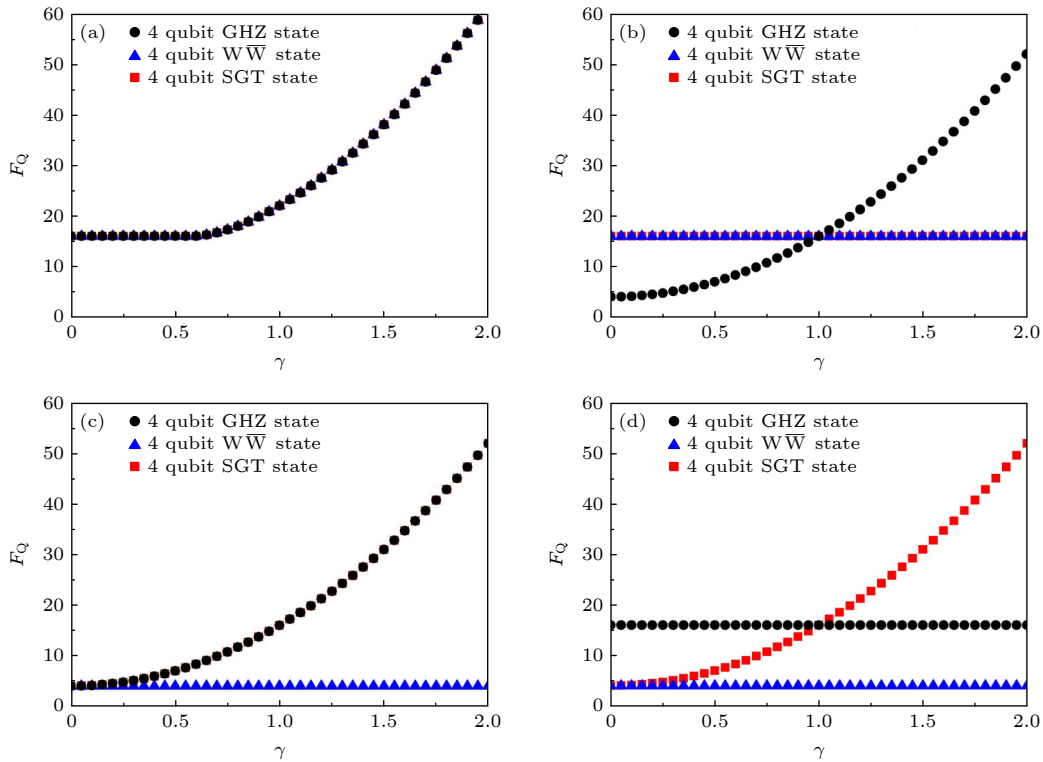


图 1 4 量子比特 GHZ 态、 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态在单轴旋转模型下的量子 Fisher 信息. 黑色圆点、蓝色三角形、红色方块依次表示 GHZ 态、 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息随相互作用参数 γ 的变化结果 (a) 彼此独立优化旋转方向 n 下的结果 ((25) 式); (b) 单轴旋转为 x 轴的结果 ((26) 式); (c) 单轴旋转为 y 轴的结果 ((27) 式); (d) 单轴旋转为 z 轴的结果 ((29) 式)

Fig. 1. The QFI of the 4-qubit GHZ state, $\text{W}\bar{\text{W}}$ state and SGT state under the one-axis twisting model. Black dots, blue triangles and red squares represent the QFI of the GHZ state, $\text{W}\bar{\text{W}}$, and SGT state with respect to the interaction parameter γ : (a) The results under the condition that the rotation directions n are optimized independently (Eq. (25)); (b) the results when the rotation is along the x -axis (Eq. (26)); (c) the results when the rotation is along the y -axis (Eq. (27)); (d) the results when the rotation is along the z -axis (Eq. (29)).

对 3 种量子态在 $\hat{J}_z$ 轴下旋转实现纠缠判定区分的影响, 能否在退相干通道下依然实现 3 种量子态的区分?

3.2 三种量子态在噪声环境下的量子 Fisher 信息判定及分类

本节研究在局域操作下 ($\gamma = 0$), 4 种信道噪声对纠缠判定区分的影响. 在比特翻转、相位阻尼、振幅阻尼和去极化信道四种噪声环境下, 将 3 种量子纯态的密度矩阵代入 (14) 式, 便可得到相应噪声环境下的密度矩阵, 对其进行谱分解, 代入混合态量子 Fisher 信息的表达式 (5), 便可得到噪声环境下的量子 Fisher 信息.

当选取的量子态为 4 比特 GHZ 态时, 密度矩阵 $\rho_{\text{GHZ}_4}^B$, $\rho_{\text{GHZ}_4}^P$, $\rho_{\text{GHZ}_4}^A$ 和 $\rho_{\text{GHZ}_4}^D$ 分别代表在比特翻转、相位阻尼、振幅阻尼和去极化信道下的量子混合态, 分别进行谱分解并代入量子 Fisher 信息公式 (14) 计算, 哈密顿量选 $H = \hat{J}_z$, 便可得到量子

Fisher 信息表示为

$$\begin{aligned} F_{|\text{GHZ}\rangle_4}^B &= 16(1 - 3p + 3p^2), \\ F_{|\text{GHZ}\rangle_4}^P &= 16(1 - p)^8, \\ F_{|\text{GHZ}\rangle_4}^A &= \frac{16(1 - p)^4}{(1 - p + p^2)^2}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$F_{|\text{GHZ}\rangle_4}^D = \frac{128(1 - p)^8}{p^4 - 4p^3 + 12p^2 - 16p + 8}. \quad (31)$$

同理, 通过计算, 解析得到了 4 比特 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态在比特翻转和相位阻尼下的量子 Fisher 信息表达式:

$$\begin{aligned} F_{|\text{W}\bar{\text{W}}\rangle_4}^B &= 4, \\ F_{|\text{W}\bar{\text{W}}\rangle_4}^P &= \frac{4(1 - p)^4(4 + 2p - 9p^2 + 8p^3 - 2p^4)}{3p^2 - 6p + 4}. \end{aligned} \quad (32)$$

由于在振幅阻尼和去极化通道下的量子 Fisher 信息计算冗杂, 未能得到解析表达式, 在图 2(c) 和图 2(d) 中分别给出了量子态在振幅阻尼通道和去极化通道下的结果. 类似地, 对于 SGT 态来说, 也是解析得到了其在比特翻转和相位阻尼下的量子

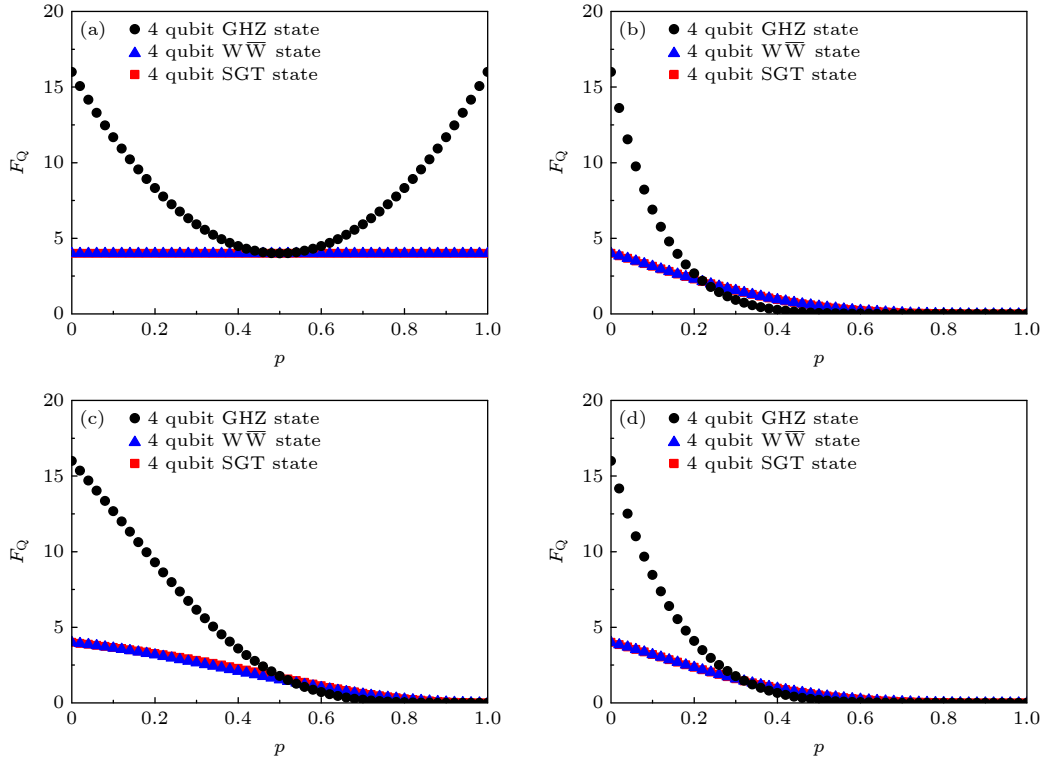


图 2 在局域操作下, 4 量子比特 GHZ 态、 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态在比特翻转、相位阻尼、振幅阻尼和去极化通道下的量子 Fisher 信息. 黑色圆点、蓝色三角形、红色方块依次表示 GHZ 态、 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息随退相干参数 p 的变化结果 (a) 量子态在比特翻转通道下的结果; (b) 量子态在相位阻尼通道中的结果; (c) 在振幅阻尼通道中的结果; (d) 在去极化通道下的结果

Fig. 2. The QFI of the 4-qubit GHZ state, $\text{W}\bar{\text{W}}$ state and SGT state under the bit-flip, phase damping, amplitude damping, and depolarizing channels with local operations. Black dots, blue triangles and red squares represent the QFI of the GHZ state, $\text{W}\bar{\text{W}}$, and SGT state with respect to the decoherence parameter p : (a) The results under the bit-flip channel; (b) the results under the phase damping channel; (c) the results under the amplitude damping channel; (d) the results under the depolarizing channel.

Fisher 信息表达式:

$$F_{|\text{SGT}\rangle_4}^{\text{B}} = 4, \\ F_{|\text{SGT}\rangle_4}^{\text{P}} = \frac{4(1-p)^4(4+2p-9p^2+8p^3-2p^4)}{3p^2-6p+4}. \quad (33)$$

可以看出, SGT 态的值与 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态的相同, 即算式 (32) 与算式 (33) 一样, 这也意味着二者无法在局域操作下实现区分, 如图 2(a) 和图 2(b) 中蓝色三角形 ($\text{W}\bar{\text{W}}$ 态的量子 Fisher 信息) 和红色方块 (SGT 态的量子 Fisher 信息) 所示, 二者是重叠的. 在图 2(c) 和图 2(d) 中, 分别给出了 3 种量子态在振幅阻尼和去极化通道下的量子 Fisher 信息随参数 p 的变化情况, 其中黑色圆点代表 GHZ 态的结果, 即算式 (30) 和算式 (31), 蓝色三角形和红色方块分别代表 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息的数值结果, 容易得出, 在局域操作下, 无法实现三者的完全纠缠区分. 此外, 随着参数 p 的变大,

3 种量子态的量子 Fisher 信息变得无法区分.

3.3 三种量子态在单轴旋转模型和噪声环境下的量子 Fisher 信息判定及分类

在单轴旋转模型下, 即将体系的哈密顿量替换为 $H = \hat{J}_z + \gamma J_z^2$, 采用数值计算方法研究了相互作用强度 γ 对 3 种量子态在四种不同噪声通道下的量子 Fisher 信息影响. 图 3 和图 4 分别给出了 3 种量子态在 $\gamma = 2$ 和 $\gamma = 5$ 情况下的量子 Fisher 信息随退相干参数 p 的变化曲线. 通过对比可以发现, 3 种量子态的量子 Fisher 信息在相互作用调制的噪声环境下可以得到很好的区分. 最为明显的是在比特翻转通道下, 3 种量子态的量子 Fisher 信息随参数 p 的变化互不相同, 很容易识别, 如图 3(a) 和图 4(a) 所示. 因为 3 种量子态具有交换对称性, 随着参数 p 从 0 到 1 的变化, 3 种量子态最终都返回到自己本身, 所以三者的量子 Fisher 信息变化

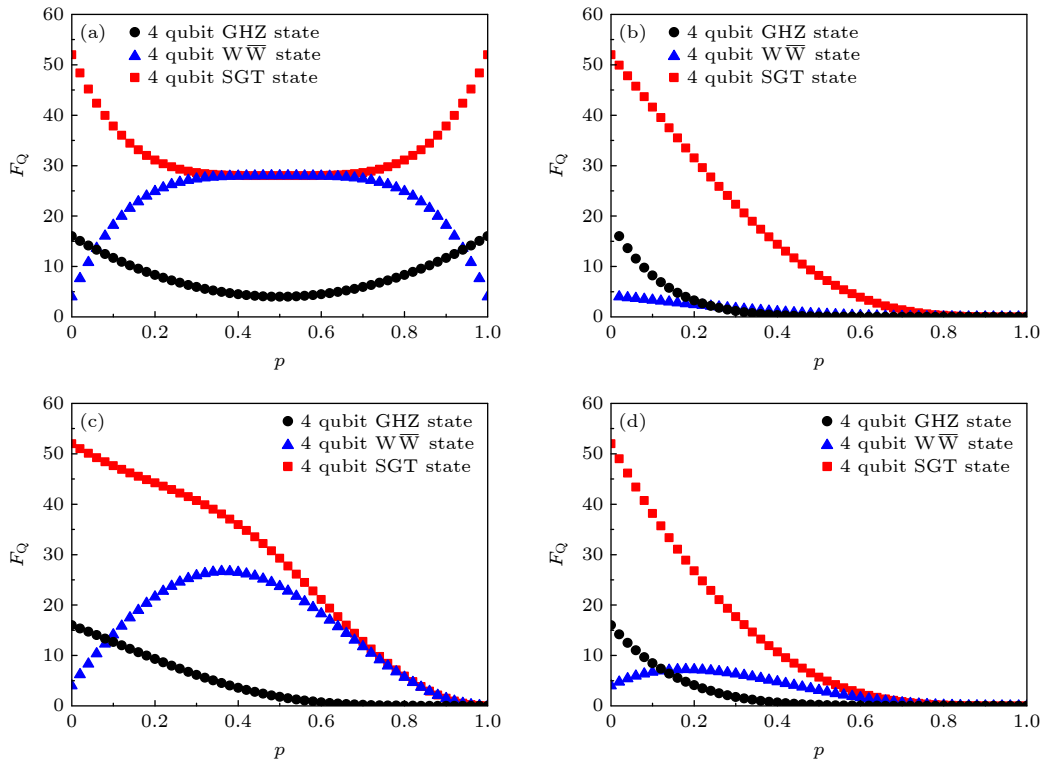


图 3 在单轴旋转模型下 ($\gamma = 2$), 4 量子比特 GHZ 态、 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态在比特翻转、相位阻尼、振幅阻尼和去极化通道下的量子 Fisher 信息. 黑色圆点、蓝色三角形、红色方块依次表示 GHZ 态、 $\text{W}\bar{\text{W}}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息随退相干参数 p 的变化结果 (a) 量子态在比特翻转通道下的结果; (b) 量子态在相位阻尼通道中的结果; (c) 振幅阻尼通道中的结果; (d) 去极化通道下的结果

Fig. 3. The QFI of the 4-qubit GHZ state, $\text{W}\bar{\text{W}}$ state and SGT state under the bit-flip, phase damping, amplitude damping, and depolarizing channels in the one-axis twisting model ($\gamma = 2$). Black dots, blue triangles and red squares represent the QFI of the GHZ state, $\text{W}\bar{\text{W}}$, and SGT state with respect to the decoherence parameter p : (a) The results under the bit-flip channel; (b) the results under the phase damping channel; (c) the results under the amplitude damping channel; (d) the results under the depolarizing channel.

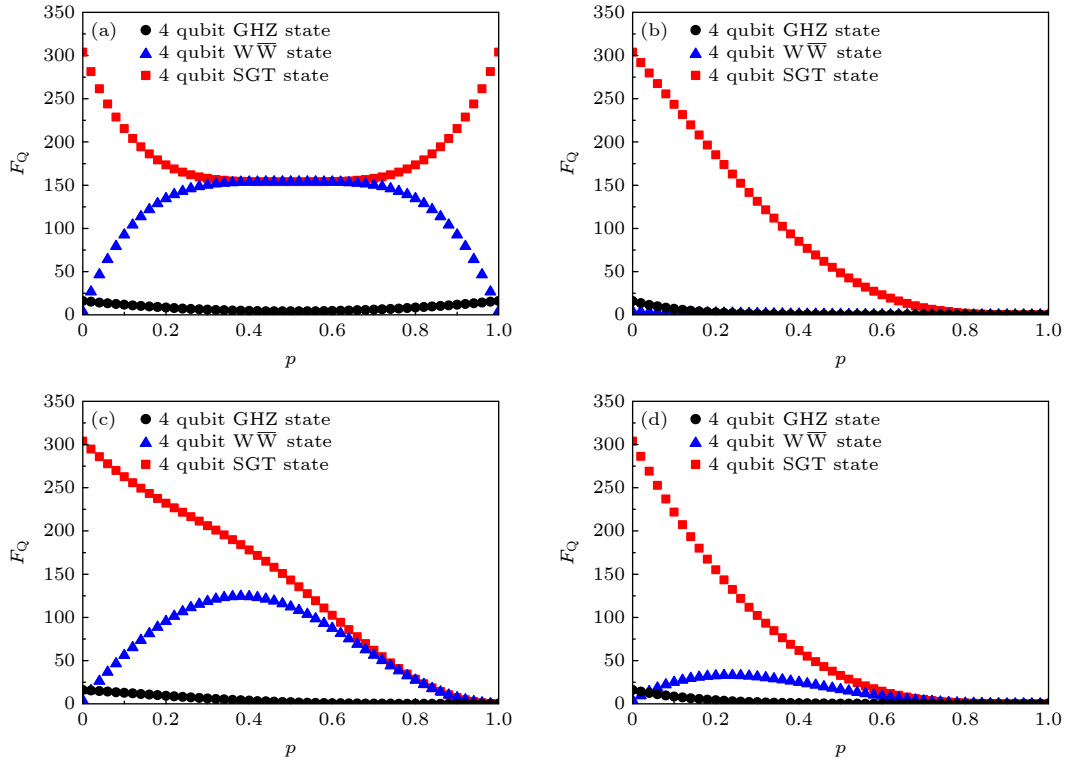


图 4 在单轴旋转模型下 ($\gamma = 5$), 4 量子比特 GHZ 态、 $W\bar{W}$ 态和 SGT 态在比特翻转、相位阻尼、振幅阻尼和去极化通道下的量子 Fisher 信息. 黑色圆点、蓝色三角形、红色方块依次表示 GHZ 态、 $W\bar{W}$ 态和 SGT 态的量子 Fisher 信息随退相干参数 p 的变化结果 (a) 量子态在比特翻转通道下的结果; (b) 量子态在相位阻尼通道中的结果; (c) 在振幅阻尼通道中的结果; (d) 在去极化通道下的结果

Fig. 4. The QFI of the 4-qubit GHZ state, $W\bar{W}$ state and SGT state under the bit-flip, phase damping, amplitude damping, and depolarizing channels in the one-axis twisting model ($\gamma = 5$). Black dots, blue triangles and red squares represent the QFI of the GHZ state, $W\bar{W}$ and SGT state with respect to the decoherence parameter p : (a) The results under the bit-flip channel; (b) the results under the phase damping channel; (c) the results under the amplitude damping channel; (d) the results under the depolarizing channel.

也呈现出了对称性. 此外, 通过对 SGT 态和 $W\bar{W}$ 态在比特翻转通道下的末态数值计算, 发现当 $p = 0.5$ 时, 二者的量子末态形式一致, 故其量子 Fisher 信息值也相同, 即图 3(a) 和图 4(a) 中间区域有重叠.

在相位阻尼、振幅阻尼和去极化通道中, 随着噪声的增强, 3 种量子态逐渐变得无法区分. 除此之外, 研究还发现, GHZ 态在 4 种噪声环境下的量子 Fisher 信息随参数 p 的变化与相互作用强度 γ 无关, 很容易区分出来, 即图 3 和图 4 中的黑色圆点. 需要注意的是, 在比特翻转通道中, 当退相干参数 p 处于中间区域 ($p \approx 0.5$) 时, $W\bar{W}$ 态与 SGT 态的量子 Fisher 信息重合, 无法区分, 如图 3(a) 和图 4(a) 所示. 综合图 2 与图 3、图 4 中量子 Fisher 信息变化曲线的对比可以得出, 即使在噪声通道下, 仍需要单轴旋转操作来实现 3 种量子态的纠缠判定区分, 这也验证了单轴旋转操作在多

体系系统纠缠判定区分方面具有重要作用, 特别是在复杂量子系统中, 可作为新的手段或方法开展纠缠判定区分研究.

4 结 论

综上所述, 本文计算了 3 种特殊量子态——4 比特 GHZ 态、4 比特 $W\bar{W}$ 态、4 比特 SGT 态, 在单轴旋转模型下的量子 Fisher 信息, 解决其在局域操作下无法实现纠缠判定区分的问题. 通过解析计算, 我们找到了最优的旋转轴, $H = \hat{J}_z + \gamma \hat{J}_z^2$, 利用此哈密顿量对 3 种特殊量子态进行旋转, 实现了 3 种量子态的量子 Fisher 信息区分. 此外, 还考虑了外界环境噪声对 3 种量子态纠缠判定区分的影响, 分别对比特翻转通道、相位阻尼、振幅阻尼和去极化信道下的量子态 Fisher 信息随退相干参数 p 的变化进行了研究, 研究发现: 在局域操作下, $H = \hat{J}_z$, 3 种量子态在 4 种通道下均无法实现完全

区分; 在单轴旋转非局域操作下, 3 种量子态在 4 种噪声通道下均可以实现纠缠区分, 而且在比特翻转通道下 3 种量子态的量子 Fisher 信息随退相干参数 p 的变化互不相同, 最容易区分. 需要注意的是, 在比特翻转通道中, 随着退相干参数 p 的变化, $W\bar{W}$ 态与 SGT 态的量子 Fisher 信息在中间区域 ($p \approx 0.5$) 有重叠, 无法区分. 本文工作为进一步开展多体系统的量子纠缠判定与区分提供了新方法, 将有助于量子计算与量子模拟的快速发展.

参考文献

- [1] Gölne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
- [2] Chefles A 2010 *Contemp. Phys.* **41** 401
- [3] Bae J, Kwek L C 2015 *J. Phys. A* **48** 083001
- [4] Friis N, Vitagliano G, Malik M, Huber M 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 72
- [5] Chen D X, Zhang Y, Zhao J L, Wu Q C, Fang Y L, Yang C P, Nori F 2022 *Phys. Rev. A* **106** 022438
- [6] Zhu C H, Shi T T, Ding L Y, Zheng Z Y, Zhang X, Zhang W 2025 arXiv: 2502.20717v1 [quant-ph]
- [7] Cramer M, Plenio M B, Flammia S T, Somma R, Gross D, Bartlett S D, Landon-Cardinal O, Poulin D, Liu Y K 2010 *Nat. Commun.* **1** 149
- [8] Wang T T, Song M H, Lyu L K, Witeczak-Krempa W, Meng Z Y 2025 *Nat. Commun.* **16** 96
- [9] He L, Zhao Q, Li Z D, Yin X F, Yuan X, Hung J C, Chen L K, Li L, Liu N L, Peng C Z, Liang Y C, Ma X F, Chen Y A, Pan J W 2018 *Phys. Rev. X* **8** 021072
- [10] Zwerger M, Dür W, Bancal J D, Sekatski P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 060502
- [11] Pezzè L, Smerzi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100401
- [12] Hyllus P, Laskowski W, Krischek R, Schwemmer C, Wieczorek W, Weinfurter H, Pezzè L, Smerzi A 2012 *Phys. Rev. A* **85** 022321
- [13] Huang Y L, Che L Y, Wei C, Xu F, Nie X F, Li J, Lu D W, Xin T 2025 *npj Quantum Inf.* **11** 29
- [14] Ayachi F E, Mansour H A, Baz M E 2025 *Commun. Theor. Phys.* **77** 065104
- [15] Feng T F, Vedral V 2022 *Phys. Rev. D* **106** 066013
- [16] Li L J, Fan X G, Song X K, Ye L, Wang D 2024 *Phys. Rev. A* **110** 012418
- [17] Qiu S F, Xu Q, Zhou X Q 2025 *Acta Phys. Sin.* **74** 110301 (in Chinese) [丘尚锋, 徐桥, 周晓祺 2025 物理学报 **74** 110301]
- [18] Li H, Gao T, Yan F L 2024 *Phys. Rev. A* **109** 012213
- [19] Dong D D, Li L J, Song X K, Ye L, Wang D 2024 *Phys. Rev. A* **110** 032420
- [20] Strobel H, Muesel W, Linnemann D, Zibold T, Hume D B, Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K 2014 *Science* **345** 424
- [21] Pezzè L, Li Y, Li W D, Smerzi A 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **113** 11459
- [22] Pezzè L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [23] Ren Z H, Li Y, Li Y N, Li W D 2019 *Acta. Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [24] Qin Z Z, Gessner M, Ren Z H, Deng X W, Han D M, Li W D, Su X L, Smerzi A, Peng K C 2019 *npj Quantum Inf.* **5** 3
- [25] Ren Z H, Li W D, Smerzi A, Gessner M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 080502
- [26] Xu K, Zhang Y R, Sun Z H, Li H, Song P T, Xiang Z C, Huang K X, Li H, Shi Y H, Chen C T, Song X H, Zheng D N, Nori F, Wang H, Fan H 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 150501
- [27] Li Y, Ren Z H 2023 *Phys. Rev. A* **107** 012403
- [28] Li Y, Ren Z H 2024 *Chaos, Solitons and Fractals* **186** 115299
- [29] Tey M K, You L 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 160303 (in Chinese) [郑盟崑, 尤力 2018 物理学报 **67** 160303]
- [30] Fisher R A 1922 *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* **222** 309
- [31] Cramér H 1946 *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton: Princeton University)
- [32] Li Y, Pezzè L, Gessner M, Ren Z H, Li W D, Smerzi A 2018 *Entropy* **20** 628
- [33] Nolan S, Smerzi A, Pezzè L 2021 *npj Quantum Inf.* **7** 169
- [34] Han C Y, Ma Z, Qiu Y X, Fang R H, Wu J T, Zhan C, Li M J, Huang J H, Lu B, Lee C H 2024 *Phys. Rev. Applied* **22** 044058
- [35] Li Y, Ren Z H 2022 *Physica A* **596** 127137
- [36] Imai S, Smerzi A, Pezzè L 2025 *Phys. Rev. A* **111** L020402
- [37] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [38] Shen Y, Zhou J G, Huang J H, Lee C H 2024 *Phys. Rev. A* **110** 042619
- [39] Fortes R, Rigolin G 2015 *Phys. Rev. A* **92** 012338
- [40] Kraus K 1983 *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory* (Berlin: Springer-Verlag) pp1–12
- [41] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) pp473–497

Entanglement detection and classification of multi-qubit GHZ state, $W\bar{W}$ state, and SGT state under one-axis twisting model*

LI Yan^{1)2)3)†} REN Zhihong⁴⁾

1) (Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China)

2) (Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China)

3) (Shanxi Key Laboratory of Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Jinzhong 030619, China)

4) (School of Physics and Information Engineering, Shanxi Normal University, Taiyuan 030031, China)

(Received 3 June 2025; revised manuscript received 27 July 2025)

Abstract

Entanglement detection and classification of different kinds of entangled states in quantum many-body systems have always been a key topic in quantum information and quantum computation. In this work, we investigate the entanglement detection and classification of three special entangled states: 4-qubit GHZ state, 4-qubit $W\bar{W}$ state, and 4-qubit SGT state, which cannot be distinguished by the general quantum Fisher information (QFI) under the usual local operations. By utilizing the experimentally mature and controllable one-axis twisting model, along with optimized rotations and adjustable interaction strength, we successfully classify the three states by QFI. Additionally, we also study the effects of four types of environmental noise on entanglement detection, namely, bit-flip channel, amplitude-damping channel, phase-damping channel, and depolarizing channel. The results show that under local operations, the changes of the QFI from the 4-qubit GHZ state with decoherence parameter p in four noise channels are significantly different from those of the $W\bar{W}$ state and SGT state, and thus making them distinguished. However, the QFI about the $W\bar{W}$ state and the QFI about the SGT state exhibit the same variations and cannot be classified. In the one-axis twisting model, the variation curves of the QFI of the three states under the four noise channels are different from each other, which can be clearly observed. It should be noted that in the bit-flip channel, the QFI curves of the $W\bar{W}$ state and the SGT state overlaps in the middle region ($p \approx 0.5$), which prevents their classification. Our work provides a new method for entanglement detection and classification in quantum many-body systems, which will contribute to future research in quantum science and technology.

Keywords: entanglement detection and classification, quantum Fisher information, one-axis twisting model, GHZ state, $W\bar{W}$ state, SGT state

PACS: 03.67.-a, 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Ta

DOI: 10.7498/aps.74.20250715

CSTR: 32037.14.aps.74.20250715

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12305024, 12205176, 92365116), the Applied Basic Research Program of Shanxi Province, China (Grant Nos. 202203021212193, 202203021212387, 202103021223251), and the Young Academic Leaders of Higher Learning Institutions of Shanxi Province, China (Grant No. 2024Q035).

† Corresponding author. E-mail: li8989971@163.com

多量子比特GHZ态, $W\bar{W}$ 态, SGT态在单轴旋转模型下的纠缠判定区分

李岩 任志红

Entanglement detection and classification of multi-qubit GHZ state, $W\bar{W}$ state, and SGT state under one-axis twisting model

LI Yan REN Zhihong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 74, 200301 (2025) DOI: 10.7498/aps.74.20250715

CSTR: 32037.14.aps.74.20250715

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250715>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多量子比特态在白噪声环境下的纠缠判定与分类

Quantum entanglement detection and classification of multipartite state under the white noise environment

物理学报. 2025, 74(19): 190301 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250221>

离子的低能电子弹性散射研究: 共振态与同分异构

Low-energy electron elastic scattering of anions: Resonance states and conformers

物理学报. 2024, 73(24): 243401 <https://doi.org/10.7498/aps.73.20241377>

多量子比特WV纠缠态在Lipkin-Meshkov-Glick模型下的量子Fisher信息

Quantum Fisher information of multi-qubit WV entangled state under Lipkin-Meshkov-Glick model

物理学报. 2023, 72(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.72.20231179>

扭角双层石墨烯中磁性和手性d + id超导态的量子蒙特卡罗研究

Quantum Monte Carlo study of magnetism and chiral $d + id$ superconductivity in twisted bilayer graphene

物理学报. 2025, 74(12): 120201 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20250305>

含自旋-轨道耦合的光谱常数计算

Calculation of spectroscopic constants with spin-orbit coupling

物理学报. 2025, 74(2): 023101 <https://doi.org/10.7498/aps.74.20241435>

分子离子, 和态的不透明度

Molecular opacities of $A^2\Pi_u$ and states of nitrogen cation

物理学报. 2022, 71(19): 193101 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220734>